

УДК 539.3

МНОГОУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ АНАЛИЗА ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ МНОГОФАКТОРНОМ НАГРУЖЕНИИ

О.Г. ОСЯЕВ, Ю.А. ТАТУРИН, А.М. КОСТИН, А.В. ЖУКОВ

(Ростовский военный институт ракетных войск)

Предложена математическая модель для анализа сложного напряженно-деформированного состояния многослойных несущих конструкций летательных аппаратов, представленная в виде системы уравнений связи параметров нагружения, напряжений и деформаций. Для решения системы уравнений использован комплексный многоуровневый метод решения, позволяющий учесть особенности геометрии конструкции и поведения конструкционных материалов в процессе многофакторного нагружения.

Ключевые слова: длительная прочность, напряженно-деформированное состояние, ползучесть.

Введение. На этапах эксплуатации конструкции летательных аппаратов испытывают комплексное воздействие факторов термосилового нагружения. Особенность механического поведения конструкционных полимерных композитных материалов состоит в том, что при нормальной температуре эксплуатации и сравнительно небольших уровнях напряжений они проявляют свойство ползучести. Поэтому при выполнении прочностных расчетов необходимо учитывать их указанные особенности.

Установлено [1], что закономерности ползучести основных конструкционных полимерных материалов в широком диапазоне напряжений удовлетворительно описываются линейными наследственными уравнениями. В общем случае пространственного теплового и напряженно-деформированного состояния краевая задача линейной наследственной теории ползучести сводится к решению уравнений наследственной термовязкоупругости.

Определение напряженно-деформированного состояния конструкций из полимерных композитов при многофакторном нагружении. На основании принципа соответствия решение задачи наследственной ползучести может быть приведено к решению соответствующей задачи упругости путем замены основных констант вязкоупругости материала соответствующими временными операторами с помощью прямого символического метода Вольтерра, либо применением преобразования Лапласа или Лапласа – Карсона к наследственным интегралам ползучести. Для этой же цели могут быть использованы методы преобразования Фурье или разложения в ряды других видов. Выбор метода зависит от физической модели рассматриваемых процессов и свойств материала конструкций.

Обозначим параметры пространственного теплового и напряженно-деформированного состояния (НДС), к которым применены указанные виды преобразований, верхним индексом «*», а временные операторы вязкоупругости, замещающие соответствующие константы вязкоупругости материалов, – верхней чертой. Представим воздействие внешних статических, динамических сил и тепловых источников в виде вектора полей температур $T^{\pm}$, тепловых потоков $q^{\pm}$, напряжений $\sigma^{\pm}$ и перемещений $u^{\pm}$ на внутренней и наружной поверхностях оболочки корпуса несущей конструкции летательного аппарата:

$$\sigma^{\pm} = \{T^{\pm}, q^{\pm}, \sigma_{13}^{\pm}, \sigma_{23}^{\pm}, \sigma_{33}^{\pm}, u_1^{\pm}, u_2^{\pm}, u_3^{\pm}\}. \quad (1)$$

Рассмотрим многослойную оболочку корпуса несущей конструкции летательного аппарата из вязкоупругих анизотропных материалов, отнесенную к криволинейной ортогональной системе координат x_1, x_2, x_3 . Здесь, наряду с общей системой координат x_1, x_2, x_3 , введена также и ло-

кальная система $x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}$, связанная с каждым слоем k . При этом каждая из поверхностей слоя k $x_{3,k}=0$ совпадает с его срединной поверхностью радиусом R_k^{cp} . Для каждого слоя k многослойной оболочки справедлива система уравнений, которая получается на основе классической системы нелинейных уравнений теории упругости [2] в предположении геометрической линейности деформаций ε_{ij} относительно перемещений u_{ij} и физической нелинейности материала, обусловленной реологическими свойствами полимерных композитов. С учетом рассмотренных преобразований, исходную систему уравнений представим в тензорном виде:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \bar{E} e_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где X_i – вектор объемных сил; $\bar{E}$ – операторный модуль вязкоупругости; e_{ij} – деформация.

