УДК 539.215.9:633.11

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ДАВЛЕНИЯ В ЕМКОСТЯХ, ЗАПОЛНЕННЫХ ДИСКРЕТНОЙ СРЕДОЙ

**В.Б.ФЕДОСЕЕВ, А.Б. ГОРДЕЕВА**
(Донской государственный технический университет),
**И.А. ЗАЦАРИННАЯ**
(Азово-Черноморская агроинженерная академия)

*Дан анализ распределения по вертикали и горизонтали составляющих давления сыпучего материала. Показано наличие области максимального давления в центральной части бункера. На основе анализа условия равновесия получено выражение для бокового коэффициента.*
***Ключевые слова:*** *сыпучий материал, бункер, коэффициент внешнего трения, боковой коэффициент.*

**Ведение.** В теории взаимодействия сыпучих материалов со стенками емкости важное место отводится определению величины давления материала на стенки емкости. Известно, сыпучий материал обладает и свойствами жидкости, и свойствами твердого тела. Модель идеального сыпучего материала предполагает наличие силы сухого трения в местах контакта частиц между собой и стенками емкости. От величины давления в горизонтальном и вертикальном направлениях зависит выбор емкости для хранения. Интересным представляется вопрос определения параметров, отвечающих за величину давления.

**Теоретический расчет давления в емкостях.** В сыпучем материале вертикальное $P_z$ и горизонтальное $P_y$ давление связаны соотношением:

$$P_y = k \cdot P_z\,, \tag{1}$$

где $k$ – так называемый боковой коэффициент. Это соотношение используется, в частности, и для расчета давления на стены элеваторов. Однако, несмотря на то, что соотношение (1) известно давно [1], аналитического выражения для этого коэффициента до сих пор не получено.

В данной работе делается попытка на основании аналитического исследования давления сыпучего материала в щелевом бункере получить в общем виде выражение для бокового коэффициента $k$.

Рассмотрим бесконечно длинную, вдоль оси $OX$, емкость с сужающимися книзу стенами, т.е. щелевой бункер, с углом наклона стенки к вертикали $\alpha$ (рис. 1).

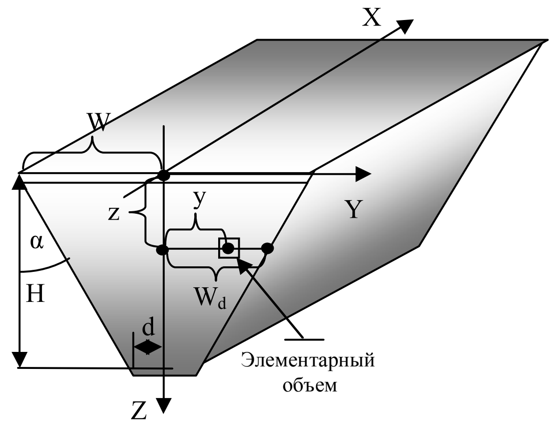


Рис. 1. Щелевой бункер и оси координат

Система уравнений для определения давления в сыпучем материале имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} &\gamma \cdot g = \left(1 + \mu_i^2\right) \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z}, \\ &k \cdot \frac{\partial P_z}{\partial y} = \mu_i \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z}, \\ &P_y = k \cdot P_z, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\mu_i$ – коэффициент внутреннего трения; $\gamma$ – объемная плотность сыпучего материала.

Проинтегрируем первое уравнение в системе (2) по координате $y$: от $-W_d$ до $+W_d$ (см. рис. 1), т.е. перейдем от элементарного объема к элементарному горизонтальному слою толщиной $dz$:

$$\gamma \cdot g \cdot dz \cdot 2 \cdot W_d = \left(1 + \mu_i^2\right) \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz \cdot 2 \cdot W_d + C\,. \tag{3}$$

Константа интегрирования $C$ по физическому смыслу будет представлять собой вертикальную компоненту силы, действующей на боковые поверхности элементарного слоя. Рассмотрим контакт элементарного, горизонтального слоя с боковой поверхностью щелевого бункера (рис. 2). Как видно из рис. 2, к основному элементарному слою $ABCD$ необходимо еще добавить два (по одному на каждую сторону бункера) треугольных слоя – $BEC$. Если вместо сыпучего материала в бункере находилась бы идеальная жидкость, то вертикальная компонента силы реакции стенки бункера в точности уравновесила силу тяжести этих элементарных треугольных слоев. В первом приближении распространим этот вывод и на случай сыпучего материала.

