

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.87

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ФРОНТА ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ В ГЕТЕРОГЕННОЙ ТВЕРДОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ В УСЛОВИЯХ ГРАНИЧНОГО ТЕПЛООБМЕНА И НАЛИЧИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО ТЕПЛОЗАЩИТНОГО КОЛЬЦЕВОГО СЛОЯ

А.В. ГОЛОВНЯ, И.С. КАЛЯКИН

(Ухтинский государственный технический университет),

Р.А. НЕЙДОРФ,

(Донской государственный технический университет),

В.Н. ПУШКИН

(Ухтинский государственный технический университет),

Рассмотрена осесимметричная задача о распространении фронта фазового превращения в твердой пористой среде в условиях граничного теплообмена при наличии теплозащитного слоя. Проведен параметрический анализ, позволяющий определять влияние величины теплового потока на границе, а также теплофизических свойств изоляционного слоя на показатели волны фазового превращения.

Ключевые слова: твердая пористая среда; фазовое превращение; распространение фронта; осесимметричная задача Стефана; теплозащитный слой; численное решение.

Введение. Рассматриваемая задача актуальна в связи со строительством и эксплуатацией зданий и сооружений в районах Крайнего Севера в условиях вечной мерзлоты, когда обусловленные природными и искусственными факторами процессы плавления и кристаллизации содержащейся в грунте влаги приводят к нарушению устойчивости объектов вплоть до аварийных ситуаций. В частности, это имеет место при бурении и эксплуатации нефтяных и газовых скважин, когда прилегающий к устью скважины и содержащий включения влаги горный массив подвержен влиянию потока тепла со стороны самой скважины. Наличие кольцеобразного теплозащитного слоя, примыкающего к внутренней границе среды, оказывает влияние на параметры волны фазового превращения влаги в ней. Причем здесь имеет значение не только толщина этой прослойки, но и теплофизические свойства наполняющего её вещества. Схематично задача представлена на рис.1.

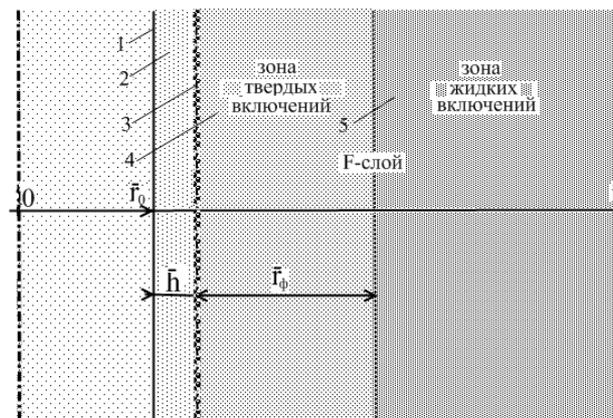


Рис.1. Схема зон: 1 – внутренняя цилиндрическая стенка; 2 – кольцевой теплозащитный слой; 3 – граница между теплозащитным слоем и пористой средой; 4 – зона пребывания влаги в твердом виде; 5 – зона пребывания влаги в жидком виде; \bar{r}_0 – радиус внутренней цилиндрической полости; \bar{h} – толщина теплозащитного кольцевого слоя; \bar{r}_ϕ – текущий размер зоны фазовых превращений

Математическая модель задачи основана на тех же, что и в [1], представлениях. Твердая пористая среда содержит равномерно распределенные включения влаги, которые в рассматриваемом температурном диапазоне могут находиться в одном из двух агрегатных состояний: либо в твердом, либо в жидком. Соответствующие зоны твердой пористой среды, обладающие при осреднении по объему различными теплофизическими свойствами, будем идентифицировать как зоны твердых и жидких включений. Считается, что на макроскопическом уровне фазовое превращение происходит на поверхности раздела этих зон. Теплофизические свойства вещества каждой из зон, включая зону теплового барьера 2 (см. рис.1), полагаются однородными по пространству и неизменными во времени.

