

УДК 512.667.7+512.554.32

О КЛАССИФИКАЦИИ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЯНГИАНА СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ $sl(1, 2)^*$

В.А. СТУКОПИН

(Донской государственный технический университет)

Получена классификация неприводимых конечномерных представлений янгиана супералгебры Ли $sl(1,2)$ – супералгебры Хопфа, имеющей многочисленные применения в современной теоретической и математической физике. Предложены возможные приложения полученного результата в математической физике.

Ключевые слова: янгиан, супералгебра Ли, неприводимое представление, модуль, супералгебра Хопфа.

Введение. Описание неприводимых представлений янгианов является важной задачей для теории точно решаемых моделей статистической механики и квантовой теории поля. С точки зрения теории янгианов конструкция трансфер-матрицы основана на нахождении образа универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана [1] при действии тензорного произведения неприводимого представления и тождественного отображения. Вычисление спектра гамильтониана и корреляционных функций также может быть проведено на основе теории представлений янгианов при использовании формулы для универсальной R-матрицы. Поэтому теория представлений янгианов простых и редуктивных алгебр Ли является хорошо изученной, которая начала развиваться еще до появления самого термина – янгиан. В противоположность этому теория янгианов супералгебр Ли является относительно молодой дисциплиной, первые результаты в которой были получены во второй половине 90-х годов. К настоящему времени число приложений теории янгианов супералгебр Ли значительно выросло, в частности, проявилась связь с квантовой теорией суперструн и теорией калибровочных полей Янга – Миллса, играющих важнейшую роль в современной фундаментальной физике [2, 3].

В работе исследуются представления янгианов супералгебр Ли типа $sl(1,2)$ [4], основной результат – теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана базисной супералгебры Ли типа $sl(n, m)$. Рассматривается простейший случай супералгебры Ли $sl(1,2)$ наиболее близкой по свойствам к простой алгебре Ли типа $sl(2)$, который позволяет продемонстрировать все существенные черты развиваемой теории.

Были использованы следующие стандартные обозначения: C – поле комплексных чисел, N – множество натуральных чисел, Z_+ – множество неотрицательных целых чисел.

Формулировка основного результата. Пусть $g = sl(1,2) = A(0,1)$ – базисная супералгебра Ли, определяемая следующей матрицей Картана $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ [4]. Янгиан $Y(g) = Y(sl(1,2))$ [5, 7] – ассоциативная супералгебра над кольцом формальных степенных рядов $C[[\hbar]]$, порожденная образующими $x_{i,r}^\pm, h_{j,k}, i, j \in I = \{1,2\}, r, k \in Z_+$, степени которых определяются формулами: $\deg(x_{2,s}^\pm) = \deg(h_{1,s}) = \deg(h_{2,s}) = 0, \deg(x_{1,s}^\pm) = 1, s \in Z_+$, удовлетворяющие следующей системе определяющих соотношений [7, определение 2]:

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09-01-00671-а), а также федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» в рамках мероприятия 1.2.2 (госконтракт П1116).

$$\begin{aligned}
[h_{i,k}, h_{j,l}] &= 0, i, j = 1, 2; k \in Z_+; \\
[x_{i,k}^+, x_{j,l}^-] &= \delta_{i,j} h_{i,k+l}, i, j \in I = \{1, 2\}, k, l \in Z_+; [h_{i,0}, x_{j,k}^\pm] = \pm a_{ij} x_{j,k}^\pm, i, j = 1, 2; k \in Z_+; \\
[x_{i,k+1}^\pm, x_{j,l}^\pm] &= [x_{i,k}^\pm, x_{j,l+1}^\pm] \pm \frac{a_{ij}}{2} \{h_{i,k}, x_{j,l}^\pm\}, i, j = 1, 2; k, l \in Z_+; \\
[x_{i,k}^\pm, [x_{i,l}^\pm, x_{j,r}^\pm]] &+ [x_{i,l}^\pm, [x_{i,k}^\pm, x_{j,r}^\pm]] = 0, i, j = 1, 2; k, l, r \in Z_+.
\end{aligned}$$

Здесь a_{ij} – элементы матрицы Картана $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $[a, b] = ab - (-1)^{\deg(a) \deg(b)} ba$ обо-

значает коммутатор, $\{a, b\} = ab + (-1)^{\deg(a) \deg(b)} ba$ – антикоммутатор элементов a, b . Отметим, что элементы янгиана степени 0 называются четными, а степени 1 – нечетными.

