

УДК 512.64+517.5

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ТЁПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ С СИМВОЛОМ ХАРТВИГА – ФИШЕРА*

А.А. БАТАЛЬЩИКОВ, В.А. СТУКОПИН

(Донской государственный технический университет)

Исследуются матрицы Тёплица с символом типа Хартвига – Фишера. Формулируется и доказывается обобщение теоремы Сегё для нормальных тёплицевых матриц с комплекснозначным символом из класса L_∞ на единичной окружности.

Ключевые слова: тёплицева матрица, символ Хартвига – Фишера, теорема Сегё.

Введение. Тёплицевы (и связанные с ними ганкелевы матрицы) [1, 2] – это один из наиболее важных для приложений классов матриц, появляющийся в задачах фундаментальной математики, теоретической физики, механики, а также в многочисленных инженерных приложениях. Одно из наиболее интересных приложений теории тёплицевых матриц связано с точно решаемыми моделями статистической механики.

В середине 60-х годов XX века, рядом авторов [3, 4] были получены формулы, выражающие значения статистической суммы и некоторых корреляционных функций двумерной модели Изинга через определители тёплицевых матриц больших (растущих) размеров и, в конечном итоге, через собственные значения этих тёплицевых матриц. Полученные вычисления объясняли некоторые качественные эффекты, именно позволяли находить критические индексы, связанные с фазовыми переходами в модели Изинга. В настоящее время в работах ряда авторов (см., например, [5, 6]) были сделаны попытки обобщить упомянутый выше подход на другие модели, что требует развития теории тёплицевых матриц и, в частности, обобщения предельной теоремы Сегё [1, 7, 8], в том числе и на несимметрический случай [8-11].

В данной работе мы исследуем собственные значения тёплицевых матриц, когда их размер стремится к бесконечности.

Постановка задачи. Основной результат, полученный в работе, состоит в обосновании обобщения теоремы Сегё для нормальных тёплицевых матриц. Первоначальной целью нашего исследования было получение аналогичного результата для тёплицевых матриц из так называемого класса Хартвига – Фишера, то есть с символом вида

$$f_{\alpha,\beta} = (1 - z - z^{-1})^\alpha (-z)^\beta, \text{ при } 0 < \alpha < |\beta| < 1. \quad (1)$$

К сожалению, матрицы с таким символом не являются нормальными, как представлялось сначала, они лишь диагонализуемы. Поэтому цель, первоначально поставленная нами перед собой, не оказалась достигнутой. Тем не менее, по нашему мнению, полученный результат также представляет интерес ввиду потенциальной возможности обобщения теоремы Хофмана – Виланда на случай диагонализируемой тёплицевой матрицы с символом из пространства L_∞ , что позволит достичь исходной цели работы.

Как было отмечено ранее, в основе асимптотической спектральной теории тёплицевых матриц лежит знаменитая теорема Сегё (см. [1]), устанавливающая связь между предельным спектром и множеством значений символа тёплицевой матрицы, когда аргумент пробегает единичную окружность. Точнее, имеет место сходимостъ по мере спектров тёплицевых матриц с дискретной мерой к множеству значений символа, наделённому лебеговой мерой. Этот результат установлен Сегё для самосопряжённых тёплицевых матриц с непрерывным и не обращающимся в

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09-01-00671-а), а также федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» в рамках мероприятия 1.2.2 (госконтракт П1116).

ноль на окружности символом. Эта теорема Г. Сегё обобщалась многими авторами на случай более общих символов [7, 9, 11, 12].

Здесь следует отметить также результаты и гипотезы Р. Хартвига и М. Фишера (см. [9-11]) об асимптотике определителя тёплицевой матрицы, полностью не доказанные до настоящего времени и уточняющие результаты, относящиеся к обобщениям классической теоремы Сегё. В данной работе рассмотрен случай несамосопряжённых нормальных тёплицевых матриц. Этот случай также представляет интерес для приложений в статистической механике, в первую очередь асимптотическими оценками определителя таких матриц.

Формулировка основного результата работы. Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ – единичная окружность в комплексной плоскости, $f(z) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ ($z \in S^1$) – ряд Фурье – Лорана функции $f(z)$.