Для перехода от уравнений равновесия к уравнениям движения компоненты вектора объемных сил представим выражением:

$$\bar{X}_i = X_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (3) и принимая параметр преобразования $p = \lambda$, где λ – эмпирическая константа материала,

при начальных условиях

$$u = u \Big|_{t=0}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} \quad (4)$$

получаем:

$$\bar{X}_i^* = X_i^* - \rho \left(\lambda^2 u^* - \lambda u \Big|_{t=0} - \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Учитывая особенности геометрии формы конструкций оболочек с использованием коэффициентов Ламе H_1, H_2, H_3 , исходную систему уравнений, справедливую для каждого слоя k многослойной оболочки, с учетом выражений (3)-(5), запишем в следующем виде:

– уравнения движения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 \sigma_{11}^*) - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \sigma_{22}^* + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_1 \sigma_{12}^*) + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \sigma_{12}^* + \frac{\partial}{\partial x_3} (H_1 H_2 \sigma_{13}^*) + \\ & + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \sigma_{13}^* + X_1^* - \rho \left(\lambda^2 u_1^* - \lambda u_1 \Big|_{t=0} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial x_2} (H_1 \sigma_{22}^*) - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \sigma_{11}^* + \frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 \sigma_{12}^*) + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \sigma_{12}^* + \frac{\partial}{\partial x_3} (H_1 H_2 \sigma_{23}^*) + \\ & + H_1 \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \sigma_{23}^* + X_2^* - \rho \left(\lambda^2 u_2^* - \lambda u_2 \Big|_{t=0} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 \sigma_{11}^*) - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \sigma_{22}^* + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_1 \sigma_{23}^*) + \frac{\partial}{\partial x_3} (H_1 H_2 \sigma_{33}^*) - \\ & - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \sigma_{11}^* + X_3^* - \rho \left(\lambda^2 u_3^* - \lambda u_3 \Big|_{t=0} - \frac{\partial u_3}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

– физические уравнения связи напряжений и деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^* &= \frac{1}{E_{11}} \sigma_{11}^* - \frac{\nu_{12}}{E_{22}} \sigma_{22}^* - \frac{\nu_{13}}{E_{33}} \sigma_{33}^*, & \varepsilon_{12}^* &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12}^*, \\ \varepsilon_{22}^* &= \frac{1}{E_{22}} \sigma_{22}^* - \frac{\nu_{12}}{E_{22}} \sigma_{11}^* - \frac{\nu_{23}}{E_{33}} \sigma_{33}^*, & \varepsilon_{13}^* &= \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13}^*, \\ \varepsilon_{33}^* &= \frac{1}{E_{33}} \sigma_{33}^* - \frac{\nu_{13}}{E_{33}} \sigma_{11}^* - \frac{\nu_{23}}{E_{33}} \sigma_{22}^*, & \varepsilon_{23}^* &= \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23}^*.\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь характеристики материала $\bar{E}$ и $\bar{G}$ представляют операторные модули вязкоупругости и вязкого сдвига соответственно, ν – коэффициент Пуассона;

– геометрические уравнения Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^* &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} u_2^* + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} u_3^*, \\ \varepsilon_{22}^* &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} u_3^* + \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} u_1^*, \\ \varepsilon_{33}^* &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3} + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} u_1^* + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} u_2^*, \\ \varepsilon_{12}^* &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1}, \\ \varepsilon_{13}^* &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}, \\ \varepsilon_{23}^* &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3^*}{\partial x_2};\end{aligned}\quad (8)$$

– начальные условия

$$\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}^* \Big|_{t=0}, \quad \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} \right)^* = \left[\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} \right]^* = \rho \bar{\sigma}^* - \bar{\sigma}^* \Big|_{t=0}; \quad (9)$$

– граничные условия

на наружной и внутренней поверхностях пакета слоев:

$$\sigma_{13,1}^* = (\sigma_{13,1}^+)^*, \quad \sigma_{23,1}^* = (\sigma_{23,1}^+)^*, \quad \sigma_{33,1}^* = (\sigma_{33,1}^+)^*, \quad (10)$$

$$\sigma_{13,k}^* = (\sigma_{13,k}^-)^*, \quad \sigma_{23,k}^* = (\sigma_{23,k}^-)^*, \quad \sigma_{33,k}^* = (\sigma_{33,k}^-)^*;$$

