

УДК 532.593

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СЛОЕВ ЖИДКОСТИ

В.В. ТРЕПАЧЁВ

(Донской государственный технический университет)

Проведено исследование дифракционного движения двух слоев несжимаемой тяжелой жидкости вокруг вертикальной круговой опорной колонны. Использовано приближение твердой крышки для выделения воздействия только внутренней волны. Результаты исследования распространяются на все возможные масштабы волнового движения слоев жидкости как натурального наблюдения, так и лабораторного испытания.

Ключевые слова: *слои жидкости, опорная колонна, сила нагрузки, волна внутренняя, диссипация, дифракция, межфазное натяжение, приближение твердой крышки.*

Введение. Воздействие солнечного излучения на водную поверхность часто приводит к образованию летней устойчивой двухслойной стратификации жидкости в океане. Различные виды поверхностного опреснения жидкости также приводят к разделению одной и той же жидкости на два слоя разной плотности. На границе вод разной плотности существует межфазное натяжение, что подтверждено наблюдениями [1]. В технологиях очистки и переработки ряда жидкостей используют двухслойные пакеты жидкости, изолированные от внешней среды твердым дном и крышкой. Была предложена модель для точного выделения эффектов внутренней волны с помощью приближения твердой крышки. Эти положения использованы для обоснования применяемой теоретической модели. Возникновение неустойчивости Кельвина – Гельмгольца слоев жидкости при их течении под углом друг к другу изучено в [2]. Случай дифракции поверхностной волны на круговой опорной колонне в однослойной жидкости в [3] рассмотрен без учета влияния диссипации энергии и поверхностного натяжения. Таким образом, из полученных результатов теория вытекает в виде частного случая [3].

Постановка задачи. Рассмотрим движение двух слоев идеальной несжимаемой тяжелой жидкости в отсутствии вихрей. Верхний слой жидкости имеет постоянные плотность ρ_1 и толщину h_1 , он сверху ограничен горизонтальной жесткой пластиной, называемой твердой крышкой. Нижний слой жидкости имеет постоянные плотность ρ_2 и толщину h_2 , он снизу ограничен жестким горизонтальным дном. Стратификация жидких слоев является устойчивой, что соответствует неравенству $\rho_1 < \rho_2$. При этом более плотный слой жидкости находится внизу. Учитывается наличие действия малых рассеивающих энергию массовых сил, которые пропорциональны скорости движения жидкости согласно теории, предложенной Рэлеем [4].

Считаем, что верхний и нижний слой имеют одинаковый коэффициент диссипации $\mu > 0$. При наличии сил диссипации Рэлея соблюдается теорема Лагранжа о сохранении потенциальности движения жидкости [4]. Потенциальное движение слоев жидкости описывается с помощью двух потенциалов скорости: Φ_1 для значений $0 < z < h_1$, Φ_2 при $-h_2 < z < 0$, где z – вертикальная координата. Начало декартовой системы координат $Oxyz$ выбрано на невозмущенной границе раздела жидкостей. В направлении оси x распространяется внутренняя гармоническая волна, имеющая некоторую круговую частоту колебаний ω и волновое число k ,

$$\eta_0 = \exp[-i(kx - \omega t)], \quad (1)$$

где t – время, $\omega > 0$, i – мнимая единица, $k = k_1 - ik_2$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Длина волны равна $2\pi / k_1$.

Плоская волна, имеющая постоянный амплитудный множитель η_0 , затухает вдоль направления своего распространения, k_2 – коэффициент затухания бегущей волны. На границе раздела жидкостей учитывается влияние межфазного натяжения с помощью коэффициента меж-

фазного натяжения α . Внутри жидкости расположен жесткий неподвижный вертикальный круговой цилиндр, который занимает следующую осесимметричную область:

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad -h_2 \leq z \leq h_1. \quad (2)$$

Круговой цилиндр представляет собой препятствие на пути внутренней волны (1). Вся боковая поверхность цилиндра рассеивает внутреннюю волну. Поле рассеянных волн неизвестно и может быть найдено из решения краевой задачи во внешней области по отношению к круговому цилиндру (2). Вводим потенциалы скоростей и форму границы раздела слоев $\zeta(x, y, t)$:

$$\Phi_1 = \phi_1(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad \Phi_2 = \phi_2(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad \zeta = \eta(x, y)e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Давление в разных слоях жидкости определяем с помощью интегральных соотношений линейной теории:

$$P_1 = -\rho_1[(i\omega + \mu)\phi_1 e^{i\omega t} + gz], \quad 0 < z < h_1; \quad P_2 = -\rho_2[(i\omega + \mu)\phi_2 e^{i\omega t} + gz], \quad -h_0 < z < 0, \quad (4)$$

в которых опущены произвольные постоянные и функции времени [3, 4].