Матрица вида

$$T_n(f) = (a_{k-l})_{0 \leq k, l \leq n} \quad (2)$$

называется тёплицевой матрицей размером $n \times n$, определяемой символом $f(z)$.

Теорема 1. Пусть $f(e^{it}) \in L^\infty([-\pi, \pi])$, $\tau_{n,k}, 0 \leq k \leq n$ – последовательность собственных чисел нормальной тёплицевой матрицы $T_n(f) = (a_{k-l})_{0 \leq k, l \leq n}$. Тогда для произвольного положительного целого числа s имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_{n,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{it}))^s dt. \quad (3)$$

Следствие. Пусть выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда для произвольной аналитической функции $F(z)$ в кольце, содержащем окружность единичного радиуса, имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F(\tau_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(e^{it})) dt. \quad (4)$$

Отметим, что символ $f_{\alpha,\beta} = (1 - z - z^{-1})^\alpha (-z)^\beta$ часто называют символом Хартвига – Фишера.

Предложение. Символ Хартвига – Фишера удовлетворяет следующему условию:

$$f_{\alpha,\beta}(e^{it}) \in L^\infty([-\pi, \pi]). \quad (5)$$

Гипотеза. Пусть, как и выше, $f_{\alpha,\beta} = (1 - z - z^{-1})^\alpha (-z)^\beta$ при $0 < \alpha < |\beta| < 1$, $T_n(f_{\alpha,\beta}) = (a_{k-l})_{0 \leq k, l \leq n}$ – соответствующая матрица Тёплица, $\tau_{n,k}, 0 \leq k \leq n$ – последовательность её собственных чисел. Тогда для произвольного положительного целого числа s имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_{n,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{it}))^s dt. \quad (6)$$

Замечание 1. Отметим, что для того чтобы вывести гипотезу 1 из теоремы 1, достаточно было бы показать, что матрицы Тёплица, определяемые символом Хартвига – Фишера, являются нормальными. Ответ на вопрос: «Являются ли тёплицевы матрицы с символом (1) нормальными?» можно получить (учитывая (5)), зная вид матричных элементов тёплицевой матрицы с символом (1) и имея критерий нормальности в терминах матричных элементов.

Сформулируем критерий нормальности тёплицевой матрицы. Отметим, что этот критерий, вероятно, впервые был опубликован вместе с классификацией нормальных тёплицевых матриц в работе Н.Я. Крупника, У.Й. Ли, М. Крупника, Д. Фареника. Не теряя общности, можно предпола-

гатель, что у тёплицевой матрицы $T_n(f) = (a_{k-l})_{0 \leq k, l \leq n}$ (см. (2)) равны нулю диагональные элементы, то есть $a_0 = 0$ (вместо исходной матрицы A мы рассматриваем матрицу $A - a_0 E$ со сдвинутым на a_0 спектром). Тогда условие нормальности тёплицевой матрицы принимает следующий вид:

$$\bar{a}_{-q} a_{-p} + a_{-N+q-1} \bar{a}_{-N+p-1} = a_q \bar{a}_p + a_{N-p+1} \bar{a}_{N-q+1}. \quad (7)$$

Можно показать явными вычислениями, что матричные элементы тёплицевой матрицы $T_n(f_{\alpha, \beta}) = (a_{k-l})_{0 \leq k, l \leq n}$ с символом Хартвига – Фишера (1) имеют следующий вид:

$$a_{j-k} = (-1)^{j-k} \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1+\beta-j+k)\Gamma(\alpha+1-\beta+j-k)}. \quad (8)$$

Непосредственно проверяется, что матричные элементы, определяемые условием (8), к сожалению, не удовлетворяют условию (7).

Доказательство результатов. В этом пункте мы докажем сформулированные выше результаты. Мы докажем теорему 1. Доказательство теоремы распадается на две части. Первая часть состоит в аппроксимации тёплицевой матрицы с символом из L_2 циркулянтными матрицами по фробениусовой норме. Этот результат, по существу, является известным (см., например, [12] для случая вещественнозначного символа). Но мы для удобства читателя приводим это доказательство. Вторая часть состоит в доказательстве близости собственных значений, близких по фробениусовой норме (в слабом смысле, разъяснение см. ниже) нормальных тёплицевых матриц. Этот результат мы выводим из неравенства Хофмана – Виланда.

