

УДК 519.115.1.519.15

СЕЛЕКТИВНО-ПЕРЕСТАНОВочный МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ МЕЖДУ ИСПОЛНИТЕЛЯМИ: ОДИНАРНЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ

Р.А. НЕЙДОРФ

(Донской государственный технический университет)

Предложен новый для классической теории расписаний подход к решению распределительных задач, который основывается на введении понятий распределительных матриц, критериев оценки их свойств и разработанного алгоритма их улучшающих преобразований. Сформулирован метод, получивший название «селективно-перестановочный», поскольку он базируется на выделении и перестановке перспективных элементов столбцов распределительных матриц, приводятся его примеры.

Ключевые слова: теория расписаний, распределительная задача, критерий оптимизации, минимаксный критерий, селективный подход, перестановочный алгоритм, распределительная матрица, ресурсный столбец, одинарная перестановка.

Введение. В фундаментальных работах по классической теории расписаний (КТР) [1–3] сформулирована основная парадигма этой теории, определены направления ее развития, дана классификация методов решения рассматриваемых в КТР задач и описаны основные алгоритмы их реализации.

Сформировано два основных направления развития КТР: решение параллельных распределительных задач (РЗ) в однородных и неоднородных распределительных системах. Статья ориентирована на методы решения однородных РЗ. Методы решения задач КТР делятся на две большие группы: точные и приближенные. Точные методы являются оптимизационными и обеспечивают нахождение экстремального решения РЗ по выбранному критерию оптимизации. Приближенные методы обеспечивают некоторое просто приемлемое или допустимое решение, не являющееся в общем случае оптимальным и не ориентированное на экстремальную оценку.

Общим признаком всех этих методов является работа с произвольным или структурированным списком заданий, которые последовательно по определенным алгоритмическим правилам назначаются (или не назначаются) какому-либо исполнителю используемой исполнительской системы (ИС). Решение РЗ – структура окончательного распределения заданий между исполнителями ИС – является всегда в этих методах последним этапом реализуемого алгоритма. В этой парадигме распределения кроется, по мнению автора, корень тех проблем, которые стоят как перед приближенными, так и перед точными методами. При неблагоприятном исходно заданном распределении заданий приближенные алгоритмы приводят к плохим по точности распределениям, а у точных алгоритмов резко возрастает время решения.

Цель статьи – теоретическое обоснование и алгоритмическая проработка принципиально новой парадигмы решения однородных РЗ КТР. Сущность ее состоит в том, что алгоритм распределения ориентирован на работу с уже имеющимся допустимым распределением, а направленностью его работы является улучшение этого распределения. В результате каждый промежуточный этап решения РЗ является вполне приемлемым вариантом. А конечный вариант распределения либо может рассматриваться как квазиоптимальное распределение относительно того критерия, по которому производилось улучшение, либо будет оптимальным по этому критерию. Основы описываемого здесь подхода заложены автором в нескольких работах прикладного характера [4, 5].

Математическая модель исследуемой задачи. Пусть к распределению в системе m идентичных параллельно работающих исполнителей, образующих множество $E = \{E_1, \dots, E_m\}$, назначена произвольным образом полученная совокупность $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ заданий w_i . Сущность

решения РЗ состоит в том, что каждому заданию $w_i \in W, i = \overline{1, n}$ назначается исполнитель $E_j \in E, j = \overline{1, m}$.

Если распределительная задача не преследует каких-либо дополнительных целей, результатом распределения будет любое множество $D^W = \{W_1, \dots, W_m\}$, подмножества заданий $W_j = \{w_k \mid w_k \in W, k \in [1, n]\}$ которого отвечают обязательному свойству, описываемому следующим отношением:

$$\forall j, k \in [1, m] \rightarrow \bigcup_{j=1}^m W_j = W; W_j \cap W_k = \emptyset. \quad (1)$$

Условие (1) определяет замкнутость решаемой РЗ по исходному множеству заданий – все задания должны быть распределены (но не все исполнители в используемой ИС могут быть заняты).