поверхностях контакта смежных слоев:

$$u_{i,k}^* = u_{i,k+1}^*, \quad \sigma_{33,k}^* = \sigma_{33,k+1}^*, \quad (11)$$

$$\sigma_{ij,k}^* = \sigma_{ij,k+1}^*, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, K;$$

боковых поверхностях смежных слоев:

$$\begin{aligned}\sigma_{11,k}^* (1 + e_{11,k}^*) + \sigma_{12,k}^* \left(\frac{1}{2} e_{12,k}^* - \vartheta_{33,k}^* \right) &= \hat{\sigma}_{11,k}, \\ \sigma_{11,k}^* \left(\frac{1}{2} e_{12,k}^* + \vartheta_{33,k}^* \right) + \sigma_{12,k}^* (1 + e_{22,k}^*) &= \hat{\sigma}_{12,k}, \\ \sigma_{11,k}^* \left(\frac{1}{2} e_{13,k}^* - \vartheta_{22,k}^* \right) + \sigma_{12,k}^* \left(\frac{1}{2} e_{23,k}^* + \vartheta_{11,k}^* \right) + \sigma_{13,k}^* &= \hat{\sigma}_{13,k}, \\ \sigma_{22,k}^* \left(\frac{1}{2} e_{23,k}^* - \vartheta_{11,k}^* \right) + \sigma_{12,k}^* \left(\frac{1}{2} e_{13,k}^* + \vartheta_{22,k}^* \right) + \sigma_{23,k}^* &= \hat{\sigma}_{23,k}.\end{aligned}\quad (12)$$

Для решения системы уравнений (6)-(12) выберем в качестве неизвестных функции, с помощью которых выражаются условия контакта между слоями.