План подробного доказательства результата об аппроксимации произвольной тёплицевой матрицы циркулянтными матрицами в слабом смысле по фробениусовой норме составляет последовательную редукцию: сначала к случаю вещественнозначного символа тёплицева оператора $T_n(f)$ – функции $f \in L_\infty$, а потом к случаю неотрицательного символа. Следует отметить, что в работе [7] (см. также [12]) проведён в деталях второй этап отмеченной выше редукции. Первый этап прост.

Напомним сначала определение равномерности собственных значений матриц. Мы говорим, что собственные значения последовательностей матриц $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ равномерно распределены и пишем $\lambda(A_n) \cong \lambda(C_n)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\sigma \in S_n} \frac{\sum_{i=1}^n F(\lambda_i(A_n)) - F(\lambda_{\sigma(i)}(C_n))}{n} = 0, \quad (9)$$

где $\lambda_i(C)$ – i -е собственное значение матрицы C , а F – произвольный многочлен. В формуле минимум берётся по всем перестановкам n -элементного множества.

Ниже мы будем пользоваться понятием фробениусовой нормы $\|A\|_F$ матрицы A , которая определяется формулой

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Центральное место в наших рассуждениях занимает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\{A_n\}, \{C_n\}$ такие последовательности нормальных матриц, что их спектры ограничены в совокупности (при всех n) и выполняется:

$$\|A_n - C_n\|_F^2 = \bar{o}(n). \quad (11)$$

Тогда

$$\lambda(A_n) \cong \lambda(C_n). \quad (12)$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на использовании знаменитой теоремы Хофмана – Виланда (см. [13]).

Теорема 3. (Хофман, Виланд [13]). Пусть A, B – нормальные матрицы. Тогда

$$d_F(sp(A) - sp(B)) = \min_{\sigma \in S_n} \left[\sum_{i=1}^n |\lambda(A)_i - \lambda(B)_{\sigma(i)}|^2 \right]^{1/2} \leq \|A - B\|_F. \quad (13)$$

В теореме $d_F(sp(A) - sp(B))$ обозначает расстояние по фробениусовой норме между спектрами $sp(A)$ и $sp(B)$ матриц A и B соответственно, равное $\min_{\sigma \in S_n} \left[\sum_{i=1}^n |\lambda(A)_i - \lambda(B)_{\sigma(i)}|^2 \right]^{1/2}$. В формуле для расстояния во фробениусовой норме минимум берётся по всем перестановкам n -элементного множества.

Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что из (10) следует (9). Покажем это. Отметим сначала, что имеет место следующее легко проверяемое неравенство:

$$\sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Поэтому в силу (10), (11) получаем, что

$$\|A_n - C_n\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^n - c_{ij}^n|^2 = \bar{o}(n). \quad (15)$$

С другой стороны, из (13) следует, что

$$\min_{\sigma \in S_n} \left[\sum_{i=1}^n |\lambda(A_n)_i - \lambda(C_n)_{\sigma(i)}|^2 \right] \leq \|A_n - C_n\|_F^2 = \bar{o}(n). \quad (16)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \min_{\sigma \in S_n} \frac{\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i(A_n) - \lambda_{\sigma(i)}(C_n) \right|}{n} &\leq \min_{\sigma \in S_n} \frac{\sum_{i=1}^n |\lambda_i(A_n) - \lambda_{\sigma(i)}(C_n)|}{n} \leq \\ &\leq \min_{\sigma \in S_n} \frac{\sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i(A_n) - \lambda_{\sigma(i)}(C_n))^2 \right)^{1/2}}{n} \leq \frac{\|A_n - C_n\|_F}{\sqrt{n}} = \bar{o}(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