Если имеет значение и известен ресурс выполнения каждого i -го задания, обозначаемый r_i , то возникает возможность количественно оценить результаты решения распределительной задачи. В частности, предусмотренная некоторым вариантом D^W загрузка заданиями произвольного исполнителя E_j оценивается ресурсом R_j , определяемым аддитивным выражением

$$R_j = \sum r_k; r_k : w_k \in W_j. \quad (2)$$

Если ресурс r_i выполнения w_i одинаков для любого j -го исполнителя E_j , то такая ИС называется однородной. Следовательно, в однородной РЗ n -множеству заданий W сопоставляется n -множество их оценок $R = \{r_1, \dots, r_n\}$, определяемых взаимно однозначным отображением,

$$W \leftrightarrow R : w_i \leftrightarrow r_i. \quad (3)$$

Поскольку общие ресурсы исполнителей R_j образуют множества $R_j = \{r_k \mid r_k \in R\}$, взаимно соответствующих с множествами W_j закрепленных за исполнителями E_j заданий, которые отвечают обязательному свойству замкнутости (1), R_j также отвечают свойству замкнутости

$$\forall j, k \in [1, m] \rightarrow \bigcup_{j=1}^m R_j = R; R_j \cap R_k = \emptyset. \quad (4)$$

Таким образом, каждому решению РЗ в виде конкретного варианта D^W сопоставляется оценочное множество $D^R = \{R_1, \dots, R_m\}$. При этом качество распределения заданий по исполнителям оценивается ресурсом выполнения всего множества W и задается некоторым функционалом, дискретными аргументами которого являются ресурсы загрузки исполнителей R_j .

Когда ресурс выполнения всего исходного множества заданий на выбранной ИС имеет значение, для оценки решения РЗ D^W формируется функция или функционал $Q[D^R]$, качественно отражающие количественные требования к свойствам этого решения.

Например, максимальная по ресурсу загрузка одного из исполнителей

$$Q^m[D^R] = \max \{R_j \mid j = \overline{1, m}\} \quad (5)$$

представляет собой оценку ресурсоемкости решения и считается наиболее эффективной среди функционалов, а если в качестве ресурса выступает время, то (5) является оценкой производительности ИС.

Другой известной и полезной оценкой эффективности решения РЗ является выражение следующего вида:

$$Q^e[D^R] = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (R_j - \bar{R})^2}{m-1}}, \quad \bar{R} = \frac{\sum_{j=1}^m R_j}{m}, \quad (6)$$

которое представляет собой среднее квадратическое отклонение загрузок исполнителей от средней загрузки по ИС и является оценкой равномерности загрузки исполнителей ИС.

Известны и другие оценки [2, 8]. Но просто формировать и затем оценивать произвольный вариант нецелесообразно, так как теоретически показано [1], что количество N возможных вариантов загрузки ИС очень велико, хотя и конечно. Поэтому произвольно выбрать наилучший или хотя бы достаточно хороший вариант маловероятно. В связи с этим возникает задача направленного выбора эффективного решения РЗ.

Наилучшим способом конкретизации и обеспечения эффективности решения является оптимизационный подход. Например, от оценки (5) целесообразно потребовать, чтобы она приняла в окончательном решении минимальное значение. Это порождает так называемый «минимаксный» критерий (ММК) оптимизации решения РЗ

$$Q^{mm}[D^r] = \min_R \max_j \{R_j \mid j = \overline{1, m}\}. \quad (7)$$

Аналогично минимизация оценки (6) порождает критерий «равномерности загрузки» (КРЗ)

$$Q^{de}[D^r] = \min_R Q^e[D^r]. \quad (8)$$

Основная проблема исследуемой задачи. Трудность поставленной выше задачи состоит в том, что найти оптимальное решение не так просто, а главное, этот процесс, в общем случае, очень трудо- и времяемкий. Это связано с тем, что количество вариантов распределения N зависит от размерности задачи РЗ, определяемой двумя параметрами: мощностью ИС m и мощностью множества распределяемых заданий n . Полное количество вариантов загрузки ИС задается формулой $N = m^n$, что и определяет NP -полноту алгоритма полного перебора вариантов решения, т. е. NP -полноту сформулированной РЗ [1].