Постановка краевой задачи для потенциалов скорости принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < z < h_1; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = 0, \quad -h_2 < z < 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = i\omega \eta(x, y), \quad z = 0; \quad (7)$$

$$\rho_2 \left[(\omega^2 - i\mu\omega)\phi_2 - g \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right] - \rho_1 \left[(\omega^2 - i\mu\omega)\phi_1 - g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right] - \alpha \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial z^3} = 0, \quad z = 0; \quad (8)$$

$$\eta(x, y) = \eta_0 e^{-ikx} + \eta_2(x, y); \quad (9)$$

$$\eta_2(x, y) \rightarrow 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \infty; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = 0, \quad r = a, \quad 0 < z < h_1; \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial r} = 0, \quad r = a, \quad -h_2 < z < 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0, \quad z = h_1; \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0, \quad z = -h_2. \quad (12)$$

Уравнения Лапласа (5), (6) получены из условий неразрывности для слоев несжимаемой жидкости. Кинематическое условие (7) указывает на непрерывность вертикальной скорости на границе раздела жидкостей. В (8) представлено динамическое условие на границе раздела слоев жидкостей, которое учитывает влияние эффекта межфазного натяжения наличием коэффициента α . Межфазное натяжение вызывает скачок нормального давления на границе раздела. Соотношение (9) отражает структуру рассматриваемого волнового движения слоев жидкости. Первое слагаемое имеет известное значение амплитуды η_0 и представляет собой бегущую волну, которая называется падающей внутренней волной. Соответственно второе слагаемое называется рассеянной волной $\eta_2(x, y)$. Диссипация энергии и кольцевая расходимость волн вызывают согласно условию (10) затухание волнового движения границы раздела для слоев жидкости на бесконечном расстоянии от начала координат. Граничные условия на боковой поверхности цилиндра в (11) указывают на отсутствие нормальной скорости жидких слоев на ней. Постоянная величина a равна радиусу вертикального цилиндра, рассеивающего на своей поверхности волну (1).

Граничные условия на горизонтальных поверхностях в (12) указывают на отсутствие нормальной скорости жидкости на них. Граничные условия (11) и (12) называются условиями непроницаемости для поверхностей, ограничивающих область течения идеальной жидкости.

Построение решения. Решение для потенциалов скорости краевой задачи (1) – (12) имеет вид функций:

$$\phi_1(x, y, z) = -\frac{i\omega \operatorname{ch}[k(z - h_1)]}{k \operatorname{sh}(kh_1)} \eta(x, y); \quad (13)$$

$$\phi_2(x, y, z) = \frac{i\omega \operatorname{ch}[k(z + h_2)]}{k \operatorname{sh}(kh_2)} \eta(x, y), \quad (14)$$

которые удовлетворяют кинематическому условию (7), граничным условиям непроницаемости на горизонтальных плоскостях в виде дна и твердой крышки в (12). Функция $\eta(x, y)$, заданная соотношением (9), содержит неизвестное слагаемое в виде внутренней волны $\eta_2(x, y)$, рассеянной на цилиндре. Рассеянная внутренняя волна $\eta_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial y^2} + k^2 \eta_2 = 0, \quad (15)$$

а также двум граничным условиям:

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial r} = -\eta_0 \frac{\partial e^{-ikr}}{\partial r}, \quad r = a; \quad (16)$$

$$\eta_2(r, \theta) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Декартовы координаты и полярные координаты в формулах (15) – (17) связаны известными соотношениями: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Волновое число, входящее в соотношения (1), (9), (13), (14), (16) и уравнение (15), удовлетворяет дисперсионному соотношению внутренней волны на границе раздела двух слоев жидкостей

$$(\omega^2 - i\omega\mu)[\operatorname{cth}(kh_2) + \gamma \operatorname{cth}(kh_1)] = gk[(1 - \gamma) + \beta k^2]. \quad (18)$$

