УДК 539.3

ТРЕХМЕРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОГО СЛОЯ С ДВУМЯ ШТАМПАМИ ПРИ УЧЕТЕ ТРЕНИЯ*

Д.А. ПОЖАРСКИЙ, А.А. МОЛЧАНОВ
(Донской государственный технический университет)

Изучены пространственные контактные задачи для упругого слоя конечной толщины, в одну грань которого симметрично вдавливаются два одинаковых жестких эллиптических штампа с учетом трения при разных типах граничных условий на другой грани. Задачи сведены к интегральным уравнениям относительно контактного давления, которые решены методом Галанова.
Ключевые слова: *теория упругости, контактная задача, слой, трение, метод Галанова.*

Введение. Исследованы трехмерные контактные задачи теории упругости при учете трения о взаимодействии слоя с двумя симметричными штампами, расположенными на одной его грани. Другая грань слоя находится в условиях жесткой или скользящей заделки. Штампы имеют форму эллиптических параболоидов, начинают удаляться друг от друга или сближаться. Области контакта неизвестны. Ранее аналогичные задачи с трением рассматривались для случая одного штампа на слое [1 – 4] и на полосе [5]. В работе [6] рассматривается пространственная задача о контакте с упругим слоем системы двух симметричных эллиптических штампов с плоской подошвой (асимптотический метод решения).

Постановка задачи. В декартовых координатах рассмотрим слой $\{x, y \in (-\infty, \infty), z \in [0, h]\}$ толщиной h, нижняя грань которого $z = 0$ находится в жесткой или скользящей заделке (задачи А и Б соответственно). Упругий материал слоя имеет коэффициент Пуассона ν и модуль сдвига G. Верхняя грань слоя $z = h$ взаимодействует с двумя одинаковыми штампами. Формы основания штампов имеют вид эллиптических параболоидов и описываются функциями

$$g_{\pm}(x,y) = (x \pm c)^2/(2R_1) + y^2/(2R_2),\ R_2 \geq R_1. \tag{1}$$

Между поверхностью слоя и штампов действуют силы кулоновского трения с коэффициентом трения μ. Штампы начинают достаточно медленно двигаться вдоль оси x так, что задачи симметричны относительно оси y. Силы трения направлены против движения. При $\mu > 0$ штампы удаляются друг от друга, а при $\mu < 0$ — начинают сближаться. К штампам приложены симметричные касательные силы T, нормальные силы P. Пусть осадка штампов равна δ, а перекос отсутствует. Симметричные по y области контакта $\Omega_{\pm}$ неизвестны (область Ω_+ при $x < 0$).

При известных величинах G, ν, μ, h, c, R_1, R_2 и δ и заданной функции $f(r,z)$ требуется определить контактные давления $\sigma_z(x,y,h) = -q(x,y)$, $(x,y) \in \Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$, а также сами области контакта $\Omega_{\pm}$. Затем можно найти, например, величину P из условия равновесия штампа

$$P = \iint\limits_{\Omega_+} q(x,y)\,dxdy\,. \tag{2}$$

Из аналогичных интегральных условий можно найти величину T, а также плечи приложения сил P и T.

Решение задачи. Предположим, что области контакта априори содержатся в прямоугольниках $S_{\pm} = \{|x \pm c| \leq a,\ |y| \leq b\},\ b \geq a,\ c \geq a.$

Для вывода интегральных уравнений (ИУ) контактных задач А, Б используется интегральное преобразование Фурье и закон Кулона. В результате придем к ИУ на двух участках контакта, которое после введения безразмерных обозначений

$$x' = \frac{x}{b},\ y' = \frac{y}{b},\ \lambda = \frac{h}{b},\ c' = \frac{c}{b},\ \varepsilon_0 = \frac{a}{b},\ \delta' = \frac{\delta}{b},\ A = \frac{b}{2R_1},\ B = \frac{b}{2R_2}, \tag{3}$$

* Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00004.

$$q'(x',y')=\frac{q(x,y)}{2\pi\theta},\ \ P'=\frac{P}{2\pi\theta b^2},\ \ \theta=\frac{G}{1-\nu},\ \ \Omega'\leftrightarrow\Omega,\ \ \Omega'_{\pm}\leftrightarrow\Omega_{\pm},\ \ S'_{\pm}\leftrightarrow S_{\pm} \tag{4}$$