так как $\frac{\|A_n - C_n\|_F^2}{n} = \bar{o}(1)$. Таким образом, мы показали, что

$$\min_{\sigma \in S_n} \frac{\sum_{i=1}^n |\lambda_i(A_n) - \lambda_{\sigma(i)}(C_n)|}{n} = \bar{o}(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (17)$$

Осталось показать, что из (17) следует (12). Отметим, что достаточно доказать справедливость формулы (12) для случая, когда полином F является мономом. Последнее сразу следует из следующих оценок:

$$\sum_{k=1}^n |c_k^r - d_k^r| \leq r \cdot \max_{1 \leq k \leq n} \{c_k^r, d_k^r\} \cdot \sum_{k=1}^n |c_k - d_k| = C \cdot \sum_{k=1}^n |c_k - d_k|. \quad (18)$$

С учётом указанного в послылке теоремы 3 условия ограниченности спектров матриц A_n, C_n из оценки (18) следует оценка:

$$\min_{\sigma \in S_n} \frac{\sum_{i=1}^n |(\lambda_i(A_n))^r - (\lambda_{\sigma(i)}(C_n))^r|}{n} \leq C \cdot \min_{\sigma \in S_n} \frac{\sum_{i=1}^n |\lambda_i(A_n) - \lambda_{\sigma(i)}(C_n)|}{n} = \bar{o}(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (19)$$

Отсюда вытекает доказательство равенства (9) для случая, когда F является мономом. В случае, когда F является полиномом, сумму в равенстве (9) можно разбить на конечную сумму разностей, соответствующих отдельным мономам. Из этого представления, очевидно, следует справедливость (9) и для этого случая теорема 3 доказана.

Замечание 2. Отметим, что небольшая модификация доказательства позволяет доказать более сильное утверждение, именно, равенство (9) для случая, когда F является аналитической функцией в кольце, содержащем окружность единичного радиуса.

Теперь мы можем вывести теорему 1 из теоремы 2. Нам потребуются следующие два утверждения.

Лемма. Пусть *тёплицева матрица* $\{T_n\}$ размером n порождена набором коэффициентов $\{a_k\}_{k=-(n-1)}^{n-1}$. Пусть C_n – оптимально приближающая её по фробениусовой норме циркулянтная матрица. Тогда:

$$\|T_n - C_n\|_F^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \left(k - \frac{k^2}{n} \right) \cdot |a_{n-k} - a_{-k}|^2.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение $\|T_n - C_n\|_F^2$, где циркулянтная матрица C_n порождена коэффициентами $\{c_k\}_{k=0}^{n-1}$ (элементы первого столбца). Сумма в выражении для фробениусовой нормы (10) может быть разбита на подсуммы, связанные с элементами c_k . То есть можно написать:

$$\|T_n - C_n\|_F^2 = (a_0 - c_0)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k, \quad (20)$$

$$\varepsilon_k = (n-k) |a_{-k} - c_k|^2 + k |a_{n-k} - c_k|^2.$$

Очевидно, что минимум рассматриваемой фробениусовой нормы достигается при $c_0 = a_0$ и минимальном значении каждой из независимых величин ε_k . Элементарно показывается, что

минимум ε_k достигается при $c_k = \frac{n-k}{n} a_{-k} + \frac{k}{n} a_{n-k}$ и равен:

$$\tilde{\varepsilon}_k = \left(k - \frac{k^2}{n} \right) \cdot |a_{n-k} - a_{-k}|^2, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Выполняя подстановку последнего выражения в (20), немедленно получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть $f(e^{it}) \in L_\infty([-\pi, \pi])$, $T_n(f)$ – последовательность *тёплицевых матриц*. Тогда найдётся такая последовательность циркулянтных матриц $\{C_n\}$, что

$$\|T_n(f) - C_n\|_F^2 = \bar{o}(n). \quad (21)$$

Доказательство данной теоремы фактически содержится в доказательстве теоремы 5.1 работы [12] и охватывает более общий случай символа из пространства L_2 . Необходимое утверждение выводится из явного выражения элементов циркулянтной матрицы (см. лемму) и известного факта о суммируемости квадратов коэффициентов ряда Фурье для функции из L_2 . Следовательно, оно справедливо и для функции из L_∞ .

