

УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕСМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНОГО ПО ГЛУБИНЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА*

С.М. АЙЗИКОВИЧ, Л.И. КРЕНЕВ

(Донской государственный технический университет)

Предлагается численно-аналитический метод решения несмешанной осесимметричной задачи термоупругости для непрерывно-неоднородного по глубине полупространства при заданных на его поверхности источниках тепла и силовом воздействии. Для решения граничной задачи используется аппарат интегральных преобразований Ханкеля. Приводится анализ влияния изменяющихся по глубине термомеханических параметров в приповерхностном слое на распределение температурного поля, теплового потока и смещение поверхности.

Ключевые слова: термоупругость, непрерывно-неоднородное полупространство, численно-аналитический метод, интегральные преобразования.

1. Постановка граничной квазистатической задачи термоупругости для непрерывно-неоднородного по глубине полупространства при заданных на его поверхности усилиях и источниках. Рассмотрим полупространство, упругие характеристики которого непрерывно меняются с глубиной в пределах прилегающего к поверхности слоя толщиной H , а затем стабилизируются и остаются постоянными (рис. 1). С полупространством свяжем цилиндрическую систему координат (r, ϕ, z) . Обозначим через u, v, w смещения вдоль осей r, ϕ, z , $\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_z, \tau_{r\phi}, \tau_{rz}, \tau_{\phi z}$ – радиальное, угловое, нормальное и тангенциальные напряжения соответственно. Кроме того, введем обозначения для температуры – T , коэффициента теплопроводности – $\lambda_T(z)$, коэффициента линейного расширения – $\alpha_T(z)$, коэффициента теплоемкости – $c_T(z)$. В ненапряженном состоянии температуру полупространства примем равной T_0 и будем анализировать разность температур $\theta = T - T_0$.

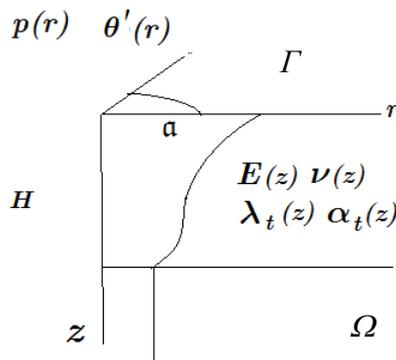


Рис.1. Схема нагружения непрерывно-неоднородного полупространства

Для определения полей перемещений, деформаций, напряжений и температуры в рамках осесимметричной квазистатической несвязанной задачи термоупругости мы имеем следующие уравнения:

* Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (09-08-011410а, 10-08-01296-а, 10-08-90025-Bel-а), ГК № 02.740.11.0413, ГК № 02.740.11.5193, ГК № P1107, АВЦП 2.1.2/10063.

1. Уравнения равновесия неоднородного по глубине полупространства при отсутствии массовых сил, записанные в цилиндрической системе координат:

$$1. \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \sigma_\phi = 0; \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \end{cases} \quad (1.1)$$

$$2. \frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\phi}) + r^2 \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial z} = 0. \quad (1.2)$$

2. Уравнение неоднородной по глубине теплопроводности для температурного поля:

$$\lambda_T(z) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda_T(z)}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} + c_T(z) \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

3. Уравнения связи термоупругих напряжений с деформациями (Дюамеля-Неймана) [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2M(z)\varepsilon_r + \Lambda(z)\varepsilon - 3K(z)\alpha_T(z)\theta, \\ \sigma_\phi &= 2M(z)\varepsilon_\phi + \Lambda(z)\varepsilon - 3K(z)\alpha_T(z)\theta, \\ \sigma_z &= 2M(z)\varepsilon_z + \Lambda(z)\varepsilon - 3K(z)\alpha_T(z)\theta, \\ \tau_{r\phi} &= 2M(z)\varepsilon_{r\phi}, \quad \tau_{rz} = 2M(z)\varepsilon_{rz}, \\ \tau_{\phi z} &= 2M(z)\varepsilon_{\phi z}, \\ 3K(z) &= 3\Lambda(z) + 2M(z), \\ \theta &= T - T_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Выражения для компонент деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\phi z} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Далее предполагается, что как коэффициенты Ламе $M(z)$ и $\Lambda(z)$, так и коэффициенты теплопроводности $\lambda_T(z)$, линейного расширения $\alpha_T(z)$, а также теплоемкости $c_T(z)$ являются непрерывными функциями координаты z , такими, что