можно записать в виде (штрихи далее опускаем):

$$\iint\limits_{\Omega} q(\xi,\eta)\left[\frac{1}{R_-}+\varepsilon\frac{x-\xi}{R_-^2}+\frac{1}{\lambda}T\left(\frac{x-\xi}{\lambda},\frac{y-\eta}{\lambda}\right)\right]d\xi d\eta=f(x,y),\quad (x,y)\in\Omega, \tag{5}$$

$$f(x,y)=\delta-A(x\pm c)^2-By^2,\quad (x,y)\in\Omega_{\pm}, \tag{6}$$

$$R_{\pm}=[(x\pm\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2},\quad \varepsilon=\mu(1-2\nu)/(2-2\nu), \tag{7}$$

$$T(t,\tau)=\int\limits_0^{\infty}[L_1(u)-1]J_0(u\sqrt{t^2+\tau^2})du+\frac{\varepsilon t}{\sqrt{t^2+\tau^2}}\int\limits_0^{\infty}[L_2(u)-1]J_1(u\sqrt{t^2+\tau^2})du. \tag{8}$$

Здесь $J_n(u)$ — функции Бесселя. В ядре ИУ (4) выделена главная часть.

Для задачи А (жесткая заделка)

$$L_1(u)=\frac{2\kappa\ \mathrm{sh}2u-4u}{2\kappa\ \mathrm{ch}2u+4u^2+1+\kappa^2},\quad \kappa=3-4\nu, \tag{9}$$

$$L_2(u)=\frac{2\kappa\ \mathrm{ch}2u-4(1-2\nu)^{-1}u^2-2\kappa}{2\kappa\ \mathrm{ch}2u+4u^2+1+\kappa^2}, \tag{10}$$

а для задачи Б (скользящая заделка)

$$L_1(u)=\frac{\mathrm{ch}2u-1}{\mathrm{sh}2u+2u},\quad L_2(u)=\frac{\mathrm{sh}2u-2(1-2\nu)^{-1}u}{\mathrm{sh}2u+2u}. \tag{11}$$

Введенный в (3) безразмерный параметр λ характеризует относительную толщину упругого слоя с учетом симметрии задач $q(-x,y)=q(x,y)$. Тогда уравнение (5) сводится к ИУ на одном участке контакта

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega_-} q(\xi,\eta)\Bigg[&\frac{1}{R_-}+\frac{1}{R_+}+\varepsilon\frac{x-\xi}{R_-^2}+\varepsilon\frac{x+\xi}{R_+^2}+\frac{1}{\lambda}T\left(\frac{x-\xi}{\lambda},\frac{y-\eta}{\lambda}\right)+\\ &+\frac{1}{\lambda}T\left(\frac{x+\xi}{\lambda},\frac{y-\eta}{\lambda}\right)\Bigg]d\xi d\eta=\delta-A(x-c)^2-By^2,\quad (x,y)\in\Omega_-.\end{aligned} \tag{12}$$

После замен:

$$x_*=x-c,\quad \xi_*=\xi-c,\quad q_*(x_*,y)=q(x,y),\quad \Omega_*\leftrightarrow\Omega_-,\ S_*\leftrightarrow S_- \tag{13}$$

ИУ (12) можно переписать в форме (звездочки далее опускаем):

$$\iint\limits_{\Omega} q(\xi,\eta)K(\xi,\eta,x,y)=g(x,y),\quad (x,y)\in\Omega, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}K(\xi,\eta,x,y)=&\frac{1}{R_-}+\frac{1}{R_1}+\varepsilon\frac{x-\xi}{R_-^2}+\varepsilon\frac{x+\xi+2c}{R_1^2}+\\ &+\frac{1}{\lambda}T\left(\frac{x-\xi}{\lambda},\frac{y-\eta}{\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda}T\left(\frac{x+\xi+2c}{\lambda},\frac{y-\eta}{\lambda}\right),\end{aligned} \tag{15}$$

$$g(x,y)=\delta-Ax^2-By^2,\quad R_1=[(x+\xi+2c)^2+(y-\eta)^2]^{1/2}. \tag{16}$$

При численном решении уравнения (14) применим метод нелинейных граничных ИУ типа Гаммерштейна, предложенный Галановым [7, 8]. Уравнение (14) дополним условиями неотрицательности контактного давления в области контакта, отсутствия контакта и обращения в нуль давления в дополнительной области $S\backslash\Omega$, записав их все в виде системы

$$\left.\begin{aligned}&\int_S K(N,M)q(N)dN = g(M), \quad q(M)\ge 0, \quad M\in\Omega,\\&\int_S K(N,M)q(N)dN > g(M), \quad q(M)=0, \quad M\in S\setminus\Omega,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где введены обозначения $M=(x,y),\ N=(\xi,\eta)$.