Определяем параметры γ, β , которые входят в дисперсионное уравнение (18),

$$\gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\rho_2 g}. \quad (19)$$

Параметр γ имеет смысл относительной плотности слоев жидкости. В случае

$$0 \leq \gamma < 1 \quad (20)$$

движение двухслойной жидкости устойчиво по Кельвину – Гельмгольцу [2]. Действительно, принимая $\mu = 0$, находим из (18), что каждому действительному значению волнового числа k соответствует два действительных значения частоты колебаний ω при выполнении двойного неравенства (20). Полагая $\mu = 0$, $\gamma = 0$ в уравнении (18), выводим в виде частного случая дисперсионное соотношение для поверхностных волн [3].

В рассматриваемой задаче частота колебаний принимает действительное значение, а волновое число – комплексное число, удовлетворяющее неравенствам, наложенным на его действительную и мнимую части в (1). Экспоненту, входящую в условие (16), следует представить в виде тригонометрического ряда согласно формуле 8.511₄ из [6]

$$e^{-kr \cos \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^m J_m(kr) \cos(m\theta), \quad (21)$$

где $J_m(z)$ – функция Бесселя первого рода [6], $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 2, \dots$.

Решение уравнения Гельмгольца (15) отыскиваем в виде разложения по функциям Бесселя третьего рода (функциям Ханкеля) $H_m^{(2)}(z)$ [6], которые удовлетворяют условию убывания на бесконечности (17) при комплексном значении волнового числа

$$\eta_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kr) \cos(n\theta), \quad r \geq a. \quad (22)$$

Неизвестные коэффициенты B_n определяются из граничного условия на поверхности цилиндра (16)

$$B_n = -\frac{\varepsilon_n (-i)^n J'_n(\xi)}{H_n^{(2)}(\xi)} \eta_0, \quad \xi = ka, \quad (23)$$

где штрих означает первую производную по безразмерной переменной $\xi = ka$, которая имеет смысл безразмерного волнового числа. Построенное решение уравнения Гельмгольца (15) удовлетворяет всем поставленным условиям, т. е. (16) и (17).

Подставляя (22) и (23) в (9), находим формулу для расчета формы поверхности для границы раздела слоев жидкости $\eta(r, \theta)$ в виде ряда в полярной системе координат

$$\eta(r, \theta) = \eta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n \left[J_n(kr) - \frac{J'_n(\xi)}{H_n^{(2)}(\xi)} H_n^{(2)}(kr) \right] \cos(n\theta), \quad r \geq a. \quad (24)$$

Формула (24) описывает суперпозицию падающей волны и рассеянной волны. Подставляя формулу (24) в соотношения (13) и (14), определяем формулы расчета потенциалов скоростей, преобразованные формулы (13) и (14) в каждое интегральное соотношение линейной теории (4), находим законы распределения давления в каждом из слоев жидкости.

Полагая, что $r = a$ в (4), выводим законы распределения давления слоев жидкости на поверхности вертикальной круговой колонны

$$P_1(a, \theta, z) = -\rho_1 \left[(\omega^2 - i\mu\omega) \frac{\text{ch}[k(z - h_1)]}{k \text{sh}(kh_1)} \eta(a, \theta) e^{i\omega t} + gz \right], \quad 0 < z < h_1; \quad (25)$$

$$P_2(a, \theta, z) = \rho_2 \left[(\omega^2 - i\mu\omega) \frac{\text{ch}[k(z + h_2)]}{k \text{sh}(kh_2)} \eta(a, \theta) e^{i\omega t} - gz \right], \quad -h_2 < z < 0.$$

Давление состоит из динамической и гидростатической составляющих. Функция $\eta(a, \theta) e^{i\omega t}$ в (25) определяет форму возвышения границы раздела непосредственно на самой поверхности цилиндрической колонны

$$\eta(a, \theta) = -\frac{2i\eta_0}{\pi\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n \frac{\cos(n\theta)}{H_n^{(2)}(\xi)}. \quad (26)$$

Формула амплитуды колебаний (26) выводится из (24) с помощью соотношения 8.477₁ из [6].