$$1. M(z) = M(-H) = M^s, \quad -\infty \leq z \leq -H,$$

$$\begin{aligned} \Lambda(z) &= \Lambda(-H) = \Lambda^s, \quad \lambda_T(z) = \lambda_T(-H) = \lambda_T^s; \\ \alpha_T(z) &= \alpha_T(-H) = \alpha_T^s. \end{aligned}$$

$$2. M(z) = M^C(z), \quad \Lambda(z) = \Lambda^C(z), \quad -H \leq z \leq 0, \quad (1.6)$$

$$\lambda_T(z) = \lambda_T^C(z), \quad \alpha_T(z) = \alpha_T^C(z), \quad c_T(z) = c_T^C(z).$$

$$3. M^C(-H) = M^s, \quad \Lambda^C(-H) = \Lambda^s,$$

$$\lambda_T^C(-H) = \lambda_T^s, \quad \alpha_T^C(-H) = \alpha_T^s, \quad c_T^C(z) = c_T^s(z),$$

где H – толщина неоднородного слоя, сцепленного с подстилающим полупространством, то есть глубина, с которой мы полагаем термомеханические характеристики полупространства постоянными. Индекс S соответствует подстилающему однородному полупространству, а C – неоднородному слою; Λ_* , Λ^* , M_* , M^* , λ_{T*} , λ_T^* , α_{T*} , α_T^* , c_{T*} , c_T^* – произвольные константы.

Наряду с парой коэффициентов Ламе для описания упругого поведения твердого изотропного тела используются: модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν или модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Коэффициенты Ламе Λ и M (иногда обозначаемый G и называемый модулем сдвига) связаны с модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и изотермическим модулем объемного расширения K соотношениями:

$$\begin{aligned} M &= \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad E = \frac{M(2M+3\Lambda)}{M+\Lambda}; \\ \nu &= \frac{\Lambda}{2(M+\Lambda)}; \quad 3K(z) = 3\Lambda(z) + 2M(z). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Запишем на основании (1.4), (1.5) представления для напряжений через смещения и подставим их в уравнения (1.1) – (1.2), получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно перемещений и температуры (уравнения Ламе). Эти уравнения могут быть представлены в форме

$$\left\{ \begin{aligned} &M(z) \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right) + (M(z) + \Lambda(z)) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + M'(z) \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \\ &= k(z) \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ &M(z) \nabla^2 w + (M(z) + \Lambda(z)) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + 2M'(z) \frac{\partial w}{\partial z} + \Lambda'(z) \varepsilon = \\ &= k'(z) \theta + k(z) \theta', \\ &M(z) \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) + M'(z) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \\ &\lambda_T(z) \nabla^2 \theta + \lambda_T'(z) \theta' = 0. \end{aligned} \right. \quad (1.8)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M'(z) &= \frac{dM(z)}{dz}, \quad \Lambda'(z) = \frac{d\Lambda(z)}{dz}, \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \lambda_T'(z) = \frac{d\lambda_T(z)}{dz}, \quad k'(z) = \frac{dk(z)}{dz}, \quad \theta' = \frac{\partial \theta}{\partial z}. \end{aligned}$$

Мы полагаем, что поверхность полупространства нагревается в пределах круга радиусом a непрерывно действующим тепловым потоком. Вне области нагрева поверхность полупространства

теплоизолирована. Предположим также, что внутри круга приложена произвольная нормальная и касательная нагрузка.

$$\begin{aligned}
 \theta'(r, 0) &= -\alpha\beta(r), & r \leq a, \\
 \theta'(r, 0) &= 0, & r > a, \\
 \sigma_z(r, 0) &= -p(r), & 0 \leq r \leq a, \quad z = 0, \\
 \sigma_z(r, 0) &= 0, & a < r < \infty, \quad z = 0, \\
 \tau_{rz}(r, 0) &= -q(r), & 0 \leq r < a, \quad z = 0, \\
 \tau_{rz}(r, 0) &= 0, & a < r < \infty, \quad z = 0, \\
 \tau_{r\phi}(r, 0) &= t(r), & 0 \leq r < a, \quad z = 0, \\
 \tau_{r\phi}(r, 0) &= 0, & a < r < \infty, \quad z = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

Здесь α – коэффициент теплопроводности.