Компоненты тензоров деформаций, а также слагаемые, содержащие величины углов поворота в уравнениях (12), определяются с помощью известных соотношений нелинейной теории упругости [2]. Решая систему (6)-(8) относительно этих функций, получаем для ортотропной цилиндрической оболочки следующую разрешающую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{13}^*}{\partial x_3} = & -\frac{1}{x_3} \sigma_{13}^* - A_{1,11}^* \frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^2} (\Delta_{1,11}^* + \sigma_{11,0}^*) - \frac{1}{x_3^2} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^2} (\Delta_{3,12}^* + \sigma_{22,0}^*) - \\
 & - \frac{1}{x_3} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_1 \partial x_2} (\Delta_{2,11}^* - \Delta_{3,12}^*) - \frac{1}{x_3} \Delta_{2,11}^* \frac{\partial u_3^*}{\partial x_1} - A_{2,11}^* \frac{\partial T}{\partial x_1} - X_1^* + \\
 & + \rho \left(\lambda^2 u_1^* - \lambda u_1 \Big|_{t=0} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=0} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{23}^*}{\partial x_3} = & -\frac{2}{x_3} \sigma_{23}^* - \frac{1}{x_3} A_{1,22}^* \frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial x_2} - \frac{1}{x_3} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1 \partial x_2} (\Delta_{1,22}^* + \Delta_{3,12}^*) - \\
 & - \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_1^2} (\Delta_{3,12}^* + \sigma_{11,0}^*) - \frac{1}{x_3^2} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_2^2} (\Delta_{2,22}^* + \sigma_{22,0}^*) + \frac{1}{x_3^2} \sigma_{22,0}^* u_2^* - \\
 & - \frac{1}{x_3^2} \frac{\partial u_3^*}{\partial x_2} (\Delta_{2,22}^* + 2\sigma_{22,0}^*) - \frac{1}{x_3} A_{2,22}^* \frac{\partial T}{\partial x_2} - X_2^* + \\
 & + \rho \left(\lambda^2 u_2^* - \lambda u_2 \Big|_{t=0} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{t=0} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial x_3} = & -\frac{\partial \sigma_{13}^*}{\partial x_1} - \frac{1}{x_3} \left(\frac{\partial \sigma_{23}^*}{\partial x_2} + \sigma_{33}^* - A_{1,22}^* \sigma_{33}^* - \Delta_{1,22}^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} - A_{2,22}^* T \right) + \\
 & + \frac{1}{x_3^2} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} (\Delta_{2,22}^* + \sigma_{22,0}^* + \Delta_{2,22}^* u_3^*) - \sigma_{11,0}^* \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1^2} - \frac{1}{x_3^2} \sigma_{22,0}^* \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_2^2} - X_3^* + \\
 & + \rho \left(\lambda^2 u_3^* - \lambda u_3 \Big|_{t=0} - \frac{\partial u_3}{\partial t} \Big|_{t=0} \right), \\
 \frac{\partial u_1^*}{\partial x_3} = & a_{55}^* \sigma_{13}^* - \frac{\partial u_3^*}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2^*}{\partial x_3} = a_{44}^* \sigma_{23}^* + \frac{1}{x_3} \left(u_2^* - \frac{\partial u_3^*}{\partial x_2} \right), \\
 \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3} = & m_{1,33}^* \sigma_{33}^* + n_{1,33}^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \frac{1}{x_3} n_{2,33}^* \left(u_3^* + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \right) + m_{2,33}^* T.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Напряжения σ_{11}^* , σ_{12}^* , σ_{23}^* определяются с помощью физических и геометрических уравнений (7), (8):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^* = & \Delta_{1,11}^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \frac{1}{x_3} \Delta_{2,11}^* \left(u_3^* + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \right) - \sigma_{33}^* (a_{13}^* \Delta_{1,11}^* + a_{23}^* \Delta_{2,11}^*) + A_{2,11}^* T, \\
 \sigma_{12}^* = & \Delta_{3,12}^* \left(\frac{1}{x_3} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} \right), \\