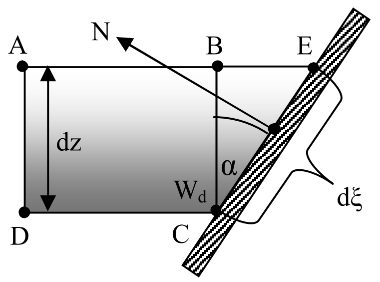

Рис. 2. Контакт элементарного слоя с боковой поверхностью бункера

Следовательно, из сил, действующих на боковые стороны элементарного слоя, осталась лишь вертикальная компонента силы трения. Силу трения определим как силу сухого трения $F_{TP} = \mu_e N$, где $\mu_e$ – коэффициент внешнего трения. Очевидно, что сила реакция стенки $N$ будет определяться давлением, действующим на боковую стенку. В этом случае константа интегрирования $C$ имеет следующее выражение:

$$C = 2 \cdot \mu_e \cdot N \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \mu_e \cdot P \cdot d\xi \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \mu_e \cdot P \cdot \frac{dz}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha \,. \tag{4}$$

Далее, обобщим соотношение (1):

$$P(\beta) = P_z \cdot \left[1 - (1-k) \cdot \sin\beta\right], \tag{5}$$

где $P$ – давление в сыпучей среде по некоторому произвольному направлению; $\beta$ – угол между этим направлением и осью $OZ$.

Множитель перед квадратной скобкой – вертикальное давление. Это естественно, так как мы рассматриваем движение сыпучего материала под действием сил гравитации. Следовательно, вертикальное давление будет основным, ведущим фактором, под действием которого формируется все поле давления в сыпучем материале. В этом случае, если направление совпадает с осью $OZ$, то угол $\beta = 0$ и $P(0) = P_z = P_z$. Если направление совпадает с осью $OY$, то угол $\beta = \pi/2$ и $P(\pi/2) = P_y = k P_z$. Очевидно, что этот коэффициент должен зависеть от свойств самого сыпучего материала.

Подставив в (4) выражение (5), получим:

$$C = 2 \cdot \mu_e \cdot P \cdot dz = 2 \cdot \mu_e \cdot dz \cdot P_z \cdot \left[1 - (1-k) \cdot \cos\alpha\right]. \tag{6}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что угол между направлением силы реакции $N$ и осью $OZ$ равен $\pi/2 - \alpha$. С учетом (6) уравнение (3) преобразуется следующим образом:

$$\gamma \cdot g \cdot dz \cdot 2 \cdot W_d = \left(1 + \mu_i^2\right) \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz \cdot 2 \cdot W_d + 2 \cdot \mu_e \cdot dz \cdot P_z \cdot \left[1 - (1-k) \cdot \cos\alpha\right].$$

Приведем это уравнение к стандартному виду:

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\mu_e \cdot P_z \cdot \left[1 - (1-k) \cdot \cos\alpha\right]}{\left(1 + \mu_i^2\right) \cdot \left(W - z \cdot tg\alpha\right)} - \frac{\gamma \cdot g}{1 + \mu_i^2} = 0 \,. \tag{7}$$

Здесь использовано соотношение:

$$W_d = W - z \cdot tg\alpha \,. \tag{8}$$

Решение уравнения (7) имеет вид:

$$P_z = C \cdot \left(-W + b \cdot z\right)^{\frac{A}{b}} - \frac{B}{A - b} \cdot \left(-W + b \cdot z\right), \tag{9}$$

где для сокращения записи введены следующие обозначения:

$$b = tg\alpha \quad B = \frac{\gamma \cdot g}{1 + \mu_i^2} \quad A = \frac{\mu_e \cdot \left[1 - (1-k) \cdot \cos\alpha\right]}{1 + \mu_i^2} \,. \tag{10}$$

На поверхности бункера давление должно равняться нулю. Из этого условия получим выражение для константы интегрирования:

$$C = \frac{B}{A-b} \cdot (-W)^{1-\frac{A}{b}}.$$

При этом уравнение (9) преобразуем к виду:

$$P_z = \frac{B \cdot (W - b \cdot z)}{A-b} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{W - b \cdot z}{W} \right)^{\frac{A}{b}-1} \right]. \tag{11}$$

Из выражения (10) следует, что при $\mu_e \to 0$, $A \to 0$. При этом $P_z \to \dfrac{\gamma \cdot g \cdot z}{1+\mu_i^2}$, что соответствует физическому смыслу исследуемой задачи.