На границе сцепления неоднородного слоя с однородным полупространством при $z = -H$ в силу непрерывности должны выполняться условия сопряжения по смещениям, напряжениям, температуре и тепловому потоку.

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^C(r, -H) &= \sigma_z^S(r, -H), \quad \tau_{rz}^C(r, -H) = \tau_{rz}^S(r, -H), \\
 u^C(r, -H) &= u^S(r, -H), \quad w^C(r, -H) = w^S(r, -H), \\
 \theta^C(r, -H) &= \theta^S(r, -H), \quad (\theta^C)'(r, -H) = (\theta^S)'(r, -H).
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

На бесконечности при $(r, -z) \rightarrow \infty$ смещения, деформации и напряжения исчезают. Значения разности температур и теплового потока при этом также стремятся к нулю.

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(u, w, \varepsilon_r, \varepsilon_\phi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}, \sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_z, \tau_{rz}, \theta, \theta' \right) &= 0, \\
 \lim_{z \rightarrow \infty} \left(u, w, \varepsilon_r, \varepsilon_\phi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}, \sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_z, \tau_{rz}, \theta, \theta' \right) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

Таким образом, мы сформулировали первую граничную квазистатическую осесимметричную термоупругую задачу для неоднородного полупространства: найти смещения, деформации, напряжения и распределение температуры внутри полупространства, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (1.8) при заданных граничных условиях и распределении воздействий на границе (1.9) – (1.11).

2. Построение фундаментального решения квазистатической осесимметричной термоупругой задачи для неоднородного по глубине полупространства. Будем разыскивать решение для смещений u , v и w и температуры θ в виде интегралов Ханкеля [2]:

$$\begin{aligned}
 u(r, z) &= -\int_0^\infty U(\gamma, z) J_1(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad v(r, z) = \int_0^\infty V(\gamma, z) J_1(\gamma r) \gamma d\gamma, \\
 w(r, z) &= \int_0^\infty W(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad \theta(r, z) = \int_0^\infty T(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Подставим (2.1) в систему дифференциальных уравнений в частных производных (1.8) и, приравняв к нулю подынтегральные выражения, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} MU'' + \gamma(M + \Lambda)W' - \gamma^2(2M + \Lambda)U + M'U' + \gamma M'W = k\gamma T, \\ (2M + \Lambda)W'' - \gamma(M + \Lambda)U' - \gamma^2 MW + (2M' + \Lambda')W' - \gamma\Lambda'U = \\ = k'T + kT', \\ MV'' + M'V' - \gamma^2 MV = 0, \\ \lambda_T^C(z)(T^C)'' - \gamma^2 \lambda_T^C(z)T^C + (\lambda_T^C)'(z)(T^C)' = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

(здесь ' указывает на дифференцирование по z).

В системе дифференциальных уравнений (2.2) третье уравнение не связано с остальными, и его решение здесь рассматривать не будем.

Граничные условия (1.9) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} (2M(0) + \Lambda(0))W'(\gamma, 0) - \gamma\Lambda(0)U(\gamma, 0) - k(0)T(\gamma, 0) &= -P(\gamma), \\ M(0)(\gamma W(\gamma, 0) + U'(\gamma, 0)) &= Q(\gamma), \\ T'(\gamma, 0) &= -\alpha B(\gamma), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$P(\gamma) = \int_0^\infty p(\rho)J_0(\rho\gamma)\rho d\rho, \quad Q(\gamma) = \int_0^\infty q(\rho)J_1(\rho\gamma)\rho d\rho,$$

$$B(\gamma) = \int_0^\infty \beta(\rho)J_0(\rho\gamma)\rho d\rho.$$

Используя векторное представление для трансформант

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \\ x_1 &= U, \quad x_2 = U', \quad x_3 = W, \quad x_4 = W', \\ x_5 &= T, \quad x_6 = T', \end{aligned} \quad (2.4)$$