 \sigma_{22}^* = & \Delta_{1,22}^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \frac{1}{x_3} \Delta_{2,22}^* \left(u_3^* + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \right) - \sigma_{33}^* (a_{13}^* \Delta_{1,22}^* + a_{23}^* \Delta_{2,22}^*) + A_{2,22}^* T.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Коэффициенты в уравнениях (13) и (14) определяются следующими соотношениями между физико-механическими и теплофизическими параметрами слоев оболочки корпуса летательного аппарата:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,11}^* &= \frac{a_{22}^* a_{66}^*}{\Delta^*}; \quad \Delta_{2,11}^* = \frac{a_{12}^* a_{66}^*}{\Delta^*}; \quad \Delta_{1,22}^* = \frac{a_{12}^* a_{66}^*}{\Delta^*}; \quad \Delta_{2,22}^* = \frac{a_{11}^* a_{66}^*}{\Delta^*}; \quad \Delta_{3,12}^* = \frac{a_{11}^* a_{22}^* - (a_{12}^*)^2}{\Delta^*}; \\ \Delta^* &= a_{66}^* [a_{11}^* - (a_{22}^*)^*]; \quad A_{1,11}^* = -a_{13}^* \Delta_{1,11}^* - a_{23}^* \Delta_{2,11}^*; \quad A_{1,22}^* = -a_{13}^* \Delta_{1,22}^* - a_{23}^* \Delta_{2,22}^*; \quad A_{2,11}^* = -\alpha_{11}^* \Delta_{1,11}^* - \alpha_{22}^* \Delta_{2,11}^*; \\ A_{2,22}^* &= -\alpha_{11}^* \Delta_{1,22}^* - \alpha_{22}^* \Delta_{2,22}^*; \quad n_{1,33}^* = a_{13}^* \Delta_{1,11}^* + a_{23}^* \Delta_{1,22}^*; \quad n_{2,33}^* = a_{13}^* \Delta_{2,11}^* + a_{23}^* \Delta_{2,22}^*; \\ m_{1,33}^* &= -a_{13}^* n_{1,33}^* - a_{23}^* n_{2,33}^* + a_{33}^*; \quad m_{2,33}^* = -\alpha_{11}^* n_{1,33}^* - \alpha_{22}^* n_{2,33}^* + \alpha_{33}^*; \\ a_{11}^* &= \frac{1}{\bar{E}_{11}}; \quad a_{22}^* = \frac{1}{\bar{E}_{22}}; \quad a_{33}^* = \frac{1}{\bar{E}_{33}}; \quad a_{12}^* = -\frac{\nu_{12}}{\bar{E}_{22}}; \quad a_{13}^* = -\frac{\nu_{13}}{\bar{E}_{33}}; \quad a_{23}^* = -\frac{\nu_{23}}{\bar{E}_{33}}; \\ a_{44}^* &= \frac{1}{\bar{G}_{23}}; \quad a_{55}^* = \frac{1}{\bar{G}_{13}}; \quad a_{66}^* = \frac{1}{\bar{G}_{12}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Представим неизвестные функции $\bar{\sigma}^*$, а также параметры нагрузки $\bar{\sigma}^\pm$ в виде двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} \{u_1^*, \sigma_{13}^*, \sigma_{13}^\pm\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{u_{1,mn}^*, \sigma_{13,mn}^*, \sigma_{13,mn}^\pm\} \cos \frac{m\pi}{l} x_1 \cos nx_2, \\ \{u_2^*, \sigma_{23}^*, \sigma_{23}^\pm\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{u_{2,mn}^*, \sigma_{23,mn}^*, \sigma_{23,mn}^\pm\} \sin \frac{m\pi}{l} x_1 \sin nx_2, \\ \{u_3^*, \sigma_{33}^*, \sigma_{33}^\pm\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{u_{3,mn}^*, \sigma_{33,mn}^*, \sigma_{33,mn}^\pm\} \sin \frac{m\pi}{l} x_1 \cos nx_2; \\ \sigma_{13,mn}^\pm &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \sigma_{13}^\pm \cos \frac{m\pi}{l} x_1 \cos nx_2 dx_1 dx_2, \\ \sigma_{23,mn}^\pm &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \sigma_{23}^\pm \sin \frac{m\pi}{l} x_1 \sin nx_2 dx_1 dx_2, \\ \sigma_{33,mn}^\pm &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \sigma_{33}^\pm \sin \frac{m\pi}{l} x_1 \cos nx_2 dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Производные по времени разложим в конечные разности с шагом Δt :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\sigma}^*}{\partial t^2} &= \frac{2\bar{\sigma}^*(t_s) - 5\bar{\sigma}^*(t_{s-1}) + 4\bar{\sigma}^*(t_{s-2}) - \bar{\sigma}^*(t_{s-3})}{\Delta t^2}, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}^*}{\partial t} &= \frac{3\bar{\sigma}^*(t_s) - 4\bar{\sigma}^*(t_{s-1}) + \bar{\sigma}^*(t_{s-2})}{2\Delta t}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставим разложенные в ряды (16) и конечные разности (18) искомые функции $\bar{\sigma}^*$ в разрешающую систему уравнений (13). Получим систему обыкновенных дифференциальных