Рассмотрим теперь предел выражения (11) при стремлении стенки щелевого бункера к вертикали (*a → 0, b → 0*):

$$\lim_{b \to 0} P_z = \lim_{b \to 0} \frac{B \cdot (W - b \cdot z)}{A-b} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{W}{W - b \cdot z} \right) \cdot \left( \frac{W - b \cdot z}{W} \right)^{\frac{A}{b}} \right] = \frac{B \cdot W}{A} \cdot \left( 1 - \lim_{b \to 0} \left( \frac{W - b \cdot z}{W} \right)^{\frac{A}{b}} \right).$$

Таким образом, мы имеем дело с неопределенностью типа $1^{\infty}$. Для ее раскрытия найдем сначала предел логарифма этой неопределенности:

$$\lim_{b \to 0} \left[ \ln \left( \frac{W - b \cdot z}{W} \right)^{\frac{A}{b}} \right] = \lim_{b \to 0} \left[ \frac{A}{b} \cdot \ln \left( 1 - b \cdot \frac{z}{W} \right) \right].$$

Для этого разложим логарифм в ряд по степеням $\left( b \cdot \dfrac{z}{W} \right)$:

$$\lim_{b \to 0} \left[ \frac{A}{b} \cdot \ln \left( 1 - b \cdot \frac{z}{W} \right) \right] = \lim_{b \to 0} \left[ \frac{A}{b} \cdot \left( -b \cdot \frac{z}{W} - \frac{1}{2} \cdot \left( b \cdot \frac{z}{W} \right)^2 - \ldots \right) \right] = -A \cdot \frac{z}{W}.$$

Отсюда вытекает, что:

$$\lim_{b \to 0} \left[ \left( \frac{W - b \cdot z}{W} \right)^{\frac{A}{b}} \right] = \exp \left( -A \cdot \frac{z}{W} \right).$$

Следовательно, вертикальное давление (при *b → 0*) будет стремиться к пределу:

$$\lim_{b \to 0} P_z = \frac{B \cdot W}{A} \cdot \left[ 1 - \exp \left( -A \cdot \frac{z}{W} \right) \right].$$

Подставляя в это выражение значения *B* и *A*, получаем:

$$\lim_{b \to 0} P_z = \frac{\gamma \cdot g \cdot W}{\mu_e \cdot k} \cdot \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\mu_e \cdot k}{1+\mu_i^2} \cdot \frac{z}{W} \right) \right].$$

Данное выражение совпадает с хорошо известным решением для прямоугольного силоса [3]. При выводе последнего уравнения учтено, что $\lim\limits_{b \to 0} A = \dfrac{\mu_e \cdot k}{1+\mu_i^2}$. Таким образом, доказана преемственность решений для прямоугольного силоса и щелевого бункера.

Введем теперь в решение (11) зависимость от координаты *y*. Аналогично [2] эту зависимость представим в виде:

$$P_z = \frac{B\cdot\{W-b\cdot[z-(W-y)\cdot tg\chi]\}}{A-b}\cdot\left[1-\left(\frac{W-b\cdot[z-(W-y)\cdot tg\chi]}{W}\right)^{\frac{A}{b}-1}\right]. \quad (12)$$

где $\chi$ - угол естественного откоса.

Потребуем теперь, чтобы решение (12) удовлетворяло второму уравнению системы (2). Найдя первые производные от (12) по $y$ и $z$, и подставив их в (1), получаем:

$$k=\frac{\mu_i}{tg\chi}=\frac{tg\psi}{tg\chi}. \quad (13)$$

Таким образом, получено аналитическое выражение бокового коэффициента для сыпучего материала, находящегося в щелевом бункере. Уравнение (13) совпадает с выражением, полученным в [2] для сыпучего материала, находящегося в насыпи. Тем самым подтверждается предположение о том, что боковой коэффициент зависит от свойств самого сыпучего материала и не зависит от вида емкости, в которой он находится.

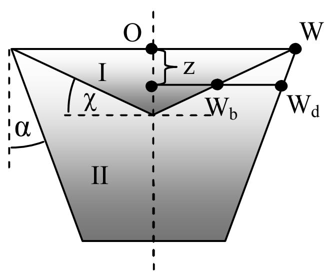

Рис. 3. Разделение пространства щелевого бункера на области

Однако решение в форме (12) не удовлетворяет нулевому граничному условию на поверхности бункера. Для выполнения этого условия, все пространство щелевого бункера разобьем на две области (рис. 3).