запишем систему (2.2) с исключенным третьим уравнением в матричном виде, при этом явно выделим части, соответствующие покрытию и подложке:

$$\frac{d\mathbf{x}^C}{dz} = \mathbf{A}^C \mathbf{x}^C, \quad -H \leq z \leq 0. \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A}^C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma^2 \frac{2M + \Lambda}{M} & -\frac{M'}{M} & -\gamma \frac{M'}{M} & -\gamma \frac{M + \Lambda}{M} & \frac{\gamma k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma \frac{\Lambda'}{2M + \Lambda} & \gamma \frac{M + \Lambda}{2M + \Lambda} & \gamma^2 \frac{M}{2M + \Lambda} & -\frac{2M' + \Lambda'}{2M + \Lambda} & \frac{k'}{2M + \Lambda} & \frac{k}{2M + \Lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 & -\frac{\lambda_T^{C'}}{\lambda_T^C} \end{pmatrix};$$

$$\frac{d\mathbf{x}^S}{dz} = \mathbf{A}^S \mathbf{x}^S, \quad -\infty < z \leq -H. \quad (2.6)$$

$$A^S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma^2 \frac{2M + \Lambda}{M} & 0 & 0 & -\gamma \frac{M + \Lambda}{M} & \frac{\gamma k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \frac{M + \Lambda}{2M + \Lambda} & \gamma^2 \frac{M}{2M + \Lambda} & 0 & 0 & \frac{k}{2M + \Lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия при этом имеют вид:

$$\begin{aligned} (2M(0) + \Lambda(0))x_4^C(\gamma, 0) - \gamma\Lambda(0)x_1^C(\gamma, 0) - k(0)x_5^C &= -P(\gamma), \\ M(0) \left(\gamma x_3^C(\gamma, 0) + x_2^C(\gamma, 0) \right) &= Q(\gamma), \\ x_6^C(\gamma, 0) &= -\alpha B(\gamma); \\ x_1^C(\gamma, 0) &= x_1^S(\gamma, -H), \quad x_3^C(\gamma, 0) = x_3^S(\gamma, -H), \\ x_2^C(\gamma, 0) &= x_2^S(\gamma, -H), \quad x_4^C(\gamma, 0) = x_4^S(\gamma, -H), \\ x_5^C(\gamma, 0) &= x_5^S(\gamma, -H), \quad x_6^C(\gamma, 0) = x_6^S(\gamma, -H). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Необходимо отметить, что последнее условие имеет место в силу непрерывности изменения свойств слоя и основания (1.5).

Общее решение системы (2.2) для однородного полупространства $\Lambda' = M' = K' = \lambda_T' = 0$, $M > 0$, $\Lambda > 0$, $K > 0$, $\lambda_T > 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1^S(\gamma, z) &= \left(d_1 + \gamma z d_2 + (-\kappa_2 + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z) d_3 \right) e^{\gamma z}, \\ x_2^S(\gamma, z) &= \left(d_1 + (1 + \gamma z) d_2 + (\kappa_3 / \gamma + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z) d_3 \right) \gamma e^{\gamma z}, \\ x_3^S(\gamma, z) &= \left(d_1 + (-\kappa_1 + \gamma z) d_2 + \left(-\frac{\kappa_3}{\gamma} + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z \right) d_3 \right) e^{\gamma z}, \\ x_4^S(\gamma, z) &= \left(d_1 + (1 - \kappa_1 + \gamma z) d_2 + (\kappa_2 + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z) d_3 \right) \gamma e^{\gamma z}, \\ x_5^S(\gamma, z) &= d_3 e^{\gamma z}, \quad x_6^S(\gamma, z) = \gamma d_3 e^{\gamma z}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\kappa_1 = \frac{\Lambda + 3M}{\Lambda + M}, \quad \kappa_2 = \frac{k}{2(2M + \Lambda)}, \quad \kappa_3 = \frac{k}{2M},$$

где $d_i (i=1,2,3)$ – произвольная функция параметра γ .

Решение $x^C(\gamma, z)$ системы дифференциальных уравнений (2.5) строится методом модулирующих функций. Будем искать $x^C(\gamma, z)$ в виде

$$x^C(\gamma, z) = \sum_{i=1}^3 d_i(\gamma) \mathbf{a}_i(\gamma, z) e^{\gamma z}. \quad (2.9)$$

Векторы $\mathbf{a}_i(\gamma, z)$, ($i = 1, 2, 3$) определяются из решения следующей задачи Коши:

$$\frac{d\mathbf{a}_i}{dz} = \mathbf{A}^C \mathbf{a}_i - \gamma \mathbf{a}_i, \quad -H \leq z \leq 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