Математическая модель задачи в безразмерных переменных и величинах включает в себя уравнения распространения тепла для каждой из трех зон

$$C \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\Lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \quad (1)$$

с граничными и начальным условиями:

при $r = 1$:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = A \cdot \Theta, \quad (2)$$

при $r = \infty$:

$$\Theta = 1, \quad (3)$$

при $\tau = 0$,

$$r \in (1; \infty) : \Theta = 1, \quad (4)$$

где

$$C = \begin{cases} \frac{\overline{c_c \rho_c}}{c_m \rho_m}, & \text{при } 1 \leq r < 1+h \\ \frac{\overline{c_m \rho_m}}{c_m \rho_m}, & \text{при } 1+h \leq r < 1+h+r_\phi \\ 1, & \text{при } 1+h+r_\phi \leq r < \infty \end{cases}, \quad \Lambda = \begin{cases} \frac{\overline{\lambda_c}}{\lambda_m}, & \text{при } 1 \leq r < 1+h \\ \frac{\overline{\lambda_m}}{\lambda_m}, & \text{при } 1+h \leq r < 1+h+r_\phi \\ 1, & \text{при } 1+h+r_\phi \leq r < \infty \end{cases}, \quad r = \frac{\bar{r}}{\bar{r}_0}$$

$$h = \frac{\bar{h}}{\bar{r}_0}, \quad r_\phi = \frac{\bar{r}_\phi}{\bar{r}_0}; \quad \Theta = \frac{T - T_*}{T_\infty - T_*}, \quad \tau = \frac{t \lambda_m}{\bar{r}_0^2 c_m \rho_m}, \quad t - \text{ время; } T - \text{ температура в точке с координатой } \bar{r} \text{ в момент времени } t; \bar{r}_0 - \text{ радиус внутренней цилиндрической полости; } c, \lambda, \rho - \text{ удельные теплоемкости, коэффициенты теплопроводности и плотности веществ соответственно; индекс «c» относится к теплоизоляционному слою, индекс «m» относится к зоне пребывания влаги в твердом состоянии, «m» - к зоне, где влага находится в жидком состоянии; } \bar{h} - \text{ толщина теплозащитного слоя, отделяющего содержащий в совокупности влагу массив от кольцевой полости.}$$

Указанным выше областям соответствуют следующие интервалы пространственной переменной \bar{r} : $\bar{r}_0 \leq \bar{r} \leq \bar{r}_0 + \bar{h}$ – теплозащитный слой; $\bar{r}_0 + \bar{h} \leq \bar{r} \leq \infty$ – слой, подверженный фазовым превращениям (далее F-слой); $\bar{r}_0 + \bar{h} \leq \bar{r} \leq \bar{r}_0 + \bar{h} + \bar{r}_\phi$ – зона жидких включений; $\bar{r}_0 + \bar{h} + \bar{r}_\phi \leq \bar{r} \leq \infty$ – зона твердых включений. Здесь $R = \bar{r}_0 + \bar{h} + \bar{r}_\phi$ – координата фронта фазового превращения (радиус зоны кристаллизации влаги); $A = \frac{\alpha \bar{r}_0}{\lambda_c}$, α – коэффициент теплоотдачи от хладагента, циркулирующего вдоль цилиндрической стенки к твердому массиву;

T_* , T_∞ – масштабные значения температуры, первое из которых соответствует характерной температуре потока хладагента, второе – температуре твердой среды на значительном удалении от центральной оси. Следует заметить, что безразмерный комплекс A связан прямо пропорциональной зависимостью с числом Нуссельта указанного выше омывающего стенку потока.