Идея метода состоит в представлении искомого давления в форме

$$q=q(M)=q^+(M)+q^-(M), \tag{18}$$

где введены нелинейные операторы

$$q^+(M)=\sup\{q^+(M),0\}, \quad q^-(M)=\inf\{q^-(M),0\}. \tag{19}$$

При учете (17) интегральное неравенство (16) будет удовлетворено в результате решения нелинейного операторного уравнения типа Гаммерштейна:

$$\Theta\, p=0 \ \ (M\in\Omega), \quad \Theta\, p\equiv p^- + K_* p^+ - g, \tag{20}$$

где $p_*=p_*(M),\ p_*^{\pm}=p_*^{\pm}(M),\ g=g(M)$,

$$K_* p^+ = \int_S K(N,M)p^+(N)dN. \tag{21}$$

Можно доказать, что система (17) эквивалентна уравнению (20) [7]. Исследованы вопросы существования и единственности решения уравнения типа (20) [7]. Для численного решения уравнения (20) применим метод М. А. Красносельского, основанный на последовательных приближениях [7].

Прямоугольник S покроем сеткой из m узлов с учетом отсутствия симметрии по координате x. Ясно, что $c\ge\varepsilon_0$, $\varepsilon_0\le 1$. Для проверки точности расчета ядра (15) можно использовать интеграл [9]

$$\int_0^\infty \exp(-Cu)J_n(Du)du=\frac{D^n}{\sqrt{C^2+D^2}\,[C+\sqrt{C^2+D^2}\,]^n}, \quad n=0;1. \tag{22}$$

Исследуя поведение выражений $L_n(u)-1$ ($n=0;1$) при $u\to+\infty$ для функций (9) – (11), положим в (22) $C=2$. При выполнении условия

$$\lambda\ge\sqrt{4(1+c)^2+1}\Big/\left(4\sqrt{5}\right) \tag{23}$$

для расчета ядра (15) можно использовать квадратурную формулу Гаусса по 32 узлам.

Численные эксперименты. В табл. 1, 2 для задач А и Б соответственно даны значения контактного давления $q(x,0)$ и вдавливающей штамп силы P. Расчеты, результаты которых приведены в таблицах, сделаны при $\nu=0{,}3$, $\delta=0{,}004$, $A_0=0{,}1$, $B_0=0{,}005$, $\varepsilon_0=c=0{,}15$ и разных значениях λ и μ.

Таблица 1

Значения давления и вдавливающей силы P в задаче А

λ	μ	$q(x,0)\times10^3$					$P\times10^3$
		$x=-0{,}075$	$-0{,}0375$	0	0,0375	0,075	
1	0	1,77	3,00	3,39	3,32	2,81	0,640
1	0,2	1,92	3,06	3,38	3,25	2,66	0,628
1	–0,2	1,64	2,94	3,39	3,39	2,95	0,651
0,5	0	3,12	3,96	4,32	4,25	3,77	0,954
0,5	0,2	3,23	4,00	4,31	4,18	3,64	0,941
0,5	–0,2	3,00	3,91	4,32	4,31	3,88	0,966
0,3	0	4,63	5,42	5,70	5,55	4,99	1,42
0,3	0,2	4,74	5,48	5,71	5,52	4,91	1,41
0,3	–0,2	4,51	5,35	5,67	5,58	5,07	1,42

Для задачи Б значения давления и силы меньше, чем для задачи А, как и должно быть. В обеих задачах контактное давление меньше на той стороне области контакта, которая ближе к участку, расположенному между штампами.

Таблица 2

Значения давления и вдавливающей силы P в задаче Б

λ	μ	$q(x,0)\times 10^3$					$P\times 10^3$
		x=–0,075	–0,0375	0	0,0375	0,075	
1	0	1,60	2,89	3,28	3,20	2,68	0,595
1	0,2	1,74	2,95	3,27	3,13	2,53	0,585
1	–0,2	1,46	2,82	3,27	3,27	2,82	0,605
0,5	0	2,79	3,65	4,02	3,95	3,46	0,851
0,5	0,2	2,92	3,70	4,01	3,89	3,34	0,842
0,5	–0,2	2,66	3,59	4,01	4,00	3,57	0,858
0,3	0	4,00	4,81	5,13	5,02	4,50	1,22
0,3	0,2	4,13	4,89	5,17	5,02	4,46	1,23
0,3	–0,2	3,88	4,73	5,07	5,01	4,53	1,21

Заключение. Решены новые пространственные контактные задачи с неизвестной областью контакта для упругого слоя о взаимодействии двух одинаковых эллиптических в плане штампов с учетом трения при различных граничных условиях на другой грани. При использовании метода нелинейных граничных интегральных уравнений с учетом симметрии задач определены области контакта, давления в этих областях, связи между силами и осадками штампов. Сделаны расчеты при разных значениях относительной толщины слоя и коэффициента трения.

Библиографический список

1. Чебаков М.И. Пространственная контактная задача для слоя с учетом трения в неизвестной области контакта / М.И. Чебаков // Доклады РАН. – 2002. – Т. 383. – № 1. – С. 67–70.

2. Чебаков М.И. Трехмерная контактная задача для слоя с учетом трения в неизвестной области контакта / М.И. Чебаков // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 6. – С. 59–68.