Замечание 1. Заметим, что $Y(g)$ является на самом деле супералгеброй Хопфа [7], но для формулировки основного результата структура коумножения не требуется, поэтому ее описание структуры опускается.

Пусть V – модуль над янгианом $Y(g)$ супералгебры Ли $g = sl(1, 2)$, $\bar{d} = \{d_{i,r}\}; i \in I, r \in Z_+$ – набор комплексных чисел. Будем обозначать через $V_{\bar{d}}$ и называть весовым подпространством модуля V подпространство $V_{\bar{d}} = \{v \in V : h_{i,r} v = d_{i,r} v\}$, при этом $\bar{d} = \{d_{i,r}\}$ – вес янгианного модуля. Необходимо описать структуру конечномерных модулей над янгианом $Y(g)$, а также сформулировать необходимые и достаточные условия того, что неприводимый модуль является конечномерным.

Вектор $v \in V$ называется примитивным, если $v \in V_{\bar{d}}$ и $x_{i,r}^\pm v = 0$ для всех $i \in I, r \in Z_+$, а модуль V модулем со старшим весом, если он порождается примитивным вектором, т. е. $V = Y(g)v$ для некоторого примитивного вектора $v \in V_{\bar{d}}(\bar{d})$. Модуль V со старшим весом $\bar{d}$ будем также обозначать через $V = V(\bar{d})$.

Главный результат работы – теорема о классификации неприводимых конечномерных янгианских модулей.

Теорема. 1) Каждый неприводимый конечномерный $Y(A(0,1))$ -модуль V является модулем со старшим весом $\bar{d}$, т. е. $V = V(\bar{d})$.

2) Модуль $V(\bar{d})$ конечномерен тогда и только тогда, когда существуют многочлен P_2^d , а также многочлены P_1^d, Q_1^d , удовлетворяющие следующим условиям: все многочлены со старшими коэффициентами, равны 1;

$$\frac{P_2^d(u+1)}{P_2^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{2,k} u^{-k-1}, \quad (1)$$

$$\frac{P_1^d(u)}{Q_1^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{1,k} u^{-k-1}. \quad (2)$$

Доказательство основного результата. Приведем схему доказательства теоремы 1, дающей классификацию неприводимых конечномерных представлений янгиана $Y(sl(1, 2))$. Обозначим через $\bar{B}_{1,n}, \bar{B}_{2,n}$ линейные оболочки следующих векторов:

$$\bar{B}_{1,n} = \langle x_{1,k_1}^- x_{1,k_2}^- \dots x_{1,k_r}^- v_+ \mid k_1 + 1 + \dots + k_r + 1 \leq n \rangle, \quad (3)$$

$$\bar{B}_{2,n} = \langle (x_{1,k_1}^-)^{t_1} (x_{1,k_2}^-)^{t_2} \dots (x_{1,k_r}^-)^{t_r} v_+ \mid t_1(k_1 + 1) + \dots + t_r(k_r + 1) \leq n \rangle. \quad (4)$$