При начальных условиях для $z = -H$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(\gamma, z) \Big|_{z=-H} &= (1, \gamma, 1, \gamma, 0, 0); \\ \mathbf{a}_2(\gamma, z) \Big|_{z=-H} &= (\gamma z, \gamma + \gamma^2 z, -\kappa_1 + \gamma z, \gamma - \kappa_1 \gamma + \gamma^2 z, 0, 0) \Big|_{z=-H}; \\ \mathbf{a}_3(\gamma, z) \Big|_{z=-H} &= (-\kappa_2 + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z, \kappa_3 / \gamma + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z, \\ &\quad -\frac{\kappa_3}{\gamma} + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z, \kappa_2 + \kappa_3 z + \kappa_2 \gamma z, 1, \gamma) \Big|_{z=-H}. \end{aligned}$$

Константы $d_i(\gamma)$ ($i = 1, 2, 3$) определяются из условия (2.7). Таким образом, мы имеем:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 d_i(\gamma) N_i(\gamma) = -P(\gamma), \\ \sum_{i=1}^3 d_i(\gamma) M_i(\gamma) = Q(\gamma), \\ \sum_{i=1}^3 d_i(\gamma) O_i(\gamma) = -\alpha B(\gamma); \end{cases} \quad (2.11)$$

$$N_i(\gamma) = -\Lambda(0) \gamma a_i^1(\gamma, 0) + (\Lambda(0) + 2M(0)) a_i^4(\gamma, 0) - k(0) a_i^5(\gamma, 0),$$

$$M_i(\gamma) = M(0) a_i^2(\gamma, 0) + M(0) \gamma a_i^3(\gamma, 0),$$

$$O_i(\gamma) = a_i^6(\gamma, 0), \quad O_1(\gamma) = O_2(\gamma) = 0,$$

где $a_i^k(\gamma, z)$, ($i = 1, 2, 3$) обозначает k -ю компоненту вектора $\mathbf{a}_i(\gamma, z)$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$$\begin{aligned} d_1 &= -k_2^1(\gamma) P(\gamma) - k_2^2(\gamma) Q(\gamma) + k_2^3(\gamma) \alpha B(\gamma), \\ d_2 &= k_1^1(\gamma) P(\gamma) + k_1^2(\gamma) Q(\gamma) + k_1^3(\gamma) \alpha B(\gamma), \\ d_3 &= \frac{1}{O_3(\gamma)} \alpha B, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$k_2^1(\gamma) = \frac{M_2(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)}, \quad k_2^2(\gamma) = \frac{N_2(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)}, \quad k_2^3(\gamma) = \frac{\Delta_{23}(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)} \frac{1}{O_3(\gamma)},$$

$$k_1^1(\gamma) = \frac{M_1(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)}, \quad k_1^2(\gamma) = \frac{N_1(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)}, \quad k_1^3(\gamma) = \frac{\Delta_{13}(\gamma)}{\Delta_{12}(\gamma)} \frac{1}{O_3(\gamma)},$$

$$\Delta_{ij}(\gamma) = N_i(\gamma)M_j(\gamma) - N_j(\gamma)M_i(\gamma).$$

Окончательно получаем следующее выражение для компонент вектора решения $\mathbf{x}^C(\gamma, z)$ при $z \geq -H$:

$$\begin{aligned} x_1 &= U(\gamma, z) = (L_1^1(\gamma, z)P(\gamma) + L_2^1(\gamma, z)Q(\gamma) + L_3^1(\gamma, z)\alpha B(\gamma))e^{\gamma z} / \gamma, \\ x_2 &= U'(\gamma, z) = (L_1^2(\gamma, z)P(\gamma) + L_2^2(\gamma, z)Q(\gamma) + L_3^2(\gamma, z)\alpha B(\gamma))e^{\gamma z} / \gamma, \\ x_3 &= W(\gamma, z) = (L_1^3(\gamma, z)P(\gamma) + L_2^3(\gamma, z)Q(\gamma) + L_3^3(\gamma, z)\alpha B(\gamma))e^{\gamma z} / \gamma, \\ x_4 &= W'(\gamma, z) = (L_1^4(\gamma, z)P(\gamma) + L_2^4(\gamma, z)Q(\gamma) + L_3^4(\gamma, z)\alpha B(\gamma))e^{\gamma z} / \gamma, \\ x_5 &= T(\gamma, z) = L_3^5(\gamma, z)\alpha B(\gamma)e^{\gamma z} / \gamma, \\ x_6 &= T'(\gamma, z) = L_3^6(\gamma, z)\alpha B(\gamma)e^{\gamma z} / \gamma, \\ L_1^i(\gamma, z) &= (k_1^1(\gamma)a_2^i(\gamma, z) - k_2^1(\gamma)a_1^i(\gamma, z))\gamma, \\ L_2^i(\gamma, z) &= (k_1^2(\gamma)a_2^i(\gamma, z) - k_2^2(\gamma)a_1^i(\gamma, z))\gamma, \\ L_3^i(\gamma, z) &= (k_1^3(\gamma)a_2^i(\gamma, z) + k_2^3(\gamma)a_1^i(\gamma, z) + \frac{a_3^i(\gamma, z)}{O_3(\gamma)})\gamma. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} I_{1i}^k(r, z) &= \int_0^\infty L_1^k(\gamma, z)P(\gamma)e^{\gamma z} J_i(\gamma r) d\gamma, (k=1, 2 \ i=1), (k=3, 4 \ i=0), \\ I_{2i}^k(r, z) &= \int_0^\infty L_2^k(\gamma, z)Q(\gamma)e^{\gamma z} J_i(\gamma r) d\gamma, (k=1, 2 \ i=1), (k=3, 4 \ i=0), \\ I_{3i}^k(r, z) &= \int_0^\infty L_3^k(\gamma, z)\alpha B(\gamma)e^{\gamma z} J_i(\gamma r) d\gamma, (k=1, 2 \ i=1), (k=3, 4, 5, 6 \ i=0), \\ J_{1i}^k(r, z) &= \int_0^\infty L_1^k(\gamma, z)P(\gamma)e^{\gamma z} J_i(\gamma r) \gamma d\gamma, (k=2 \ i=0), (k=4 \ i=1), \\ J_{2i}^k(r, z) &= \int_0^\infty L_2^k(\gamma, z)Q(\gamma)e^{\gamma z} J_i(\gamma r) \gamma d\gamma, (k=2 \ i=0), (k=4 \ i=1), \\ J_{3i}^k(r, z) &= \int_0^\infty L_3^k(\gamma, z)\alpha B(\gamma)e^{\gamma z} J_i(\gamma r) \gamma d\gamma, (k=2 \ i=0), (k=4 \ i=1). \end{aligned} \tag{2.14}$$

В соответствии с (1.4) – (1.5) мы можем теперь выписать выражения для смещений, температуры, теплового потока и деформаций:

$$\begin{aligned}
 u(r, z) &= \sum_{i=1}^3 I_{i1}^1(r, z), w(r, z) = \sum_{i=1}^3 I_{i0}^3(r, z), \\
 \theta(r, z) &= I_{30}^5(r, z), \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} = I_{30}^6(r, z), \\
 \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} &= \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z), \varepsilon_z = \frac{\partial w(r, z)}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 I_{i0}^4(r, z), \\
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u(r, z)}{\partial r} = \sum_{i=1}^3 J_{i0}^2(r, z) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z), \\
 \frac{\partial w(r, z)}{\partial r} &= -\sum_{i=1}^3 J_{i1}^4(r, z), \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) - \sum_{i=1}^3 J_{i1}^4(r, z) \right), \\
 \varepsilon &= \sum_{i=1}^3 J_{i0}^2(r, z) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^1(r, z) + \sum_{i=1}^3 I_{i0}^4(r, z),
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

а также для напряжений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= (\Lambda(z) + 2M(z)) \left(\sum_{i=1}^3 J_{i0}^2(r, z) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) \right) + \\
 &+ \Lambda(z) \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^1(r, z) + \sum_{i=1}^3 I_{i0}^4(r, z) \right) - k(z) I_{30}^5(r, z), \\
 \sigma_\phi &= (\Lambda(z) + 2M(z)) \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^1(r, z) + \\
 &+ \Lambda(z) \left(\sum_{i=1}^3 J_{i0}^2(r, z) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) + \sum_{i=1}^3 I_{i0}^4(r, z) \right) - \\
 &- k(z) I_{30}^5(r, z), \\
 \sigma_z &= (\Lambda(z) + 2M(z)) \sum_{i=1}^3 I_{i0}^4(r, z) + \\
 &+ \Lambda(z) \left(\sum_{i=1}^3 J_{i0}^2(r, z) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 I_{i1}^1(r, z) \right) - \\
 &- k(z) I_{30}^5(r, z), \\
 \tau_{rz} &= M(z) \left(\sum_{i=1}^3 I_{i1}^2(r, z) - \sum_{i=1}^3 J_{i1}^4(r, z) \right), \\
 k(z) &= 3K(z) \alpha_T(z).
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

3. Численный анализ решения осесимметричной граничной задачи квазистатической теплопроводности и термоупругости для функционально-градиентного покрытия при заданном на его поверхности постоянном тепловом потоке. Рассмотрим распределение температуры и теплового потока в покрытии, вызванное воздействием равномерного теплового потока с поверхности в пределах круга радиусом a , для некоторых характерных видов неоднородности.