Следующая теорема является хорошо известным результатом.

Теорема 5. Пусть $C_n = (c_{i,j}^n)_{i,j=1}^n, c_{i,j}^n = c^n((i-j) \bmod n)$ – циркулянтная матрица размером $n \times n$ (см. [12]), где функция $f_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{n-1} z^{n-1}$ называется символом циркулянтной матрицы. Тогда её собственные значения определяются формулой

$$\lambda(C_n)_l = f_n \left(e^{\frac{i\pi l}{n}} \right). \quad (22)$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы хорошо известно, но мы здесь отметим схематично основные пункты доказательства этого хорошо известного факта. Отметим сначала, что собственные векторы циркулянтной матрицы совпадают с собственными векторами матрицы циклического сдвига J :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

многочленом от которой и является циклическая матрица $C_n = f(J)$ с символом, являющимся многочленом $f(t)$. Легко видеть, что собственные векторы матрицы J совпадают со столбцами матрицы, задающей дискретное преобразование Фурье. Таким образом, получаем, что и собственные векторы циклической матрицы совпадают со столбцами дискретного преобразования Фурье.

Покажем теперь, что циркулянтные матрицы коммутируют с операторами циклической группы сдвигов порядка n . Действительно, они, являясь многочленами от оператора сдвига J , коммутируют и с циклической группой n -го порядка, порождённой этим оператором J . Известно, что у перестановочных матриц общие собственные векторы. Поэтому отсюда следует, что у циркулянтной матрицы собственные векторы являются общими, с общими собственными векторами операторов циклической группы сдвигов. Так как матрица, составленная из этих векторов, задаёт дискретное преобразование Фурье, то применение этого дискретного преобразования приводит циркулянтную матрицу к диагональному виду (сравни с [14]). Как отмечено выше, циркулянтная матрица является многочленом (совпадающим с её символом) от порождающего элемента циклической группы операторов сдвига. Так как собственные числа порождающего циклическую группу оператора сдвига, очевидно, являются корнями из 1 (что вытекает из алгебраического соотношения – равенства тождественному оператору n -й степени этого оператора), то собственные числа циркулянтной матрицы являются значениями символа от корней n -й степени из 1, что и доказывает соотношение (22). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Будем говорить, что последовательность элементов $\{x_n\}$ нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ приближает последовательность $\{y_n\} \subset X$ по норме $\|\cdot\|$, если $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Построим последовательность циркулянтных матриц $\{C_n\}$, соответственно оптимально приближающую по фробениусовой норме последовательность матриц $\{T_n\}$, порожденную отрезком ряда Фурье функции f . Тогда из теоремы 4 следует, что $\|T_n - C_n\|^2 = o(n)$. Применяя далее теорему 2, получаем, что собственные значения матриц C_n и T_n равномерно распределены и, по теореме 5, могут быть представлены в виде

$$\lambda(C_n)_l = f_n \left(e^{\frac{i\pi l}{n}} \right).$$

Заметим, что в силу принадлежности функции f к классу L_∞ функция f^s также принадлежит к классу L_∞ и имеет место предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(f_n \left(e^{i\pi k/n} \right) \right)^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(e^{it}) \right)^s dt. \quad (23)$$

Равнораспределенность собственных значений матриц C_n и T_n означает, что для некоторой перестановки индексов σ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\sigma \in S_n} \frac{\sum_{l=1}^n F(\lambda_l(A_n)) - F(\lambda_{\sigma(l)}(C_n))}{n} = 0.$$

Отсюда и из равенства (23), очевидно, следует необходимое равенство из теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Замечание 3. Отметим, что равнораспределённость последовательностей матриц $\{T_n\}$ и $\{C_n\}$ можно и непосредственно вывести из теорем 4 и 3.