Задача дополняется условиями сопряжения на границах, разделяющих зоны. На неподвижной границе «теплозащитный слой – F -слой» должно выполняться условие непрерывности потока тепла:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \tau < \tau_{\phi\Pi} \quad \Lambda_c \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{1+h-0} &= \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{1+h+0} \\ \text{при } \tau > \tau_{\phi\Pi} \quad \Lambda_c \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{1+h-0} &= \Lambda_m \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{1+h+0} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $\tau_{\phi\Pi}$ – момент времени, начиная с которого в твердой пористой среде будет распространяться волна фазового превращения. На свободной границе раздела фаз выполняются условия непрерывности температуры и теплового баланса:

при $\tau > \tau_{\phi\Pi}$, $r = 1 + h + r_\phi$

$$\Theta(1 + h + r_\phi - 0) = \Theta(1 + h + r_\phi + 0) = \Theta_\phi, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{1+h+r_\phi+0} - \Lambda_m \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{1+h+r_\phi-0} = -q \cdot V, \quad (7)$$

где $V = \frac{dr_\phi}{d\tau}$; $\Theta_\phi = \frac{T_\phi - T_*}{T_\infty - T_*}$, $q = \frac{\bar{q}_m}{\bar{c}_m |T_\infty - T_*|}$, T_ϕ ($T_* < T_\phi < T_\infty$) – температура фазового перехода;

\bar{q}_m – теплота фазового перехода в расчете на единицу массы вещества среды; V – скорость перемещения фронта фазового превращения. Очевидно, что $r_\phi(\tau) = 0$ на промежутке времени $\tau \in [0; \tau_{\phi\Pi}]$.

Как видно, математическая модель (1)-(7) включает в себя параметры теплозащитного слоя h , Λ_c , C_c , которые наряду с параметрами F -слоя C_m , Λ_m определяют динамику фронта фазового превращения.

Численный анализ задачи. Для численного анализа, как и в [1], с помощью разбиения физического пространства на контрольные объемы, выделения узловых точек и интегрирования уравнений (1) по каждому из контрольных объемов строится дискретный сеточный аналог. Следует заметить, что разбиение производится так, чтобы одна из узловых точек располагалась в точности на границе между теплозащитным слоем и F -слоем.

В качестве базового набора параметров были приняты следующие значения входящих в задачу констант: $\lambda_m = 1,25$; $\lambda_t = 1$; $c_m = 0,74$; $c_m = 1$; $q_m = 5,08$; $h = 0,2$; $\lambda_c = 0,76$; $c_c = 0,74$; $T_\phi = 0,75$; $A = 10$.

На приводимых ниже рисунках представлены результаты численного анализа рассматриваемой задачи, позволяющего оценить влияние параметров теплоизоляционного слоя на процесс распространения зоны фазовых превращений в твердой пористой среде. Так, на рис.2 представлены результаты расчетов, показывающие влияние коэффициента теплопроводности λ_c вещества, составляющего теплозащитный слой, на радиальную глубину проникновения зоны фазового равновесия в область, занятую веществом с жидкими включениями. Как и следовало ожидать, с уменьшением λ_c не только снижается темп нарастания слоя с влагой в твердом состоянии, но и увеличивается время задержки $\tau_{\phi\Pi}$ процесса распространения волны фазовых превращений.