Будем считать, что коэффициент теплопроводности $\lambda_T(z)$ непрерывно изменяется в приповерхностной зоне так, что выполняются соотношения (1.4). В записи граничных условий на поверхности неоднородного полупространства (1.9) полагаем, что усилия отсутствуют, то есть

$p(r)=q(r)=t(r)=0, 0 \leq r < \infty, z=0$, и граничные условия на поверхности и в зоне сцепления неоднородного слоя с подстилающим однородным полупространством имеют вид:

$$\begin{aligned} (\theta^C)'(r,0) &= -\alpha\beta(r), \quad r \leq a; \quad (\theta^C)'(r,0) = 0, \quad r > a, \\ \theta^c(r,-H) &= \theta^s(r,-H); \quad (\theta^c)'(r,-H) = (\theta^s)'(r,-H). \end{aligned} \quad (3.1)$$

На бесконечности при $(r,-z) \rightarrow \infty$ значения разности температур и теплового потока стремятся к нулю, и выполняются соотношения (1.11).

В пункте 2 построено общее решение квазистатической осесимметричной термоупругой задачи для неоднородного полупространства. В развернутом виде формулы для определения распределения температуры и теплового потока в функционально-градиентном покрытии при заданном на поверхности постоянном тепловом потоке можно записать так:

$$\theta(r,z) = \alpha \int_0^a \beta(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_3^5(\gamma,z) e^{\gamma z} J_0(\rho\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \theta(r,z)}{\partial z} = \alpha \int_0^a \beta(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L_3^6(\gamma,z) e^{\gamma z} J_0(\rho\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma.$$

Рассмотрим шесть характерных законов изменения коэффициента теплопроводности $\lambda_T(z)$ в приповерхностном слое (относительно подстилающего однородного полупространства) (рис. 2):

$$\lambda_T(z) = \begin{cases} \lambda_T^C(z) = \lambda_T^S f_i(z), & -H \leq z < 0, \\ \lambda_T^S = const, & -\infty < z \leq -H, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$f_1(z) = 2, \quad f_2(z) = \frac{1}{2}, \quad f_3(z) = 2 + \frac{z}{H}, \quad f_4(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{z}{H},$$

$$f_5(z) = 1 - \sin(z\pi / H), \quad f_6(z) = 1 + \frac{1}{2} \sin(z\pi / H).$$

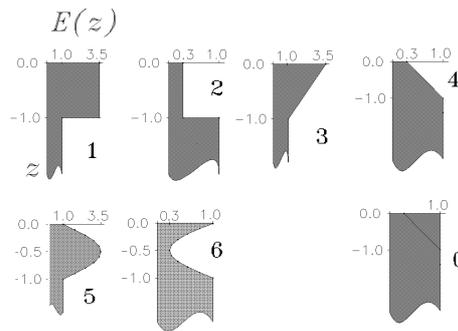


Рис. 2. Схематичное изображение шести видов неоднородности и однородного полупространства

На рис. 3,4 для законов (3.3) представлено изменение вдоль оси симметрии $r=0$ установившегося температурного поля и теплового потока для однородного полупространства.

При изменении коэффициента теплопроводности в 2 раза по сравнению с однородным полупространством температура на поверхности изменяется примерно в 1,5 раза. Видно, что изменение коэффициента теплопроводности влияет только на скорость изменения температуры в теле, однако существенно сказывается на распределении теплового потока в приповерхностном слое.