3. Чебаков М.И. Пространственные контактные задачи для слоя с учетом сил трения в зоне контакта / М.И. Чебаков, Х. Лоренц // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. 6-й междунар. науч. конф. 19–23 октября 2000 г. – Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ, 2000. – С. 232–235.

4. Чебаков М.И. Учет сил трения в пространственной контактной задаче для закрепленного слоя / М.И. Чебаков // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. 7-й междунар. науч. конф. памяти акад. РАН И.И. Воровича, 22–25 октября 2001 г. – Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001. – С. 205–209.

5. Александров В.М. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости / В.М. Александров, М.И. Чебаков. – М.: Физматлит, 2004. – 301 с.

6. Соболь Б.В. Пространственная задача о контакте системы штампов с упругим слоем / Б.В. Соболь, И.М. Пешхоев // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2011. – № 1. – С. 69-76.

7. Галанов Б.А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта / Б.А. Галанов // Прикладная математика и механика. – 1985. – Т. 49. – Вып. 5. – С. 827–835.

8. Александров В.М. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел / В.М. Александров, Д.А. Пожарский. – М.: Факториал, 1998. – 288 с.

9. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

Материал поступил в редакцию 30.05.11.

References

1. Chebakov M.I. Prostranstvennaya kontaktnaya zadacha dlya sloya s uchyotom treniya v neizvestnoj oblasti kontakta / M.I. Chebakov // Doklady` RAN. – 2002. – T. 383. – # 1. – S. 67–70. – In Russian.

2. Chebakov M.I. Tryoxmernaya kontaktnaya zadacha dlya sloya s uchyotom treniya v neizvestnoj oblasti kontakta / M.I. Chebakov // Izvestiya RAN. Mexanika tvyordogo tela. – 2002. – # 6. – S. 59–68. – In Russian.

3. Chebakov M.I. Prostranstvenny`e kontaktny`e zadachi dlya sloya s uchyotom sil treniya v zone kontakta / M.I. Chebakov, X. Lorencz // Sovremenny`e problemy` mexaniki sploshnoj sredy`: tr. 6-j mezhdunar. nauch. konf. 19–23 oktyabrya 2000 g. – Rostov n/D: Izd-vo SKNCZ VSH, 2000. – S. 232–235. – In Russian.

4. Chebakov M.I. Uchyot sil treniya v prostranstvennoj kontaktnoj zadache dlya zakreplyonnogo sloya / M.I. Chebakov // Sovremenny`e problemy` mexaniki sploshnoj sredy`: tr. 7-j mezhdunar. nauch. konf. pamyati akad. RAN I.I. Vorovicha, 22–25 oktyabrya 2001 g. – Rostov n/D: Izd-vo SKNCZ VSH, 2001. – S. 205–209. – In Russian.

5. Aleksandrov V.M. Analiticheskie metody` v kontaktny`x zadachax teorii uprugosti / V.M. Aleksandrov, M.I. Chebakov. – M.: Fizmatlit, 2004. – 301 s. – In Russian.

6. Sobol` B.V. Prostranstvennaya zadacha o kontakte sistemy` shtampov s uprugim sloem / B.V. Sobol`, I.M. Peshxoev // E`kologicheskij vestnik nauchny`x centrov CHE`S. – 2011. – # 1. – S. 69-76. – In Russian.

7. Galanov B.A. Metod granichny`x uravnenij tipa Gammershtejna dlya kontaktny`x zadach teorii uprugosti v sluchae neizvestny`x oblastej kontakta / B.A. Galanov // Prikladnaya matematika i mexanika. – 1985. – T. 49. – Vy`p. 5. – S. 827–835. – In Russian.

8. Aleksandrov V.M. Neklassicheskie prostranstvenny`e zadachi mexaniki kontaktny`x vzaimodejstvij uprugix tel / V.M. Aleksandrov, D.A. Pozharskij. – M.: Faktorial, 1998. – 288 s. – In Russian.

9. Prudnikov A.P. Integraly` i ryady`. Special`ny`e funkcii / A.P. Prudnikov, Yu.A. Bry`chkov, O.I. Marichev. – M.: Nauka, 1983. – 752 s. – In Russian.

THREE-DIMENSIONAL CONTACT PROBLEM ON INTERACTION BETWEEN ELASTIC LAYER AND TWO PUNCHES UPON FRICTION

D.A. POZHARSKIY, A.A. MOLCHANOV
(Don State Technical University)

Spatial contact problems are investigated for the finite elastic layer in one face of which two identical rigid elliptical punches are symmetrically indented taking into account friction under various types of boundary conditions on the other face. The problems are reduced to the integral equations relating to the contact pressure. The problems are solved by Galanov's method.
***Keywords**: theory of elasticity, contact problem, layer, friction, Galanov's method.*