Наиболее универсальным методом точного решения однородных РЗ является алгоритм Романовского (АР), описанный и исследованный во многих научных работах по теории расписаний (прежде всего, в первоисточнике [3]). Этот алгоритм является разновидностью метода «ветвей и границ», который хоть и не решает проблему NP -полноты, но, по сравнению с методом полного перебора, значительно снижает ресурс решения оптимизационных задач, в том числе и РЗ.

Во многих случаях АР дает хорошие ресурсные показатели и позволяет решать задачи высокой размерности. Так, например, приведенное в [5] решение с помощью АР 30 случайно сгенерированных РЗ с параметрами $m = 19$; $n = 317$; $\min r_i = 25$; $\max r_i = 75$ дает время решения одной распределительной задачи от 3 до 21 с, что вполне приемлемо для большинства приложений.

Однако нередки случаи, когда даже задача небольшой размерности оказывается неразрешимой за приемлемое время. Такое свойство АР обуславливается его структурой. Реализуя решение z -задачи, АР довольно быстро снижает верхнюю границу поиска достижимых решений. Но при неблагоприятном сочетании ресурсов распределяемых заданий, начиная с некоторого шага решения z -задачи, им осуществляется практически полный перебор вариантов распределения заданий между исполнителями для оставшейся части дерева решений. С этого момента АР работает практически как алгоритм полного перебора. Тогда, если оставшаяся часть дерева решений РЗ имеет достаточно высокую размерность, предсказать время решения такой задачи весьма трудно.

К примеру, случайно сгенерированные с помощью АР РЗ с параметрами $n = 15$, диапазоном ресурса $\min r_i = 30$ и $\max r_i = 70$ дают для различных m время решения одной распределительной задачи от менее 1 мс до более 2 мин. Данные эксперимента приведены в табл. 1.

Таблица 1

m		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Время решения	мин	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
	с	0	0	0	0	0	0	0	0	0	38	0	0	1	0
	мс	0	0	0	5	0	0	1	0	0	933	78	0	662	2

Анализ табл. 1 показывает, что ресурс решения РЗ в среде АР не однозначно зависит от размерности, а в значительной степени непредсказуем по времени решения. Решение аналогичной задачи для $n = 23$ дает еще больший разброс ресурсов выполнения: от менее чем 1 мс до нескольких часов и более. Разумеется, такое свойство делает АР чрезвычайно ненадежным инструментом для научных исследований, тем более для решения производственно-экономических задач.

Справиться с данной проблемой можно двумя путями. Возможно усовершенствование алгоритма Романовского реализацией более эффективных принципов выполнения его этапов и шагов. Один из путей такого решения задачи – внутренний мониторинг процесса и организация подсистемы принятия и осуществления решений внутреннего управления перебором вариантов.

Другой путь более радикален. Он связан с отходом от традиционного последовательного применения алгоритма к исходному линейному списку заданий с практически бесконтрольным их распределением в пределах этапа обеспечения пресловутой z -задачи. Можно попытаться построить вполне осознанный алгоритм преобразования некоторого уже существующего, хотя и неоптимального, но допустимого распределения.

Постановка задачи. Пусть задана произвольно полученная таблица распределения исходного множества W заданий w_i в среде ИС с N исполнителями E_j (табл. 2). Таблица заполнена значениями ресурсов распределенных исполнителям заданий.

Таблица 2

		Номер j исполнителя в ИС размера m					
		1	2	...	j	...	m
Условный номер /задания у исполнителя	1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1j}	...	r_{1m}
	2	r_{21}	r_{22}	...	r_{2j}	...	r_{2m}
	...	...	...	...	...	...	...
	i	r_{i1}	r_{i2}	...	r_{ij}	...	r_{im}
	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	$r_{n_m m}$
	...	$r_{n_1 1}$	...	...	...	...	
	...		$r_{n_2 2}$		...		
	$n_{\max}$				$r_{n_j j}$		

В табл. 2 вертикальные столбцы в общем случае неодинаковы по размеру, так как разным исполнителям могут быть назначены различные задания. Поэтому они заканчиваются на различных условных строках с номером n_k , величина которого будет зависеть от решаемой задачи, критерия выбора решения и применяемого алгоритма. Индекс k соответствует номеру столбца, т. е. условному номеру загруженного заданиями устройства. Максимальное количество строк в столбце обозначено как $n_{\max}$. В приведенной иллюстративной таблице $n_{\max} = n_{n_j j}$.