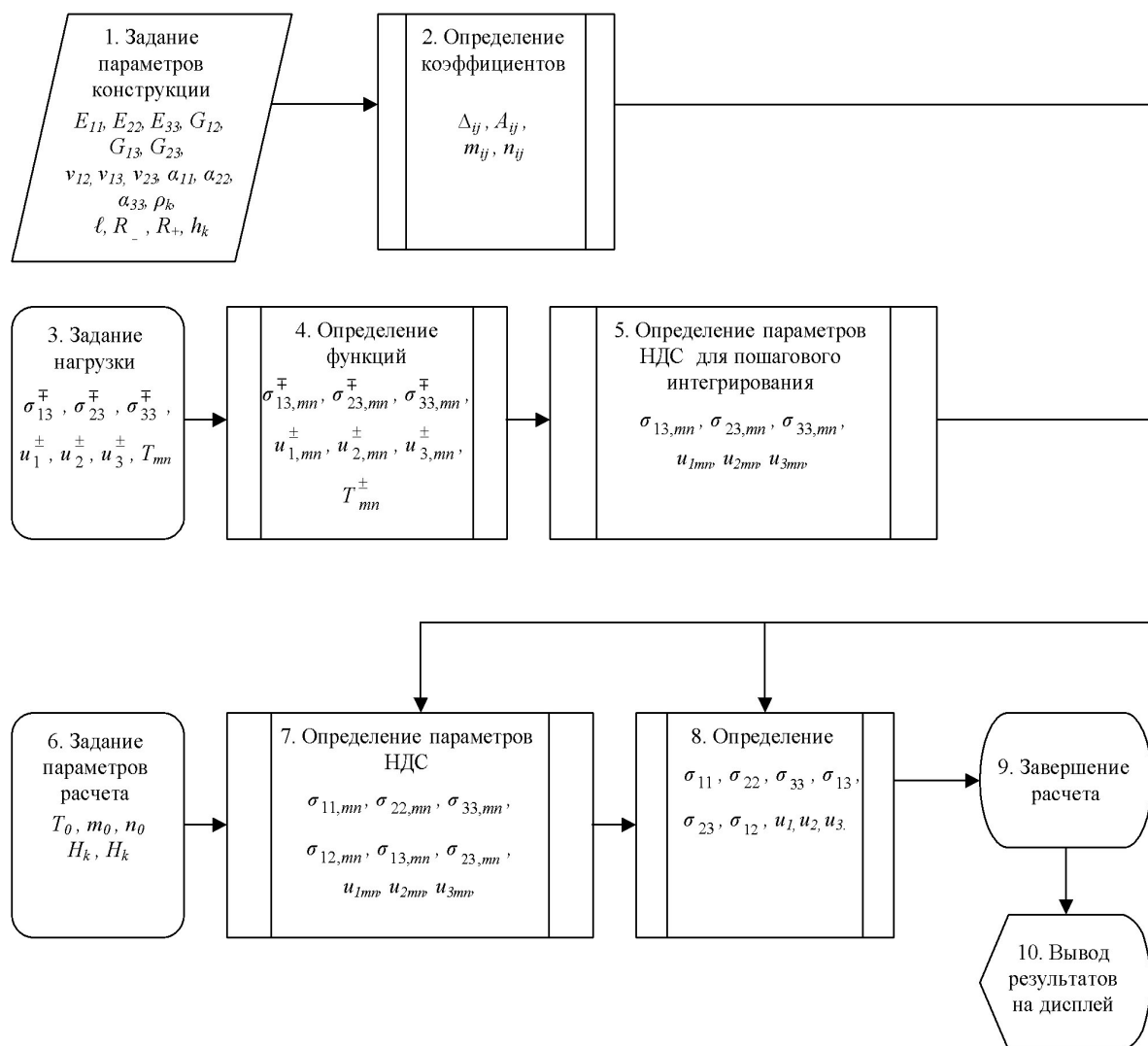
уравнений для каждого временного шага t_s и каждой пары волновых чисел m и n разложения в двойные ряды Фурье соответственно по продольной x_1 и окружной x_2 координатам:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{13}^*(t_s)}{\partial x_3} = & -\frac{\sigma_{13}^*(t_s)}{x_3} - A_{1,11}^* \tilde{\lambda}_m \sigma_{33}^*(t_s) + u_1^*(t_s) \left(\Delta_{1,11}^* \tilde{\lambda}_m^2 + \frac{n^2}{x_3^2} \Delta_{3,12}^* + \sigma_{11,0} \tilde{\lambda}_m^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{n^2}{x_3^2} \sigma_{22,0} \right) - \frac{n}{x_3} \tilde{\lambda}_m u_2^*(t_s) (\Delta_{2,11}^* + \Delta_{3,12}^*) - \frac{1}{x_3} \tilde{\lambda}_m u_3^*(t_s) \Delta_{2,11}^* - A_{2,11}^* \tilde{\lambda}_m T(t_s) - \\
 & - X_1^*(t_s) + \frac{P}{\Delta t^2} [2u_1^*(t_s) - 5u_1^*(t_{s-1}) + 4u_1^*(t_{s-2}) - u_1^*(t_{s-3})]; \\
 \frac{\partial \sigma_{23}^*(t_s)}{\partial x_3} = & -\frac{2\sigma_{23}^*(t_s)}{x_3} + \frac{n}{x_3} A_{1,22}^* \sigma_{33}^*(t_s) - \frac{n}{x_3} \tilde{\lambda}_m u_1^*(t_s) (\Delta_{1,22}^* + \Delta_{3,12}^*) + \\
 & + u_2^*(t_s) \left(\Delta_{3,12}^* \tilde{\lambda}_m^2 + \frac{n^2}{x_3^2} \Delta_{2,22}^* + \sigma_{11,0} \tilde{\lambda}_m^2 + \frac{n^2}{x_3^2} \sigma_{22,0} + \frac{1}{x_3^2} \sigma_{22,0} \right) + \\
 & + \frac{n}{x_3^2} \omega(t_s) (\Delta_{2,22}^* + 2\sigma_{22,0}) + \frac{n}{x_3} A_{2,22}^* T(t_s) - \\
 & - X_2^*(t_s) + \frac{P}{\Delta t^2} [2u_2^*(t_s) - 5u_2^*(t_{s-1}) + 4u_2^*(t_{s-2}) - u_2^*(t_{s-3})]; \\
 \frac{\partial \sigma_{33}^*(t_s)}{\partial x_3} = & \tilde{\lambda}_m \sigma_{13}^*(t_s) - \frac{\sigma_{23}^*(t_s)}{x_3} n + \frac{\sigma_{33}^*(t_s)}{x_3} (A_{1,22}^* - 1) - \frac{\Delta_{1,22}^*}{x_3} \tilde{\lambda}_m u_1^*(t_s) + \\
 & + \frac{n}{x_3^2} u_2^*(t_s) (\Delta_{2,22}^* + \sigma_{22,0}) + u_3^*(t_s) \left(\frac{1}{x_3^2} \Delta_{2,22}^* + \sigma_{11,0} \tilde{\lambda}_m^2 + \frac{1}{x_3^2} \sigma_{22,0} n^2 \right) + \frac{T(t_s)}{x_3} A_{2,22}^* - \\
 & - X_3^*(t_s) + \frac{P}{\Delta t^2} [2u_3^*(t_s) - 5u_3^*(t_{s-1}) + 4u_3^*(t_{s-2}) - u_3^*(t_{s-3})]; \\
 \frac{\partial u_1^*(t_s)}{\partial x_3} = & a_{55}^* \sigma_{13}^*(t_s) - \tilde{\lambda}_m u_3^*(t_s); \quad \frac{\partial u_2^*(t_s)}{\partial x_3} = a_{44}^* \sigma_{23}^*(t_s) + \frac{1}{x_3} u_2^*(t_s) + \frac{n}{x_3} u_3^*(t_s); \\
