

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Н.К. АХМЕДОВ

(Бакинский государственный университет),

Т.Б. МАМЕДОВА

(Бакинский славянский университет)

Исследована задача кручения радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочки методом однородных решений. Получены асимптотические разложения однородных решений, показано, что напряженно-деформированное состояние складывается из проникающего напряженно-деформированного состояния и решения характера пограничного слоя. В случае существенной анизотропии некоторые пограничные решения не обладают свойством затухания и могут охватывать всю область, занятую оболочкой.

Ключевые слова: радиально-неоднородная сферическая оболочка, пограничный слой, однородные решения.

Введение. В современной инженерной практике широко используются неоднородные тонкостенные конструкции. Сложная природа явлений, возникающих при деформации неоднородных конструкций, приводит к созданию многих прикладных теорий, каждая из которых построена на основе определенной системы гипотез. Несмотря на существование целого ряда прикладных теорий слоистых оболочек, области их применимости мало изучены. Сам факт существования различных прикладных теорий для слоистых оболочек ставит задачу их критического анализа на основе строгого математического подхода. Вопросы, связанные с изучением напряженно-деформированного состояния для слоистых конструкций, могут быть корректно решены только в рамках теории упругости. Вместе с этим требуется дальнейшее развитие методов решения трехмерных задач неоднородных оболочек, наиболее адекватно учитывающих и механическую, и геометрическую структуру.

В статье изучается задача кручения радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочки.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу кручения радиально-неоднородного трансверсально-изотропного сферического слоя. Обозначим через $\Gamma = \{r \in [r_1, r_2]; \theta \in [\theta_1, \theta_2]; \varphi \in [0, 2\pi]\}$ область, занятую оболочкой (r, θ, φ – сферические координаты). Будем считать, что модули сдвига $G = G(r)$, $G_1 = G_1(r)$ – произвольные положительные кусочно-непрерывные функции переменной r .

Уравнения равновесия в перемещениях при отсутствии массовых сил имеет вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[G_1 \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \right] + \frac{3G_1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) + \frac{G}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} u_\varphi \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь $u_\varphi = u_\varphi(r; \theta)$ – компонента вектора смещения.

Предположим, что лицевые поверхности свободны от напряжений

$$\sigma_{r\varphi} = G_1(r) \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \bigg|_{r=r_s} = 0, \quad (2)$$

а на конических поверхностях (торцах)

$$\sigma_{\theta\varphi} = \frac{G(r)}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) \Big|_{\theta=\theta_s} = f_s(r), \quad (s=1,2), \quad (3)$$

где $f_s(r)$ – достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям равновесия.

Решение (1) отыщем в виде

$$u_\varphi(r; \theta) = v(r) m(\theta), \quad (4)$$

где $m(\theta)$ – решение уравнения Лежандра [2],

$$m''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta m'(\theta) + \left(z^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) m(\theta) = 0. \quad (5)$$

После подстановки (4) в (1), (2) с учетом (5) имеем:

$$\begin{cases} \left[G_1(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' + \frac{3G_1(r)}{r} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) + \\ + \frac{G(r)}{r^2} \left(\frac{9}{4} - z^2 \right) v(r) = 0, \\ G_1(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big|_{r=r_s} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

(6), (7) представим в следующем виде

$$Av = \lambda v, \quad (8)$$

где

$$Av = \left\{ -\frac{r^2}{G(r)} \left[G_1(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' - \frac{3rG_1(r)}{G(r)} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right); \right. \\ \left. G_1(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big|_{r=r_s} = 0 \right\}, \quad \lambda = \frac{9}{4} - z^2.$$

Введем гильбертово пространство H со скалярным произведением

$$(u, w)_H = \int_{r_1}^{r_2} Guwdr.$$

Лемма. Оператор $A: H \rightarrow H$ неотрицателен.

Доказательство. После интегрирования по частям и учета условий (7) получаем

$$(Av, v)_H = \int_{r_1}^{r_2} G_1(r) \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)^2 r^2 dr \geq 0. \quad (9)$$

Из (9) вытекает доказательство утверждения леммы.

Ненулевые собственные значения оператора A $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, множество собственных функций $\{v_k\}_{k=0}^\infty$ образует ортогональный базис пространства H , т. е.

$$(v_k, v_t)_H = d_k \delta_{kt}, \quad d_k = (v_k, v_k)_H = \int_{r_1}^{r_2} G(r) v_k^2(r) dr, \quad (10)$$

и для всех $v \in H$ справедливо представление

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k, \quad c_k = \frac{(v, v_k)_H}{d_k}.$$

При этом $\lambda = \lambda_0 = 0$ – собственное значение оператора $A: H \rightarrow H$, и ему соответствует собственная функция $v_0(r) = r$.