Решение в области $I$ представим в виде [2]:

$$P_z^I=\frac{\gamma\cdot g}{1+\mu_i^2}\cdot z. \quad (14)$$

Решение в области $II$ будем искать в виде:

$$P_z^{II} = \frac{B\cdot\{W-b\cdot[z-(W-y)\cdot tg\chi]\}}{A-b}\cdot\left[1-\left(\frac{W-b\cdot[z-(W-y)\cdot tg\chi]}{W}\right)^{\frac{A}{b}-1}\right]+\frac{\gamma\cdot g}{1+\mu_i^2}\cdot(W-y)\cdot tg\chi. \quad (15)$$

На линии $z = 0$, $y = W$ решение (15) обращается в нуль. На границе областей, определяемой уравнением $y=W_b$; $z=(W-W_b)\cdot tg\chi$ (см. рис. 3), первое слагаемое решения (15) обращается в нуль, а второе слагаемое переходит в $P_z^I$. Таким образом, выполнено граничное условие на поверхности бункера. При $\mu_e\to 0$ решение (14) преобразуем к виду:

$$P_z^{II}=\frac{\gamma\cdot g}{1+\mu_i^2}\cdot[z-(W-y)\cdot tg\chi]+\frac{\gamma\cdot g}{1+\mu_i^2}\cdot(W-y)\cdot tg\chi,$$

или, преобразовав, получим: $P_z^{II}=\frac{\gamma\cdot g}{1+\mu_i^2}\cdot z$, что соответствует физическому смыслу задачи.

Итак, мы видим, что решения (14) и (15) удовлетворяют граничным условиям и предельному переходу к идеальной жидкости.

График зависимости давления, рассчитанного по формулам (14), (15), от координаты $z$, при $\alpha = 30^0$, $y = 0$ и $y = W = 3{,}5$ м, представлен на рис. 4. Как видно из рисунка, давление с ростом $z$ растет, достигает экстремума, а затем падает до некоторого минимума. Относительное положение максимума давления зависит от параметров бункера.

Таким образом, для идеального сыпучего материала в щелевом бункере найдено вертикальное давление (15). Горизонтальное давление определяем с использованием третьего уравнения системы (2), выражений (13) и (15).

Кроме того, исходя из экспериментально измеряемых параметров сыпучего материала, получено выражение (13) для коэффициента $k$, связывающего вертикальное и горизонтальное давление, так называемого бокового коэффициента [1]. Этот коэффициент определяется только параметрами самого сыпучего материала (углом внутреннего трения $\psi$ и углом естественного откоса $\chi$). В предельном случае, при стремлении к нулю коэффициента внутреннего трения (идеальная жидкость), этот коэффициент стремится к единице, так как в этом случае к нулю будет стремиться и угол естественного откоса. При этом идеальный сыпучий материал переходит в идеальную жидкость.

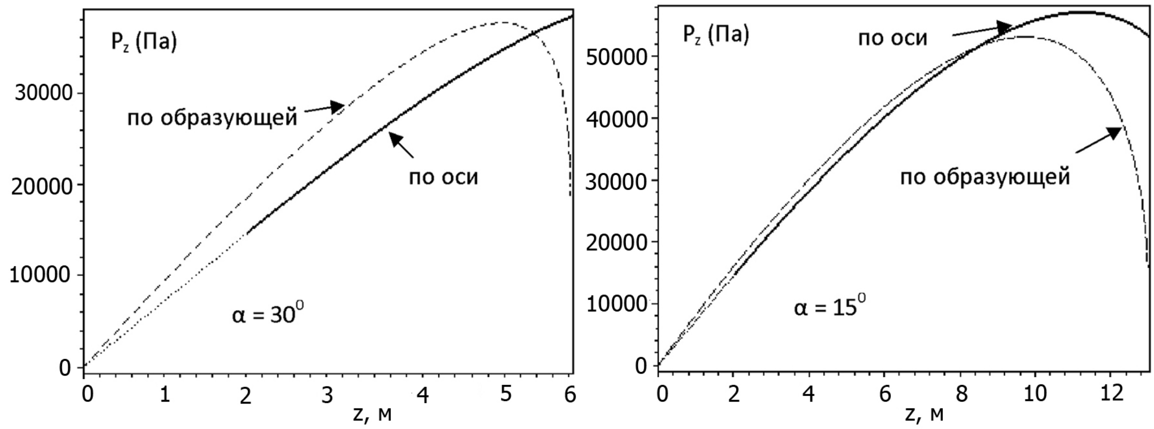


Рис. 4. Вертикальное давление в щелевом бункере вдоль осевой и образующей боковую поверхность линий при различных углах наклона стенки бункера α: $\gamma$ = 800 кг / м$^3$; $\psi = 16^0$; $\varphi = 20^0$; $\chi = 30^0$; W = 3,5 м

До настоящего времени для определения численного значения бокового коэффициента используют эмпирические или полуэмпирические соотношения. Так, например, при инженерных расчетах для вычисления этого коэффициента используют следующую эмпирическую формулу:

$$k = \frac{\nu}{1-\nu}, \tag{16}$$

где $\nu$ – коэффициент поперечной деформации. Однако само измерение этого коэффициента для сыпучих материалов вызывает большие трудности. К тому же по этой зависимости трудно установить предел, к которому стремится боковой коэффициент при переходе от сыпучего материала к идеальной жидкости.