 \frac{\partial u_3^*(t_s)}{\partial x_3} = & n_{1,33}^* \sigma_{33}^*(t_s) - n_{1,33}^* \tilde{\lambda}_m u_1^*(t_s) + \frac{n}{x_3} n_{2,33}^* u_2^*(t_s) + \frac{1}{x_3} n_{2,33}^* u_2^*(t_s) + m_{2,33}^* T(t_s).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Решение системы уравнений (19) осуществляется численным методом дискретной ортогонализации [3], который позволяет автоматически удовлетворять граничным условиям контакта слоев оболочки. Статическое напряженно-деформированное состояние оболочки, обусловленное постоянными или медленно изменяющимися нагрузками в процессе эксплуатации, определяется с помощью методов расчета наследственной ползучести [1]. При воздействии динамических нагрузок на рассматриваемую оболочку корпуса, полученные значения $\sigma_{11,0}$ и $\sigma_{22,0}$, характеризующие предыдущее статическое состояние конструкции, используются в качестве параметров предварительного нагружения в уравнениях (19). Результатом решения системы уравнений (19) являются функции $\bar{\sigma}_{i3,mn}^*$. Искомые функции $\bar{\sigma}_{i3}^*$ определяют с помощью выражений (16) путем двойного суммирования $\bar{\sigma}_{i3,mn}^*$. Оставшиеся искомые напряжения σ_{11}^* , σ_{12}^* , σ_{23}^* находят также путем двойного суммирования результатов разложения этих функций, определяемых уравнениями (14), аналогично уравнениям (16):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^* = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{1,11}^* \sigma_{33,mn}^* + \frac{\Delta_{2,11}^*}{x_3} (u_{2,mn}^* n + u_{3,mn}^*) - \Delta_{1,11}^* \tilde{\lambda}_m u_{1,mn}^* \right] \sin \tilde{\lambda}_m x_1 \cos n x_2, \\
 \sigma_{12}^* = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(u_{2,mn}^* \tilde{\lambda}_m - \frac{1}{x_3} u_{1,mn}^* n \right) \cos \tilde{\lambda}_m x_1 \sin n x_2, \\
 \sigma_{22}^* = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{1,22}^* \sigma_{33,mn}^* + \frac{\Delta_{2,22}^*}{x_3} (u_{2,mn}^* n + u_{3,mn}^*) - \Delta_{1,22}^* \tilde{\lambda}_m u_{1,mn}^* \right] \sin \tilde{\lambda}_m x_1 \cos n x_2.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Блок-схема алгоритма решения задачи приведена на рисунке. На первом шаге осуществляется ввод данных о массово-геометрических, физико-механических, теплофизических и деформационных характеристиках материалов и конструкции корпуса летательного аппарата. На втором шаге определяются коэффициенты, учитывающие данные свойства материалов и конструкции, с помощью соотношений (15). Одновременно на шаге 3 выполняется операция задания нагрузки, действующей на конструкцию, выраженной через наружные и внутренние напряжения, перемещения и температуру. Заданные составляющие функций параметров нагружения используются для определения коэффициентов пошагового разложения нагрузки по волновым числам m и n в меридиональном и окружном направлениях соответственно. Для этого используются двойные интегральные выражения для коэффициентов анализа Фурье (17). Далее, на шаге 5 с помощью выражений (16) определяются функции разложения нагрузки и параметров напряженно-деформированного состояния в двойные тригонометрические ряды.