Выражение

$$u_{\varphi k}(r, \theta) = m_k(\theta) v_k(r) \quad (11)$$

считаем элементарным решением. Отметим, что

$$m_0 = A_0 \sin \theta + B_0 \left(\frac{1}{2} \sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (12)$$

$$m_k = A_k P_{z_k-1/2}^1(\cos \theta) + B_k Q_{z_k-1/2}^1(\cos \theta), \quad (13)$$

где $z_k = \sqrt{9/4 - \lambda_k}$; $P_{z_k-1/2}^1(\cos \theta)$, $Q_{z_k-1/2}^1(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра первого и второго рода, соответственно; A_k, B_k – произвольные постоянные.

Любое решение (1), удовлетворяющее граничным условиям (2), можно представить в виде

$$u_{\varphi}(r, \theta) = u_{\varphi 0}(r, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{\varphi k}(r, \theta). \quad (14)$$

На основании (11)-(14) имеем

$$\sigma_{\theta\varphi} = -\frac{2G(r)}{\sin^2 \theta} B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(r)}{r} v_k(r) (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta), \quad (15)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} G_1(r) \left(v'_k(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) m_k(\theta). \quad (16)$$

Из (15), (16) видно, что постоянная A_0 соответствует перемещению сферы как абсолютно твердого тела. Поэтому можно считать $A_0 = 0$.

Докажем, что постоянная B_0 при отсутствии внешних усилий на боковых поверхностях пропорциональна крутящим моментам $M_{\text{кр}}$ напряжений, действующим в сечении $\theta = \text{const}$.

Отметим, что

$$M_{\text{кр}} = 2\pi \sin^2 \theta \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta\varphi} r^2 dr. \quad (17)$$

Подставляя (15) в (17), получаем

$$M_{\text{кр}} = -4\pi B_0 \int_{r_1}^{r_2} r^2 G(r) dr + 2\pi \sin^2 \theta \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{r_1}^{r_2} r G(r) v_k(r) dr \right) (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta). \quad (18)$$

Умножая обе части (6) на r^3 и интегрируя полученное в $[r_1, r_2]$, имеем

$$\left(z_k^2 - \frac{9}{4} \right) \int_{r_1}^{r_2} r G(r) v_k(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} r^3 \left[\left(G_1(r) \left(v'_k(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) \right)' + \frac{3G_1(r)}{r} \left(v'_k(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) \right] dr. \quad (19)$$

С помощью интегрирования по частям и с использованием граничного условия (7) из (19) получаем

$$\int_{r_1}^{r_2} r G(r) v_k(r) dr = 0. \quad (20)$$

После подстановки (20) в (18) получаем

$$M_{кр} = -4\pi B_0 \int_{r_1}^{r_2} r^2 G(r) dr. \quad (21)$$

Подставляя (15) в (3) и умножая скалярно на v_t ($t = 1, 2, \dots$) при учете условий (10), имеем

$$\left(m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta \right) \Big|_{\theta=0_s} = \frac{1}{d_k} \int_{r_1}^{r_2} r f_s(r) v_k(r) dr - \frac{M_{кр}}{2\pi d_0 d_k \sin^2 \theta_s} \int_{r_1}^{r_2} r G(r) v_k(r) dr. \quad (22)$$

Постоянные A_k, B_k определяются из системы (22).

Рассмотрим несколько частных случаев зависимости упругих характеристик от r .

Квадратичная зависимость. Допустим, у сферической оболочки малой толщины модули сдвига заданы в виде функций

$$G(r) = g_0 r^2; \quad G_1(r) = g_1 r^2, \quad (23)$$

где g_0, g_1 – постоянные.

С учетом зависимостей (23) из (6), (7) имеем

$$\begin{cases} r^2 v''(r) + 4r v'(r) + \left[\frac{g_0}{g_1} \left(\frac{9}{4} - z^2 \right) - 4 \right] v(r) = 0, \\ \left(r^2 v'(r) - r v(r) \right) \Big|_{r=r_s} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

$$\quad (25)$$

Общее решение (24) имеет вид:

$$v(r) = D_1 r^{-\left(t+\frac{3}{2}\right)} + D_2 r^{t-\frac{3}{2}}, \quad (26)$$

где D_1, D_2 – произвольные постоянные, $t = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{g_0}{g_1} \left(z^2 - \frac{9}{4} \right)}$.

С помощью (26) удовлетворяя граничным условиям (25), относительно D_1 и D_2 получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений. Из условия существования нетривиальных решений этой системы имеем характеристическое уравнение:

$$\Delta_1(z, \varepsilon) = \left(\frac{9}{4} - z^2 \right) \operatorname{sh} \left(\varepsilon \sqrt{25 + \frac{g_0}{g_1} (4z^2 - 9)} \right) = 0. \quad (27)$$

Здесь $\varepsilon = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$ – малый параметр, характеризующий толщину сферической оболочки.