Лемма 1. Если $\bar{B}_{1,n} = \bar{B}_{1,n+1}$, то $\bar{B}_{1,n} = \bar{B}_{1,n+k}$ для произвольного натурального числа $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $a \in \bar{B}_{1,n}$. Покажем сначала, что любой вектор из $\bar{B}_{1,n+k}$ можно представить как образ $\bar{B}_{1,n}$ при действии картановской подалгебры $\mathcal{H} = \{h_{1,k}, h_{2,k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$, именно $\bar{B}_{1,n+k} \subset \mathcal{H}\bar{B}_{1,n}$. При $k = 1$ этот факт вытекает из условия леммы. Пусть теперь $k = 2$. Потребуется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} h_{i,1}x_{j,n}^-v_+ &= x_{j,n}^-h_{i,1}v_+ + [h_{i,1}, x_{j,n}^-]v_+ = x_{j,n}^-h_{i,1}v_+ + [h_{i,0}, x_{j,n+1}^-]v_+ + \\ &+ (a_{ij}/2)(h_{i,0}x_{j,n}^- + x_{j,n}^-h_{i,0})v_+ = d_{i,1}x_{j,n}^-v_+ + a_{ij}x_{j,n+1}^-v_+ + (a_{ij}/2)(h_{i,0}x_{j,n}^- + x_{j,n}^-h_{i,0})v_+ = \\ &= a_{ij}x_{j,n+1}^-v_+ + (d_{i,1} + a_{ij}/2)(2d_{i,0} + a_{ij})x_{j,n}^-v_+. \end{aligned}$$

Используя это соотношение, докажем лемму.

Пусть $a \in \bar{B}_{1,n+2}$, тогда $a = \sum_{s=1}^r x_{i_s, k_s}^- b_s v_+$. Представим элемент a в виде

$$a = \sum_{s=1}^r a_{i_s-1, i_s}^{-1} [h_{i_s-1, 1}, x_{i_s, k_s-1}^-] b_s v_+. \quad (5)$$

Используя несколько раз приведенные выше два коммутационных соотношения, можно представить элемент a в виде суммы элементов из $\bar{B}_{1,n+1}$ и произведения $x_{i_s, 1}^-$ и элемента из $\bar{B}_{1,n+1}$. Так как каждый элемент из $\bar{B}_{1,n+1}$ содержится в $\bar{B}_{1,n}$, то последовательно получаем, что $a \in \bar{B}_{1,n+1}$ и, следовательно, в силу условия леммы $a \in \bar{B}_{1,n}$. Лемма доказана.

Пусть теперь $x^-(n) = x_{1, k_1}^- \dots x_{1, k_r}^-$, $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, $k_r < k_{r-1} < \dots < k_1$.

Лемма 2. Если вектор $x^-(n+1) \in \bar{B}_{1,n}$, то и вектор $x^-(n+k+1) \in \bar{B}_{1,n}$ для произвольного числа $k \in \mathbb{Z}_+$.

Следует отметить, что леммы 1 и 2 эквивалентны. Формулировка второй леммы бывает иногда удобнее для применения.

Докажем теперь теорему. П.1 теоремы доказывается относительно стандартными для теории представлений рассуждениями. Поэтому несколько подробнее остановимся на схеме доказательства п.2, которое в большей степени использует особенности структуры янгиана. Покажем, достаточно схематично, как утверждение теоремы выводится из сформулированных выше лемм. Введем производящую функцию образующих:

$$x_i^- = \sum_{s=1}^{\infty} x_{i,s}^- u^{-s-1}, i = 1, 2.$$

Из доказанных лемм вытекает, что $x_i^-(u)v_+ = \sum_{m=0}^N \beta_m^i(u)v_{i,m}$, где векторы $\{v_{i,m}\}$ образуют базис в $\bar{B}_{i,n}$, $i = 1, 2$. Фактически может быть получен явный вид для функций $\beta_m^i(u)$. Будем использовать $\beta_m(u)$ вместо $\beta_m^1(u)$. Здесь следует отметить, что вид $\beta_m^2(u)$, по существу, известен, как и все результаты, относящиеся к четным образующим. Они вытекают из описания неприводимых представлений янгиана алгебры Ли $sl(2)$. Поэтому остановимся только на доказательстве результатов, относящихся к нечетной части янгиана $Y(sl(1, 2))$. Потребуется часть определяющих соотношений в янгиане в специальной форме:

$$[h_2(u), x_1^-(t)] = \frac{h_2(u)(x_1^-(t) - x_1^-(u)) + (x_1^-(t) - x_1^-(u))h_2(u)}{u - t}; \quad (6)$$