Сила $\bar{F}$, действующая на цилиндрическую опору, находится путем вычисления поверхностного интеграла от законов распределения давления слоев жидкости на поверхности колонны (25) и имеет вид

$$\bar{F} = -a \int_0^{2\pi} \cos \theta \left(\int_{-h_2}^0 P_2(a, \theta, z) dz + \int_0^{h_1} P_1(a, \theta, z) dz \right) d\theta \bar{i} =$$

$$= \frac{4(\rho_2 - \rho_1)g\eta_0}{\xi H_1^{(2)}(\xi)} \frac{a[(1 - \gamma) + \beta k^2]}{k[\text{cth}(kh_2) + \gamma \text{cth}(kh_1)]} e^{i\omega t} \bar{i}, \quad \xi = ka, \quad (27)$$

где $\bar{i}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси x . Решение для случая однослойной жидкости, которое описывает только воздействие поверхностных волн на вертикальную колонну [3], вытекает из полученного решения в виде частного случая, соответствующего значениям плотности верхнего слоя $\rho_1 = 0$, коэффициента диссипации энергии $\mu = 0$, коэффициента межфазного натяжения $\alpha = 0$.

Заключение. 1. Давление слоев жидкости на поверхность колонны (25) испытывает скачок первого рода на границе раздела.

2. Увеличение межфазного натяжения при фиксированном значении волнового числа увеличивает величину модуля силовой нагрузки (27).

3. Уменьшение скачка плотности $\rho_2 - \rho_1$ при фиксированном значении волнового числа уменьшает величину модуля силовой нагрузки (27).

Библиографический список

1. Айзатуллин Т.Ф. Океан. Активные поверхности и жизнь / Т.Ф. Айзатуллин, В.Л. Лебедев, К.М. Хайлов. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 192 с.

2. Трепачёв В.В. Неустойчивость Кельвина – Гельмгольца потоков жидкости, текущих под углом друг к другу над ровным дном / В.В. Трепачёв, Г.Н. Трепачёва // Современ. проблемы механики сплош. среды: тр. XIV Междунар. конф. – Т. 2. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010. – С. 286–289.

3. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля / М.Д. Хаскинд. – М.: Наука, 1973. – 327 с.

4. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости / Л.Н. Сретенский. – М.: Наука, 1977. – 816 с.

5. Вапняр Д.И. Планетарные волны и течения в экваториальной зоне океана / Д.И. Вапняр. – Киев: Наукова думка, 1976. – 222 с.

6. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений: справочник / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

Материал поступил в редакцию 20.07.11.

References

1. Ajzatullin T.F. Okean. Aktivny`e poverxnosti i zhizn` / T.F. Ajzatullin, V.L. Lebedev, K.M. Hajlov. – L.: Gidrometeoizdat, 1979. – 192 s. – In Russian.

2. Trepachyov V.V. Neustojchivost` Kel`vina – Gel`mgol`cza potokov zhidkosti, tekushhix pod uglom drug k drugu nad rovny`m dnom / V.V. Trepachyov, G.N. Trepachyova // Sovrem. problemy` mexaniki splosh. sredy`: tr. XIV Mezhdunar. konf. – T. 2. – Rostov n/D: Izd-vo YUFU, 2010. – S. 286–289. – In Russian.

3. Xaskind M.D. Gidrodinamicheskaya teoriya kachki korablya / M.D. Xaskind. – M.: Nauka, 1973. – 327 s. – In Russian.

4. Sretenskij L.N. Teoriya volnovy`x dvizhenij zhidkosti / L.N. Sretenskij. – M.: Nauka, 1977. – 816 s. – In Russian.

5. Vapnyar D.I. Planetarny`e volny` i techeniya v e`kvatorial`noj zone okeana / D.I. Vapnyar. – Kiev: Naukova dumka, 1976. – 222 s. – In Russian.

6. Gradshtejn I.S. Tablicy` integralov, summ, ryadov i proizvedenij: spravochnik / I.S. Gradshtejn, I.M. Ry`zhik. – M.: Nauka, 1971. – 1108 s. – In Russian.

LIQUID LAYERS MOTION INVESTIGATION

V.V. TREPACHEV

(Don State Technical University)

The diffraction motion of two layers of the incompressible heavy liquid around the vertical circular support column is investigated. The hard cover approaching is used to distinguish internal wave alone. The research data are extended to the utmost scope of the wave motion of the liquid layers of both the field studies and lab tests.

Keywords: liquid layers, support column, load force, internal wave, dissipation, diffraction, interfacial tension, hard cover approaching.