Блок-схема решения задачи

На шестом шаге алгоритма задаются параметры численного интегрирования (начальные значения температуры, волновые числа, число шагов интегрирования по толщине каждого слоя и число точек дискретной ортогонализации). На шаге 7 выполняется решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (19). На шаге 8 определяются искомые полные функции напряжений и перемещений путем двойного суммирования волновых функций (20). Для решения уравнений (19) и (20) используются результаты, полученные на шагах 2, 5 и 6 алгоритма, как показано на блок-схеме (см. рисунок).

Системы уравнений (6)-(20) и рассмотренные методы их решения могут быть использованы для решения физически нелинейных задач термоупругости и термовязкоупругости при многофакторном статическом и динамическом нагружении многослойных оболочек сложных несущих конструкций летательных аппаратов из полимерных композитов в условиях эксплуатации.

Заключение. Представлена математическая модель для анализа сложного напряженно-деформированного состояния многослойных несущих конструкций летательных аппаратов. Решение системы уравнений осуществлено комплексным многоуровневым методом, позволяющим учесть особенности геометрии конструкции и поведения конструкционных материалов при многофакторном нагружении.

Библиографический список

1. Гольденблат И.И. Длительная прочность в машиностроении / И.И. Гольденблат, В.Л. Бажанов, В.А. Копнов. – М.: Машиностроение, 1977. – 248 с.
2. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости / В.В. Новожилов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
3. Григоренко Я.М. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Я.М. Григоренко, А.П. Мукоед. – Киев: Вища шк., 1983. – 226 с.

Материал поступил в редакцию 07.04.2011.

References

1. Gol'denblat I.I. Dlitel'naya prochnost' v mashinostroenii / I.I. Gol'denblat, V.L. Bazhanov, V.A. Kopnov. – M.: Mashinostroenie, 1977. – 248 s. – In Russian.
2. Novozhilov V.V. Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti / V.V. Novozhilov. – M.: Mashinostroenie, 1988. – 288 s. – In Russian.
3. Grigorenko Ya.M. Reshenie nelinejny'x zadach teorii obolochek na E`VM / Ya.M. Grigorenko, A.P. Mukoed. – Kiev: Vy'shha shk., 1983. – 226 s. – In Russian.

ANALYSIS LAYER MODEL OF POLYMER COMPOSITE DESIGN UNDER MULTIFACTOR LOADING

O.G. OSYAEV, Y.A. TATURIN, A.M. KOSTIN, A.V. ZHUKOV

(Rostov Military Institute of Rocket Forces)

A mathematical model is offered for the analysis of complex stress-strain state of the layer load-carrying structures of the aircraft planes. It is presented as sets of the equations of the constraining relations of load parameters, voltages and deformation. The complex multilayered solution method that allows including specific features of the design geometry and behaviour of structural materials through multifactor loading is used for the solution of the systems of the equations.

Keywords: long-term strength, stress-strain state, creeping.