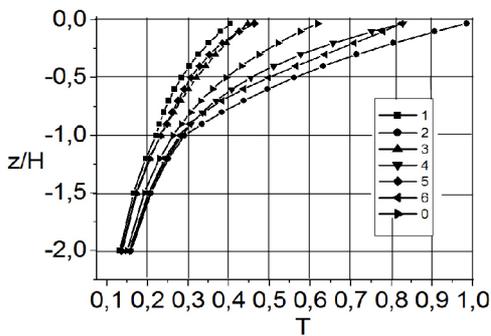


Рис. 3. Изменение температуры для шести видов неоднородности и однородного полупространства

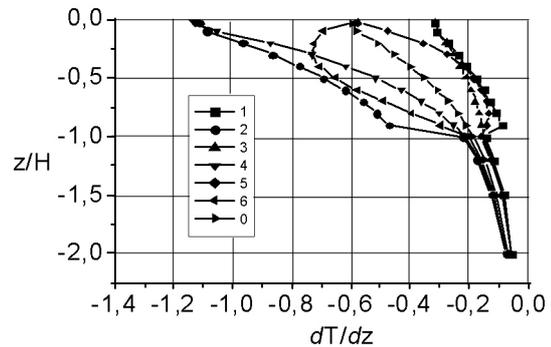


Рис. 4. Изменение теплового потока для шести видов неоднородности и однородного полупространства

На рис. 5 показано изменение вертикального смещения в приповерхностной зоне непрерывно-неоднородного покрытия при воздействии с поверхности постоянного теплового потока в пределах круга единичного радиуса, толщина неоднородного покрытия равна радиусу зоны приложенного воздействия.

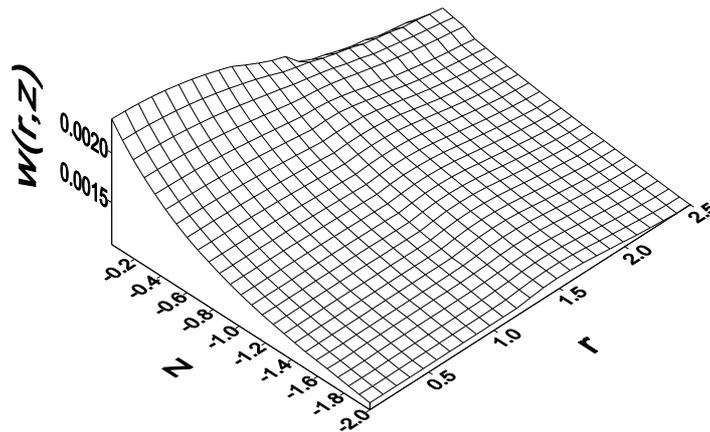


Рис. 5. Смещение поверхности непрерывно-неоднородного полупространства

Величины термомеханических параметров на поверхности покрытия вдвое превышают их значения в подложке и линейно убывают по глубине.

Библиографический список

1. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость / А.Д. Коваленко // Киев: Наукова думка, 1965. – 204 с.
2. Айзикович С.М. Деформирование полупространства с неоднородным упругим покрытием при действии произвольной осесимметричной нагрузки / С.М. Айзикович, И.С. Трубчик, Л.И. Кренев // ПММ. – 2008. – № 72. – С. 461–467.

Материал поступил в редакцию 31.05.11.

References

1. Kovalenko A.D. Vvedenie v termouprugost' / A.D. Kovalenko // Kiev: Naukova dumka, 1965. – 204 s. – In Russian.
2. Ajzikovich S.M. Deformirovanie poluprostranstva s neodnorodny'm uprugim pokry'tiem pri dejstvii proizvol'noj osesimmetrichnoj nagruzki / S.M. Ajzikovich, I.S. Trubchik, L.I. Krenov // PMM. – 2008. – # 72. – S. 461–467. – In Russian.

NUMERICAL ANALYTIC SOLUTION TO UNMIXED AXISYMMETRIC PROBLEMS OF THERMOELASTICITY FOR CONTINUOUS-INHOMOGENEOUS IN DEPTH HALF-SPACE

S.M. AIZIKOVICH, L.I. KRENEV

(Don State Technical University)

The numerical analytic solution to the unmixed axisymmetric problems of thermoelasticity for the continuous-inhomogeneous in depth half-space at the given heat sources and force action on its surface is offered. Hankel integral transform apparatus is used for the solution of the boundary value problem. The impact of variable in depth thermomechanical parameters in the boundary layer on the temperature field distribution, heat flow and face slip is analyzed.

Keywords: thermoelasticity, continuous-inhomogeneous half-space, numerical analytical method, integral transforms.