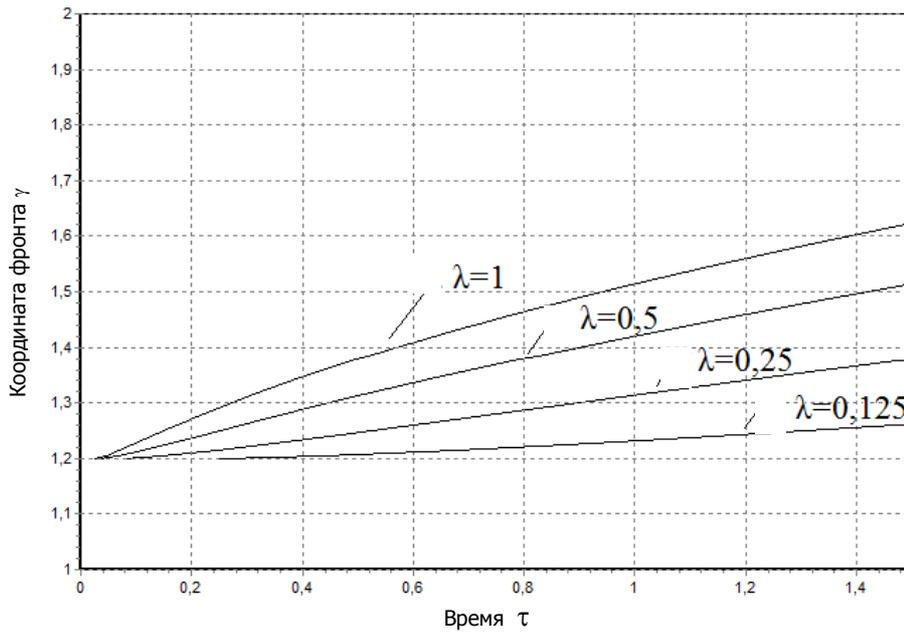


Рис.2. Динамика зоны фазового превращения при различных значениях коэффициента теплопроводности λ_c теплозащитного слоя

На рис.3 представлена зависимость безразмерного радиуса зоны кристаллизации влаги в среде от величины коэффициента теплопроводности теплозащитного слоя за определенный промежуток времени, который в рассматриваемом случае имеет значение 1,3. Из рисунка видно, что существует значение $\lambda_c = \lambda_0$, ниже которого в течение указанного промежутка времени фазовые превращения в пористой среде не наблюдаются.

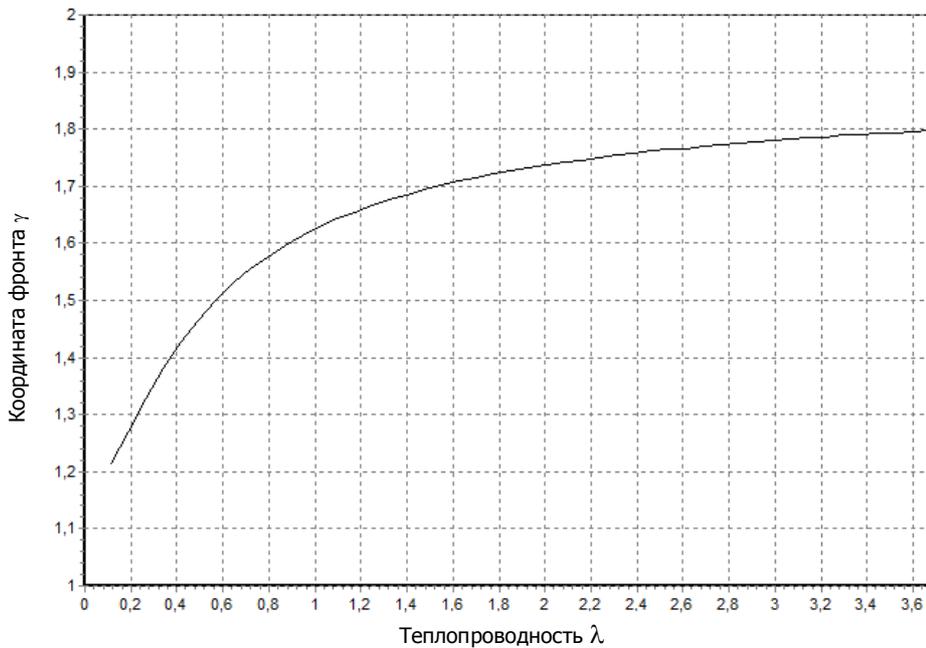


Рис.3. Зависимость размера слоя с кристаллизовавшейся влагой от значения коэффициента теплопроводности вещества теплозащитного слоя за время $t=1,3$

Разработанный алгоритм численного решения позволяет производить количественную оценку влияния теплопроводящих свойств изоляционного материала при фиксированной толщине защитного слоя и, в том числе, определять пороговое значение λ_c , ниже которого распространение процесса фазового превращения за указанный промежуток времени не происходит.