Проведем анализ корней уравнения (27).

Функция $\Delta_1(z, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет две группы нулей со следующими асимптотическими свойствами:

- первая состоит из нулей $z_0^\pm = \pm \frac{3}{2}$;
- вторая состоит из счетного множества нулей:

$$z_k = \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{g_1}{4g_0} \left(25 + \frac{\pi^2 k^2}{\varepsilon^2} \right)}, \quad (28)$$

которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности.

Определим перемещения и напряжения, соответствующие нулям $z_0^\pm = \pm \frac{3}{2}$,

$$u_\varphi^{(1)}(r, \theta) = D_0 r \left(\frac{1}{2} \sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (29)$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{\theta\varphi}^{(1)} = -\frac{2D_0 g_0 r^2}{\sin^2 \theta}. \quad (30)$$

Перемещения и напряжения, соответствующие второй группе нулей, имеют вид

$$u_\varphi^{(2)}(r; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-3/2} \left[-\frac{\pi k}{\varepsilon} \cos \left(\frac{\pi k}{2\varepsilon} \ln \left(\frac{r_2}{r} \right) \right) + 5 \sin \left(\frac{\pi k}{2\varepsilon} \ln \left(\frac{r_2}{r} \right) \right) \right] m_k(\theta),$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} g_1 r^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{25}{2} + \frac{\pi^2 k^2}{2\varepsilon^2} \right) \sin \left(\frac{\pi k}{2\varepsilon} \ln \left(\frac{r}{r_2} \right) \right) m_k(\theta), \quad (31)$$

$$\sigma_{\theta\varphi}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} g_0 r^{-\frac{1}{2}} \left[5 \sin \left(\frac{\pi k}{2\varepsilon} \ln \left(\frac{r_2}{r} \right) \right) - \frac{\pi k}{\varepsilon} \cos \left(\frac{\pi k}{2\varepsilon} \ln \left(\frac{r_2}{r} \right) \right) \right] (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta).$$

(29), (30) определяют внутреннее напряженно-деформированное состояние оболочки. Постоянная D_0 , входящая в (29), (30), пропорциональна крутящему моменту $M_{кр}$ напряжений, действующих в сечении $\theta = \text{const}$. Таким образом

$$M_{кр} = -\frac{4\pi g_0 (r_2^5 - r_1^5)}{5} D_0.$$

Для второй группы корней главный член асимптотического решения уравнения (5) имеет вид

$$m_k(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{g_1 \pi^2 k^2}{4g_0} \right)^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \exp \left(-\frac{\pi k}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{g_1}{g_0}} (\theta - \theta_1) \right) (1 + O(\varepsilon)); \\ \text{в окрестности } \theta = \theta_1; \\ \left(\frac{g_1 \pi^2 k^2}{4g_0} \right)^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \exp \left(\frac{\pi k}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{g_1}{g_0}} (\theta - \theta_2) \right) (1 + O(\varepsilon)); \\ \text{в окрестности } \theta = \theta_2. \end{cases} \quad (32)$$

Напряженное состояние, соответствующее второй группе решений, имеет характер пограничного слоя.

Из (32) видно, что в отличие от изотропной оболочки при фиксированных значениях k и при больших значениях $\sqrt{\frac{g_0}{g_1}}$ (сильная анизотропия) некоторые погранслойные решения не обладают свойством затухания и могут проникать глубоко и существенно менять картину напряженно-деформированного состояния вдали от торцов [3-6].

Линейная зависимость. Допустим модули сдвига заданы в виде:

$$G(r) = g_0 r; \quad G_1(r) = g_1 r, \quad (33)$$

где g_0, g_1 – постоянные.

С учетом (33) из (6), (7) имеем

$$\begin{cases} r^2 v''(r) + 3rv'(r) + \left[\frac{g_0}{g_1} \left(\frac{9}{4} - z^2 \right) - 3 \right] v(r) = 0, \\ (rv'(r) - v(r))|_{r=r_s} = 0. \end{cases} \quad (34)$$

$$(35)$$

Решение (34) имеет вид

$$v(r) = D_3 r^{p-1} + D_4 r^{-(p+1)}, \quad (36)$$

где D_3, D_4 – произвольные постоянные; $p = \sqrt{4 + \frac{g_0}{g_1} \left(z^2 - \frac{9}{4} \right)}$.