Действительно, из теоремы 4 и теоремы Хофмана – Виланда следует, что для некоторой нумерации собственных значений справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^n |\tau_{n,k} - \lambda_{n,k}|^2 \leq \|T_n - C_n\|_F^2 = o(n).$$

Тогда отсюда получаем оценку при $s = 1$:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\tau_{n,k} - \lambda_{n,k}| \right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n |\tau_{n,k} - \lambda_{n,k}|^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{k \neq m} |\tau_{n,k} - \lambda_{n,k}| |\tau_{n,m} - \lambda_{n,m}| \leq$$

(применяя неравенство Коши – Буняковского к удвоенным произведениям);

$$\leq \frac{1}{n^2} R_n + \frac{2(n-1)}{n^2} R_n, \text{ где } R_n = \sum_{k=1}^n |\tau_{n,k} - \lambda_{n,k}|^2.$$

В силу теоремы Хофмана – Виланда $\frac{1}{n} R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а значит, и исходное выражение также стремится к нулю.

Рассмотрим теперь случай $s = 2$.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\tau_{n,k}^2 - \lambda_{n,k}^2| \leq \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n |\tau_{n,k} - \lambda_{n,k}| \cdot \sum_{k=1}^n |\tau_{n,k} + \lambda_{n,k}|}.$$

В силу ограниченности спектра в совокупности при всех n данное выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Для обоснования случая $s > 2$ можно использовать оценку отдельного слагаемого:

$$|\tau_{n,k}^s - \lambda_{n,k}^s| \leq |\tau_{n,k} - \lambda_{n,k}| \cdot \left| \sum_{m=0}^{s-1} \tau_{n,k}^m \lambda_{n,k}^{s-m-1} \right|,$$

где второй множитель в правой части также ограничен при всех n .

Вывод завершён.

Заключение. Выше было приведено доказательство слабого варианта теоремы Сегё для достаточно широкого класса функций, из которого следует описание спектра нормальных тёплицевых матриц. Тем не менее, вопрос об описании предельного спектра тёплицевых матриц с символом Хартвига – Фишера пока остаётся открытым. Исследованию этого вопроса о близости упомянутых выше множеств, то есть доказательству гипотезы данной работы, надеемся посвятить отдельную работу. За рамками данной статьи остались также вопросы об асимптотике собственных значений, которые пока представляются достаточно сложными и ожидают своего решения.

Библиографический список

1. Grenander V. Toeplitz Forms and Their Applications / V. Grenander, G. Szego. – Berkeley: Univ. of California Press, 1958.
2. Bottcher A. Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices / A. Bottcher, B. Silbermann. – New York : Universitext, Springer-Verlag, 1999.
3. Kadanoff L. Spin-Spin Correlation in the Two-Dimensional Ising Model. – II / L. Kadanoff // *Nuovo Cimento*. – 1966. – В 44. – P. 276–305.
4. McCoy B.M. The Two-Dimensional Ising Model / B.M. McCoy, T.T. Wu. – Harvard : Harvard University Press, 1973.
5. Dai H. Asymptotics of eigenvalues of Toeplitz matrices / H. Dai, Z. Geary, L. Kadanoff // *Journal of Statistical Mechanics*. – 2009. P05012.
6. Forrester P.J. Applications and generalizations of Fisher-Hartwig asymptotics / P.J. Forrester, N.E. Frankel // *Journal of Mathematical Physics*. – 2004. – V. 45. – P. 2003–2028.
7. Замарашкин Н.Л. Распределение собственных и сингулярных чисел теплицевых матриц при ослабленных требованиях к производящей функции / Н.Л. Замарашкин, Е.Е. Тыртышников // *Мат. сборник*. – 1997. – Т. 188. – № 8. – С. 83–92.
8. Basor E. The Fisher-Hartwig Conjecture and Toeplitz Eigenvalues / E. Basor, K. Morrison // *Linear Algebra Appl.* – 1994. – V. 202. – P. 129–142.
9. Hartwig R.E. Toeplitz determinants, some applications, theorems and conjectures / R.E. Hartwig, M.E. Fisher // *Adv. Chem. Phys.* – 1968. – V. 15. – P. 333–353.
10. Hartwig R.E. Asymptotic behavior of Toeplitz matrices and determinants / R.E. Hartwig, M.E. Fisher // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1969. – V. 32. – P. 190–225.
11. Widom H. Eigenvalue distribution of nonselfadjoint Toeplitz matrices and the asymptotics of Toeplitz determinants in the case of nonvanishing index / H. Widom // *Operator Theory: Adv. And Appl.* – 1990. – V. 48. – P. 387–421.
12. Tyrtshnikov E.E. A unifying approach to some old and new theorems on distribution and clustering / E.E. Tyrtshnikov // *Linear algebra and its applications*. – 1996. – V. 232. – P. 1–43.
13. Hoffmann A.J. The variation of the spectrum of a normal matrix / A.J. Hoffmann, H.W. Wielandt // *Duke. Math. J.* – 1953. – V. 20. – P. 37–39.
14. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении / Р. Эдвардс. – М.: Мир, 1985.