Влияние режима теплообмена на цилиндрической стенке осевой полости на динамику процесса фазовых превращений показано на рис.4. Режим конвективного теплообмена на границе между потоком хладагента (например, газовым потоком) и кольцевым теплозащитным слоем определяется величиной коэффициента теплоотдачи A , который тем больше, чем выше интенсивность циркуляции хладагента вдоль цилиндрической стенки. Анализ результатов численных расчетов показывает, что при фиксированных прочих параметрах задачи, начиная с некоторого значения, дальнейшее повышение коэффициента теплоотдачи (соответственно, увеличение скорости обтекания стенки) не оказывает существенного влияния на темп распространения процесса фазового перехода в пласте. Это обусловлено тем, что для больших A время охлаждения границы «хладагент – твердая среда» до температуры омывающего полость потока невелико и динамика процесса практически определяется скоростью теплопереноса в твердой фазе.

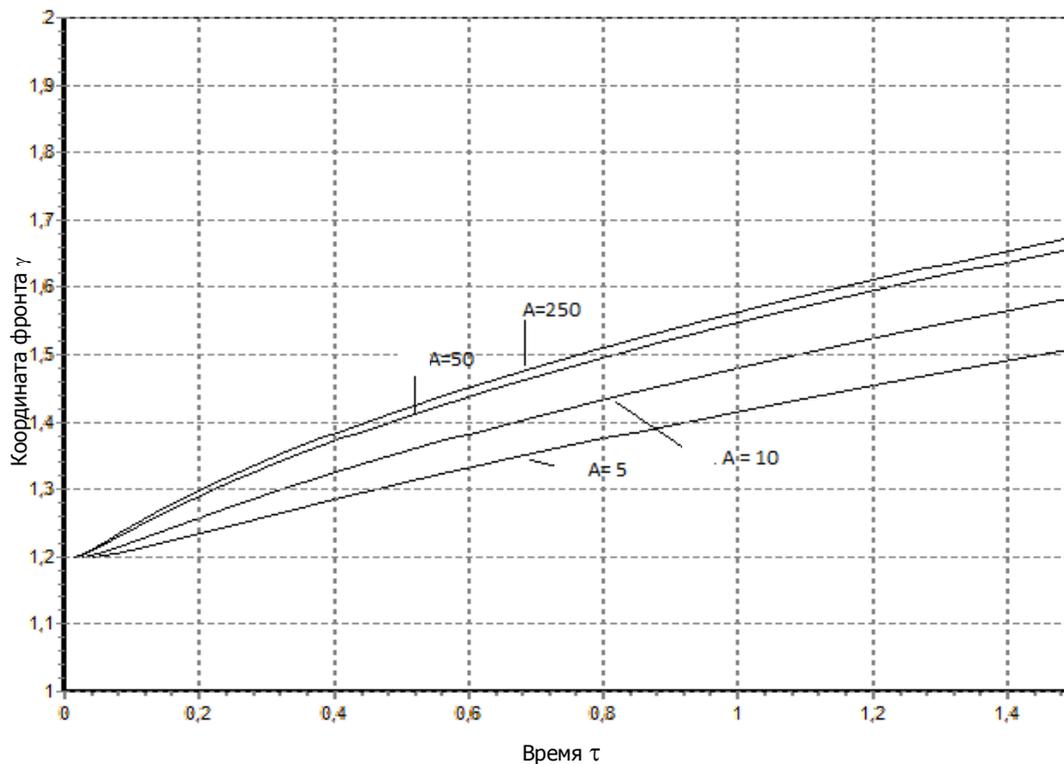


Рис.4. Динамика зоны фазового превращения при различных значениях коэффициента теплоотдачи A на цилиндрической стенке

Еще более отчетливо подтверждает данное обстоятельство рис.5, на котором приводится зависимость радиуса зоны отвердевания влаги от величины теплоотода за фиксированное время ($t=1,3$). В конкретном случае эти зависимости позволяют обосновать режим циркуляции хладагента вдоль границы твердой пористой среды.