С помощью (36) удовлетворяя граничным условиям (35), получаем характеристическое уравнение:

$$\Delta_2(z; \varepsilon) = \left(z^2 - \frac{9}{4} \right) \operatorname{sh} \left(\varepsilon \sqrt{16 + \frac{g_0}{g_1} (4z^2 - 9)} \right) = 0. \quad (37)$$

Уравнение (37) имеет две группы корней:

– первая состоит из корней $z_0^\pm = \pm \frac{3}{2}$, которые не зависят от ε ;

– вторая состоит из счетного множества корней

$$z_k = \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{g_1}{g_0} \left(4 + \frac{\pi^2 k^2}{4\varepsilon^2} \right)}, \quad (38)$$

которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности.

Перемещение и напряжения, соответствующие корню $z_0^\pm = \pm \frac{3}{2}$, имеют вид

$$u_\varphi^{(1)}(r, \theta) = E_0 r \left(\frac{1}{2} \sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (39)$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{\varphi\theta} = -\frac{2E_0 g_0 r}{\sin^2 \theta}. \quad (40)$$

Формулы (39), (40) определяют внутреннее напряженно-деформированное состояние оболочки. Постоянная E_0 пропорциональна крутящему моменту $M_{кр}$ напряжений, действующих в сечении $\theta = \text{const}$, таким образом,

$$M_{кр} = -\pi g_0 (r_2^4 - r_1^4) E_0.$$

Перемещение и напряжения, соответствующие второй группе корней, по своей структуре имеют вид (31) и соответствующее напряженное состояние имеет характер пограничного слоя.

Заключение. Решения, соответствующие корню $z_0^\pm = \pm \frac{3}{2}$, определяют внутреннее напряженно-деформированное состояние оболочки. Напряженное состояние, соответствующее второй группе корней, с порядком $O(\varepsilon^{-1})$ имеет характер пограничного слоя. В случае «сильной анизотропии» некоторые погранслойные решения не затухают, могут проникать достаточно глубоко и менять картину напряженно-деформированного состояния вдали от торцов.

Библиографический список

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
2. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – 294 с.
3. Боев Н.В. Пространственное напряженно-деформированное состояние трехслойной сферической оболочки / Н.В. Боев, Ю.А. Устинов // Механика твердого тела. – 1985. – № 3. – С. 136–143.
4. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю.А. Устинов. – Ростов н/Д: ЦВВР, 2006. – 257 с.
5. Мехтиев М.Ф. Метод однородных решений в анизотропной теории оболочек / М.Ф. Мехтиев. – Баку: Чашы-оглы, 2009. – 334 с.
6. Ахмедов Н.К. Анализ структуры пограничного слоя в задаче кручения слоистой сферической оболочки / Н.К. Ахмедов, Ю.А. Устинов // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73. – Вып. 3. – С. 416–426.

Материал поступил в редакцию 01.03.11.

References

1. Lehnickii S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela / S.G. Lehnickii. – M.: Nauka, 1977. – 415 s. – In Russian.
2. Beitmen G. Vysshie transcendentnye funktsii / G. Beitmen, A. Erdeii. – M.: Nauka, 1965. – 294 s. – In Russian.
3. Boev N.V. Prostranstvennoe napryajenno-deformirovannoe sostoyanie trehsloinoi sfericheskoi obolochki / N.V. Boev, Y.A. Ustinov // Mehanika tverdogo tela. – 1985. – № 3. – S. 136–143. – In Russian.
4. Ustinov Y.A. Matematicheskaya teoriya poperechno-neodnorodnykh plit / Y.A. Ustinov. – Rostov n/D: CVVR, 2006. – 257 s. – In Russian.
5. Mehtiev M.F. Metod odnorodnykh reshenii v anizotropnoi teorii obolochek / M.F. Mehtiev. – Baku: Chashy-ogly, 2009. – 334 s. – In Russian.
6. Ahmedov N.K. Analiz struktury pogrannichnogo sloya v zadache krucheniya sloistoi sfericheskoi obolochki / N.K. Ahmedov, Y.A. Ustinov // Prikladnaya matematika i mehanika. – 2009. – T. 73. – Vyp. 3. – S. 416–426. – In Russian.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTION TO TORSION PROBLEM FOR RADIALLY INHOMOGENEOUS TRANSVERSALLY ISOTROPIC SPHERICAL SHELL

N.K. AKHMEDOV

(Baku State University),

T.B. MAMEDOVA

(Baku Slavonic University)

A torsion problem of the radially inhomogeneous transversally isotropic spherical shell is investigated by the method of homogeneous solutions. Asymptotic expansions of homogeneous solutions are obtained. It is shown that the stress-strain state is composed of the penetrating stress-strain state and the boundary layer character solution. In case of the essential anisotropy, some boundary layer solutions don't possess the damping property, and they may cover the whole area occupied by the shell.

Keywords: *radially inhomogeneous spherical shell, boundary layer, homogeneous solutions.*