Описанную таблицу предлагается называть «исходной таблицей распределения» (ИТР) заданий. Пример ИТР распределения 15 заданий между 4 исполнителями приведен в табл. 3. В данном варианте распределения заданий 1-му и 3-му условным исполнителям назначено по 3 задания, 2-му исполнителю – 5 заданий, а 4-му исполнителю – 4 задания. Ясно, что конфигурации таких таблиц могут быть самыми разными.

Таблица 3

		Номер исполнителя			
		1	2	3	4
Условный номер i задания у исполнителя	1	69	37	63	46
	2	56	41	59	39
	3	65	34	65	57
	4		32		47
	5		42		

Структура данных, заданная в табл. 2, неудобна для математической обработки и построения алгоритма решения РЗ. Поэтому в статье вводится понятие распределительной матрицы (РМ), которая отличается от таблицы тем, что имеет одинаковые размеры столбцов за счет дополнения всех n_k до $n_{\max}$ нулевыми ресурсами дополнительных условных заданий, не требующих выполнения. Поэтому РМ будет выглядеть следующим образом:

$$M_R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $\forall i, j: i > n_j \rightarrow r_{n_j j} = 0$.

Так, для ИТР в табл. 3 РМ будет иметь вид

$$M_R = \begin{bmatrix} 69 & 41 & 63 & 46 \\ 56 & 37 & 59 & 39 \\ 65 & 34 & 65 & 57 \\ 0 & 32 & 0 & 47 \\ 0 & 42 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9a)$$

Матрицу (9) можно записать также в следующем виде:

$$M_R = [\bar{R}_1 \quad \bar{R}_2 \quad \dots \quad \bar{R}_m], \quad (10)$$

где $\bar{R}_j$ – столбцы загрузки (СЗ), составленные из ресурсов заданий, распределенных j -му исполнителю.

Построенную таким образом на основе ИТР матрицу можно назвать исходной распределительной матрицей (ИРМ).

Во введенных обозначениях СЗ являются РМ для своего исполнителя. Основной характеристикой СЗ является общий ресурс выполнения всех его заданий, совпадающий по величине с введенным ресурсом исполнителя R_j , несмотря на разное количество суммируемых членов. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n r_{ij} = R_j. \quad (11)$$

Тогда ресурсной характеристикой РМ является матрица-строка

$$R_M = [R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_m], \quad (12)$$

которую естественно назвать «ресурсной строкой» (РС) данной РМ.

Так, распределительную матрицу (9a) характеризует РС

$$R_M = [190 \quad 186 \quad 187 \quad 189]. \quad (12a)$$

Оптимизационную распределительную задачу можно сопоставить с математической моделью, базирующейся на некотором образом полученной ИРМ, содержащей СЗ $\bar{R}_j$, и ее ресурсных оценках R_j , составляющих РС. Эту ИРМ необходимо преобразовать так, чтобы удовлетворить выбранному оптимизационному критерию. Во введенных математических конструкциях минимаксный критерий (7), например, примет следующий вид:

$$Q^{mm}[M_R] = \min_j \max\{R_j \mid j = \overline{1, m}\}. \quad (13)$$

Преобразованная из ИРМ новая по структуре РМ, удовлетворяющая отношению (13), будет «оптимальной по ММК распределительной матрицей» (ОРМ). Полученная ОРМ может так же, как и ИРМ, содержать нулевые элементы, соответствующие фиктивным заданиям, обеспечивающим матричный вид математической модели распределения. Отбрасыванием этих элементов ОРМ можно превратить в таблицу оптимального распределения (ТОР) заданий.