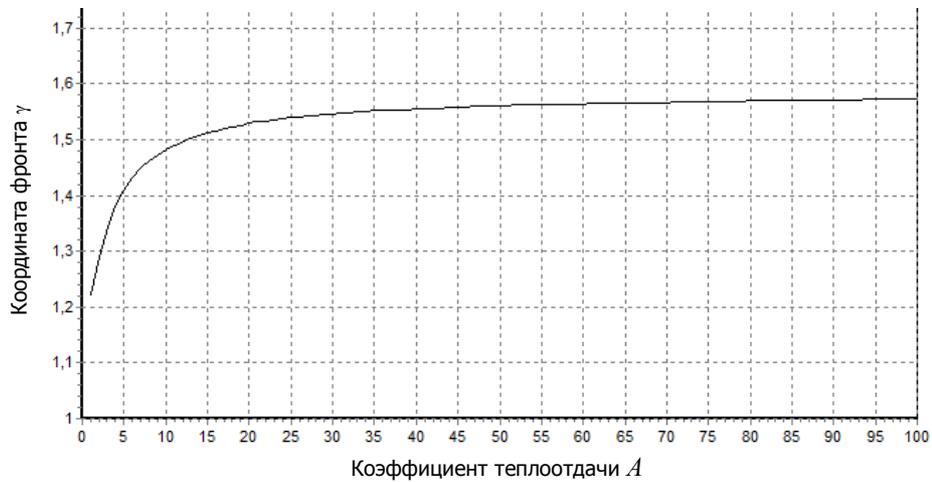


Рис.5. Положение фронта фазового равновесия по истечении времени $t=1,3$ в зависимости от значения коэффициента теплоотдачи на граничной цилиндрической стенке

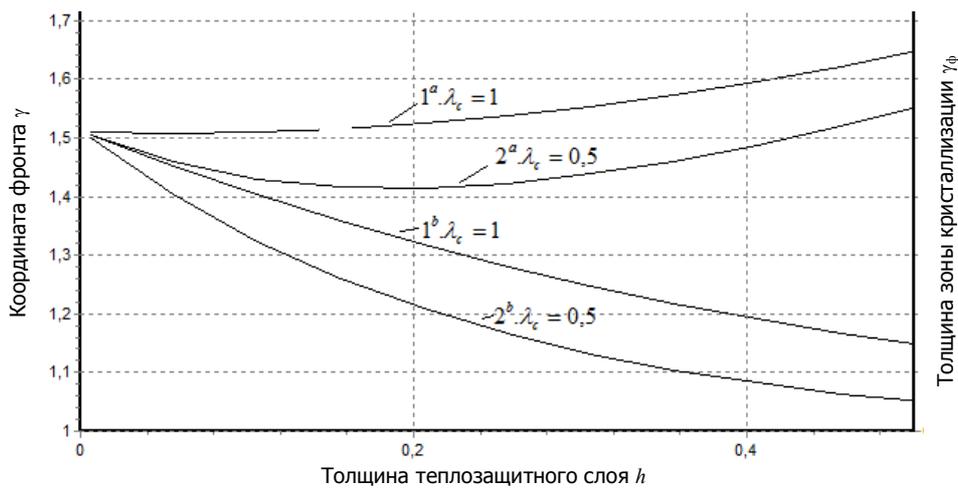


Рис.6. Расчетное положение фронта фазового равновесия и толщина зоны с твердыми включениями на момент времени $t=1,3$ в зависимости от толщины теплозащитного слоя