$$[h_2(u), x_1^-(t)] = 0. \quad (7)$$

Пусть $v_{1,k} = x_{1,k}^- v_+$, тогда соотношение имеет вид

$$x_1^-(u) = \sum_{i=0}^N \beta_i(u) v_{1,i}. \quad (8)$$

Отметим, что

$$x_1^-(u) v_+ = \sum_{k=0}^{\infty} x_{1,k}^- u^{-k-1} v_+ = \sum_{k=0}^N x_{1,k}^- u^{-k-1} v_+ + \sum_{k=N+1}^{\infty} x_{1,k}^- u^{-k-1} v_+ = \sum_{k=0}^N x_{1,k}^- u^{-k-1} v_+ + \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_k^i u^{-i-1} v_{1,k}.$$

Обозначим $\varphi_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_k^i u^{-i-1}$, и пусть $\tilde{\varphi}_k(u) = u^{-k-1} + \varphi_k(u)$, следовательно

$$\varphi_k^{i+1} - \varphi_{k-1}^i - \varphi_N^i \varphi_N^0 = 0, \quad k \geq 0; \quad (9)$$

$$\varphi_0^{i+1} - \varphi_N^i \varphi_0^0 = d_{1,n+k+1} - \sum_{j=0}^N \varphi_j^i d_{1,j}. \quad (10)$$

Доказываются соотношения (9), (10) по индукции, на основе системы определяющих соотношений в янгиане и соотношений (6) – (8). Подробные доказательства этих соотношений громоздки, они опускаются. Из полученных соотношений при помощи несложных преобразований и получаются доказываемые соотношения (2). Теорема доказана.

Замечание 2. Многочлены, участвующие в формулировке теоремы, можно рассматривать как аналоги старших весов представления супералгебры Ли. Таким образом, теорема является аналогом для янгианов результата, полученного В. Г. Кацем [8], дающего классификацию неприводимых представлений базисной супералгебры Ли в терминах старших весов. При этом степень многочлена является аналогом целочисленности веса. В нашем случае нечетному корню соответствует пара многочленов, что согласуется с результатом В. Г. Каца, что вес, соответствующий нечетному корню, не обязан быть целочисленным [8].

Замечание 3. В работах [5], [6] получены мультипликативные формулы для универсальных R-матриц янгиана и его квантового дубля в случае супералгебры Ли типа $sl(m, n)$. Комбинируя этот результат с результатом теоремы, можно получить явные формулы для квантовых R-матриц и L операторов в анзаце Бете, что весьма важно для исследования струнных теорий в рамках AdS гипотезы [2]. Изложению этих результатов будет посвящена отдельная работа.

Выводы. Получена классификация неприводимых представлений янгиана супералгебры Ли $sl(1, 2)$. Этот результат, по существу, является простейшим в ряду классификационных теорем, описывающих простые модули над янгианами базисных супералгебр Ли. Обобщения результата, потребуют значительно больших технических усилий и должны опираться на пока еще не доказанную общую теорему Пуанкаре – Биркгофа – Витта для янгианов базисных супералгебр Ли. Значение этого результата заключается в том, что в случае когда диаграмма Дынкина базисной супералгебры Ли содержит «серые» корни, на него можно будет опираться при доказательстве теоремы о классификации неприводимых представлений.

Библиографический список

1. Drinfeld V. Quantum groups / V. Drinfeld // Proc. Int. Cong. Math. – V. 1. – Berkley, 1988. – P. 789–820.
2. Dolan L. Yangian Symmetry in D = 4 Superconformal Yang–Mills theory / L. Dolan, Ch. Nappi, E. Witten // arXiv: hep-th/0401243, 2004.
3. Spill F. On Drinfeld's second realization of the AdS/CFT $su(2, 2)$ Yangian / F. Spill, A. Torrielli // arXiv: hep-th/0803.3194, 2008.
4. Frappat L. Dictionary on Lie Superalgebras / L. Frappat, P. Sorba. – London: Academic Press, 2000.
5. Стукопин В.А. О дубле янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ / В.А. Стукопин // Функцион. анализ и его приложение. – 2006. – Т. 40. – № 2. – С. 81–84.