Материал поступил в редакцию 13.05.11.

References

1. Grenander V. Toeplitz Forms and Their Applications / V. Grenander, G. Szego. – Berkeley: Univ. of California Press, 1958.
2. Bottcher A. Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices / A. Bottcher, B. Silbermann. – New York : Universitext, Springer-Verlag, 1999.
3. Kadanoff L. Spin-Spin Correlation in the Two-Dimensional Ising Model. – II / L. Kadanoff // *Nuovo Cimento*. – 1966. – B 44. – P. 276–305.
4. McCoy B.M. The Two-Dimensional Ising Model / B.M. McCoy, T.T. Wu. – Harvard : Harvard University Press, 1973.
5. Dai H. Asymptotics of eigenvalues of Toeplitz matrices / H. Dai, Z. Geary, L. Kadanoff // *Journal of Statistical Mechanics*. – 2009. P05012.
6. Forrester P.J. Applications and generalizations of Fisher-Hartwig asymptotics / P.J. Forrester, N.E. Frankel // *Journal of Mathematical Physics*. – 2004. – V. 45. – P. 2003–2028.
7. Zamarashkin N.L. Raspredelenie sobstvennykh i singulyarnykh chisel tyoplicevykh matricz pri oslablennykh trebovaniyakh k proizvodnyashhej funktsii / N.L. Zamarashkin, E.E. Tyrtyshechnikov // *Mat. sbornik*. – 1997. – T. 188. – # 8. – S. 83–92. – In Russian.
8. Basor E. The Fisher-Hartwig Conjecture and Toeplitz Eigenvalues / E. Basor, K. Morrison // *Linear Algebra Appl.* – 1994. – V. 202. – P. 129–142.
9. Hartwig R.E. Toeplitz determinants, some applications, theorems and conjectures / R.E. Hartwig, M.E. Fisher // *Adv. Chem. Phys.* – 1968. – V. 15. – P. 333–353.
10. Hartwig R.E. Asymptotic behavior of Toeplitz matrices and determinants / R.E. Hartwig, M.E. Fisher // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1969. – V. 32. – P. 190–225.
11. Widom H. Eigenvalue distribution of nonselfadjoint Toeplitz matrices and the asymptotics of Toeplitz determinants in the case of nonvanishing index / H. Widom // *Operator Theory: Adv. And Appl.* – 1990. – V. 48. – P. 387–421.
12. Tyrtyshechnikov E.E. A unifying approach to some old and new theorems on distribution and clustering / E.E. Tyrtyshechnikov // *Linear algebra and its applications*. – 1996. – V. 232. – P. 1–43.
13. Hoffmann A.J. The variation of the spectrum of a normal matrix / A.J. Hoffmann, H.W. Wielandt // *Duke. Math. J.* – 1953. – V. 20. – P. 37–39.
14. E'dvards R. Ryady Fur'e v sovremennom izlozhenii / R. E'dvards. – M.: Mir, 1985. – In Russian.

ON DISTRIBUTION OF EIGEN VALUES OF TOEPLITZ MATRICES WITH HARTWIG-FISHER SYMBOL

A.A. BATALSHCHIKOV, V.A. STUKOPIN
(Don State Technical University)

Toeplitz matrices with Hartwig-Fisher symbol are investigated. The extension of Szego theorem for normal Toeplitz matrices with complex-valued symbol from L_∞ space on the unit circle is formulated and proved.

Keywords: Toeplitz matrix, Hartwig-Fisher symbol, Szego theorem.