На рис.6 представлены результаты расчетов, позволяющие оценить влияние толщины теплозащитного слоя на глубину зоны кристаллизации. Как видно, с увеличением толщины изоляционной рубашки поперечный размер образовавшегося за фиксированное время ($t=1,3$) слоя с твердыми включениями (кривые 1^b и 2^b) монотонно падает. В то же время зависимость от той же величины радиуса фронта кристаллизации (кривые 1^a и 2^a) содержащейся в среде влаги, включающего совокупную толщину защитного и «мерзлого» слоев, имеет немонотонный характер. При этом наблюдающийся в этой зависимости минимум сдвигается в сторону больших значений толщины защитного слоя с уменьшением коэффициента теплопроводности λ_c последнего. С практической точки зрения, выявленные и имеющие количественное описание закономерности могут служить основанием для подбора теплоизоляционной прослойки, обладающей оптимальными по отношению к выдвигаемым критериям параметрами.

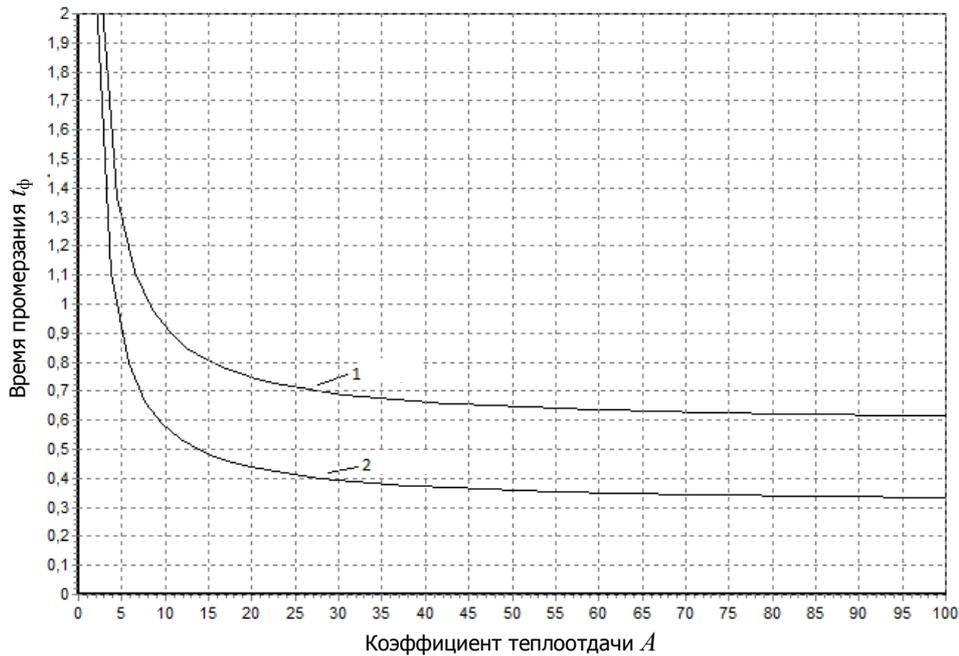


Рис.7. Время распространения фронта кристаллизации на расстояние $\Delta r = 0,2$ в зависимости от величины теплообмена на цилиндрической стенке: 1 – $h=0,2$; 2 – $h=0,1$