6. Стукопин В.А. Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ и вычисление универсальной R-матрицы / В.А. Стукопин // Фундамент. и прикладная математика. – 2005. – Т. 11. – № 2. – С. 185–208.
7. Стукопин В.А. О янгианах супералгебр Ли типа $A(m, n)$ / В.А. Стукопин // Функцион. анализ и его приложение. – 1994. – Т. 28. – № 3. – С. 85–88.
8. Kac V. A Sketch of Lie Superalgebra Theory / V. Kac // Commun. Math. Phys. – 1977. – 53. – P. 31–64.
9. Тарасов В.О. О строении квантовых L операторов для R-матрицы XXZ модели / В.О. Тарасов // Теорет. и мат. физика. – 1984. – Т. 61. – № 2. – С. 163–173.
10. Тарасов В.О. Неприводимые матрицы монодромии для R-матрицы XXZ модели и решеточные квантовые локальные гамильтонианы / В.О. Тарасов // Теорет. и мат. физика. – 1985. – Т. 63. – № 2. – С. 175–196.
11. Zhang R.B. Representations of super Yangian / R.B. Zhang // J. Math. Phys. – 1995. – V. 36. – P. 3854–3865.

Материал поступил в редакцию 16.06.11.

References

1. Drinfeld V. Quantum groups / V. Drinfeld // Proc. Int. Cong. Math. – V. 1. – Berkley, 1988. – P. 789–820.
2. Dolan L. Yangian Symmetry in $D = 4$ Superconformal Yang–Mills theory / L. Dolan, Ch. Nappi, E. Witten // arXiv: hep-th/0401243, 2004.
3. Spill F. On Drinfeld's second realization of the AdS/CFT $su(2, 2)$ Yangian / F. Spill, A. Torrielli // arXiv: hep-th/0803.3194, 2008.
4. Frappat L. Dictionary on Lie Superalgebras / L. Frappat, P. Sorba. – London: Academic Press, 2000.
5. Stukopin V.A. O duble yangiana superalgebry` Li tipa $A(m, n)$ / V.A. Stukopin // Funkcion. analiz i ego prilozhenie. – 2006. – Т. 40. – # 2. – С. 81–84. – In Russian.
6. Stukopin V.A. Kvantovy`j dubl` yangiana superalgebry` Li tipa  $A(m, n)$  i vy`chislenie universal`noj R-matricy` / V.A. Stukopin // Fundament. i prikladnaya matematika. – 2005. – Т. 11. – # 2. – С. 185–208. – In Russian.
7. Stukopin V.A. O yangianax superalgebr Li tipa $A(m, n)$ / V.A. Stukopin // Funkcion. analiz i ego prilozhenie. – 1994. – Т. 28. – # 3. – С. 85–88. – In Russian.
8. Kac V. A Sketch of Lie Superalgebra Theory / V. Kac // Commun. Math. Phys. – 1977. – 53. – P. 31–64.
9. Tarasov V.O. O stroenii kvantovy`x L operatorov dlya R-matricy` XXZ modeli / V.O. Tarasov // Teoret. i mat. fizika. – 1984. – Т. 61. – # 2. – С. 163–173. – In Russian.
10. Tarasov V.O. Neprivodimy`e matricy` monodromii dlya R-matricy` XXZ modeli i reshyotochny`e kvantovy`e lokal`ny`e gamil`toniany` / V.O. Tarasov // Teoret. i mat. fizika. – 1985. – Т. 63. – # 2. – С. 175–196. – In Russian.
11. Zhang R.B. Representations of super Yangian / R.B. Zhang // J. Math. Phys. – 1995. – V. 36. – P. 3854–3865.

ON CLASSIFICATION OF YANGIAN IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF LIE SUPERALGEBRA $sl(1,2)$

V.A. STUKOPIN

(Don State Technical University)

The classification of Yangian irreducible finite-dimensional representations of Lie superalgebra $sl(1,2)$ – Hopf superalgebra is obtained. The classification is of great use in modern theoretical and mathematical physics. Some feasible applications of this result in mathematical physics are offered.

Keywords: Yangian, Lie superalgebra, irreducible representation, module, Hopf superalgebra.