В работе [4] приводятся опытные значения коэффициента бокового давления, в частности, для пшеницы $k = 0{,}3 - 0{,}6$, что соответствует приведенным выше расчетам по формуле (13).

На практике для расчета давления на стены элеваторов используют следующую эмпирическую формулу для бокового коэффициента:

$$k = tg^2\left(45^0 - \frac{\psi}{2}\right). \tag{17}$$

Это более реальное выражение для бокового коэффициента. Из этого выражения, в частности, следует, что при переходе к идеальной жидкости (при $\psi \to 0$) боковой коэффициент стремится к единице в соответствие с законом Паскаля. Для зерна рекомендуется принимать коэффициент $k = 0{,}44$. Однако в этом случае из (17) вытекает, что угол внутреннего трения должен быть равным $\psi = 23^0$, что расходится с экспериментальными данными. Выражение (17) нельзя считать универсальным из-за отсутствия в нем важнейшей характеристики сыпучего материала – угла естественного откоса. В [3] приводится следующее выражение для бокового коэффициента:

$$k = \frac{tg^2\beta}{2 + tg\varphi \cdot tg\beta}, \tag{18}$$

где $\beta$ – угол укладки частиц сыпучего материала. Эта формула получена на основании представлений о дискретной модели сыпучего материала. При этом сыпучий материал моделируется абсолютно упругими шарами одинакового диаметра, имеющими правильную геометрическую упаковку. Для пирамидальной укладки зерновой пшеницы угол укладки равен $\beta = 43^0$. В (18) угол $\varphi$ – угол внешнего трения. Таким образом, в выражение для бокового коэффициента не входят обычно измеряемые параметры самого сыпучего материала: угол внутреннего трения, угол естественного откоса. Свойства самого сыпучего материала здесь представлены только теоретически введенным углом $\beta$, который экспериментально не измеряется. Поэтому по (18) невозможно определить предельное значение бокового коэффициента при переходе идеального сыпучего тела в идеальную жидкость. При $\varphi = 20^0$ коэффициент $k$, рассчитанный по (18), получается равным $k = 0,37$, что несколько меньше, используемого на практике значения.

**Выводы.** Таким образом, можно считать, что расчеты бокового коэффициента дают хорошее согласие с экспериментом. Формула (13) отражает физический смысл исследуемого параметра, удовлетворяет условиям перехода сыпучего материала к идеальной жидкости.

**Библиографический список**

1. Jansen H. Versuche uber Getreidedruck in Silozellen / H. Jansen. – Berlin, 1895. – S. 1045-1049.
2. Федосеев В.Б. Боковой коэффициент и давление в насыпи сыпучего материала // Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств.науки. – 2010. – №2. – С. 58-60.
3. Гячев Л.В. Основы теории бункеров / Л.В. Гячев. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1992. – 312 с.
4. Хранение зерна / под ред. Н.П. Козминой; пер. с англ. – М.: Колос, 1975.

Материал поступил в редакцию 14.12.10.

**References**

1. Jansen H. Versuche uber Getreidedruck in Silozellen / H. Jansen. – Berlin, 1895. – S. 1045-1049.
2. Fedoseev V.B. Bokovoi koefficient i davlenie v nasypi sypuchego materiala // Izv. vuzov Sev.-Kavk. region. Ser. Estestv.nauki. – 2010. – №2. – S. 58-60. – In Russian.
3. Gyachev L.V. Osnovy teorii bunkerov / L.V. Gyachev. – Novosibirsk: Izd-vo Novosibir. un-ta, 1992. – 312 s. – In Russian.
4. Hranenie zerna / pod red. N.P. Kozminoi; per. s angl. – M.: Kolos, 1975. – In Russian.

## THEORETICAL CALCULATION OF PRESSURE IN TANKS FILLED WITH DISCRETE MEDIUM

**V.B. FEDOSEYEV, A.B. GORDEYEVA**
(Don State Technical University),
**I.A. ZATSARINNAYA**
(Azov-Black Sea State Agricultural Engineering Academy)

*The vertical and horizontal distribution of free-flowing material pressure components is analyzed. The availability of the full pressure zone in the general tanker is shown. The expression for the lateral factor is derived on the basis of the equilibrium condition analysis.*
***Keywords:*** *granular material, tanker, coefficient of contact friction, lateral factor.*