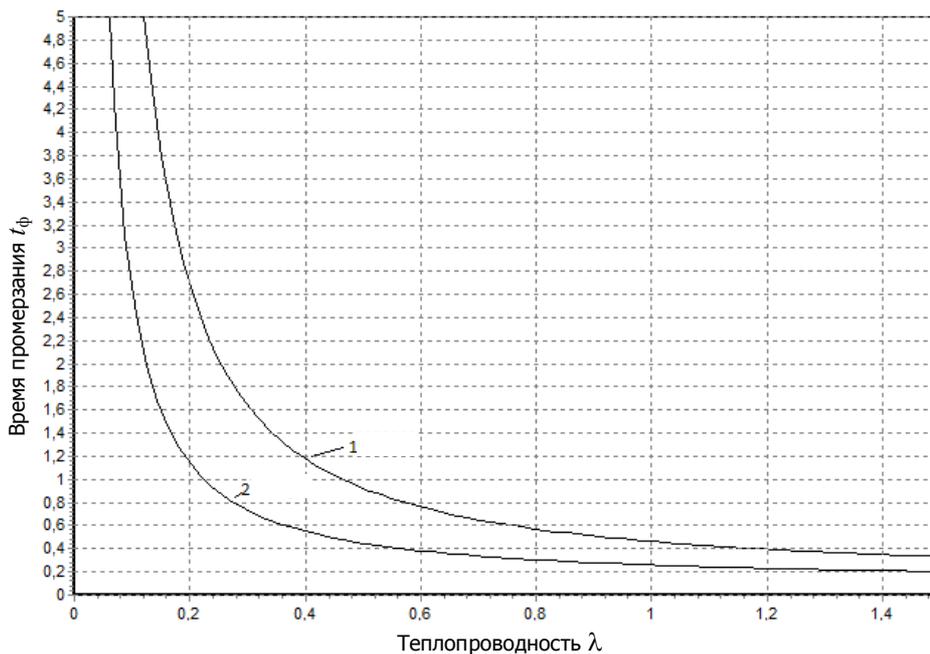


Рис.8. Время распространения фронта кристаллизации на расстояние $\Delta r = 0,2$ в зависимости от значения коэффициента теплопроводности λ_c теплоизоляционного слоя: 1 – $h=0,2$; 2 – $h=0,1$

На рис.7 и 8 представлены результаты расчета времени t_ϕ распространения процесса радиальной кристаллизации влаги в среде на определенное расстояние Δr (в рассматриваемом случае $\Delta r = 0,2$) для двух значений толщины h тепловой изоляции. Рис.7 иллюстрирует зависимость этого времени от интенсивности теплообмена на внутренней цилиндрической стенке, а рис. 8 – влияние теплопроводности защитного слоя на продолжительность процесса распространения фронта кристаллизации на указанную длину.

Заключение. Анализ полученных результатов показывает, что для управления процессом распространения зоны фазового равновесия претерпевающего фазовый переход компонента твердой пористой среды существует несколько возможностей. В частности, добиться требуемого теплового состояния твердого массива можно с помощью выбора подходящего режима конвективного теплообмена на его границе, используя наряду с этим изоляционный материал с определенными теплофизическими и структурными свойствами.

Библиографический список

1. Быков И.Ю. Осесимметричная задача о распространении фронта фазового превращения в мерзлом грунте / И.Ю. Быков, В.Н. Пушкин // Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море. – 2010. – № 2. – С. 38–41.

Материал поступил в редакцию 31.05.2011.

References

1. By`kov I.Yu. Osesimmetrichnaya zadacha o rasprostranenii fronta fazovogo prevrashheniya v myorzlom grunte / I.Yu. By`kov, V.N. Pushkin // Stroitel`stvo neftyany`x i gazovy`x skvazhin na sushe i na more. – 2010. – # 2. – S. 38–41. – In Russian.

AXISYMMETRIC PROBLEM ON PROPAGATION OF PHASE TRANSFORMATION FRONT IN HETEROGENEOUS SOLID POROUS MEDIUM IN TERMS OF BOUNDARY HEAT TRANSFER AND PRESENCE OF CENTRAL HEATPROOF RING LAYER

A.V. GOLOVNYA, I.S. KALYAKIN

(Ukhta State Technical University),

R.A. NEYDORF

(Don State Technical University),

V.N. PUSHKIN

(Ukhta State Technical University)

An axisymmetric problem on propagation of the phase transformation front in the solid porous medium in conditions of the boundary heat transfer in the presence of heatproof layer is considered. The parametric analysis that permits to determine the influence of the heat flow rate on the boundary, and the thermophysical properties of the insulating layer on the parameters of the phase transformation wave is made.

Keywords: *solid porous medium, phase transformation, front propagation, axisymmetric Stefan problem, heatproof layer, numerical solution.*