Таким образом, решаемую задачу можно определить как преобразование ИТР к ТОР. Для эффективной алгоритмизации этого процесса математическая модель однородной РЗ, разработанная выше, дополнена понятиями ресурсов выполнения заданий r_{ij} распределительной матрицы M_R и ресурсной матрицы-строки R_M . Построение алгоритма преобразования M_R , оптимизирующего результат решения РЗ и позволяющего получить из произвольной ИТР наиболее эффективную по ММК и/или КРЗ таблицу распределения заданий, является предметом настоящего исследования.

Базовые понятия и характеристики исходных и преобразованных РМ. Для упрощения формулировки и реализации разрабатываемого алгоритма удобно ввести ограничения на структуру РМ, выражающиеся в следующих требованиях к столбцам и строкам этой матрицы, а также ее преобразования путем соответствующих алгоритмических перестроений:

- 1) каноническим расположением элементов во всех m столбцах РМ является убывание значений ресурсов заданий относительно возрастающего значения индекса строки i ;
- 2) если преобразование РМ приводит к нарушению канонического порядка построения столбца, то он перестраивается к каноническому виду;
- 3) каноническим расположением столбцов РС и РМ является возрастание ресурса R_j относительно возрастающего значения индекса столбца j ;
- 4) если преобразование РМ приводит к нарушению канонического порядка построения РС и РМ, то порядок столбцов приводится к каноническому виду.

Распределительная матрица (9а), приведенная к каноническому виду, что отмечено в обозначении верхним индексом c , будет выглядеть следующим образом:

$$M_R^c = \begin{bmatrix} 42 & 65 & 57 & 69 \\ 41 & 63 & 47 & 65 \\ 37 & 59 & 46 & 56 \\ 34 & 0 & 39 & 0 \\ 32 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (96)$$

а характеризующая ее ресурсная матрица-строка примет вид

$$R_R^c = [186 \ 187 \ 189 \ 190]. \quad (126)$$

Таким образом, в дальнейшем при исследовании математической модели РЗ в сформулированной выше постановке следует считать, что матрицы этой модели приведены к канонической форме.

Определение 1. Ресурсный столбец $\bar{R}_j$, отвечающий требованию 1 и распределительная матрица, отвечающая требованию 3, называются каноническими и обозначаются аббревиатурами КРС и КРМ соответственно.

Поскольку критерии оптимизации решения РЗ (7) и (8) связаны с минимизацией наибольшего ресурса РС в РМ и величины различия между ресурсами РС в РМ, важной характеристикой РМ и составляющих ее РС следует считать разность ресурсов двух РС, в первую очередь, максимального и минимального.

Определение 2. Разность большего и меньшего ресурсов $\Delta R_j^l = R_l - R_j$ любых двух РС $\bar{R}_l$ и $\bar{R}_j$ из РМ называется дефицитом этих столбцов, а наибольший из них называется дефицитом распределительной матрицы.

Для теоретически обоснованного построения алгоритма преобразования и оптимизации РМ необходимо выявить и сформулировать ее базовые свойства.

Свойство элементной и ресурсной неизменности РМ состоит в том, что ни количество распределяемых заданий, ни назначенный им оценочный ресурс выполнения, ни количество исполнителей в ИС в процессе преобразования РМ меняться не могут, согласно концептуальной модели РЗ.

Это общее свойство порождает следующие частные свойства РМ, справедливые на любой стадии ее преобразования:

– ни при каких преобразованиях РМ не должно меняться количество распределяемых заданий, т. е. соблюдается условие

$$\sum_{j=1}^m n_j = n \rightarrow \sum_{j=1}^m P_r \{ \bar{R}_j \} = n, \quad (14)$$

где $P_r \{ \bar{R}_j \}$ – реальная мощность каждого РС $\bar{R}_j$;

– ни при каких преобразованиях РМ не должны меняться ресурсы распределяемых заданий, а значит и их общий ресурс, эта аксиома математически представлена равенством (4);

– ни при каких преобразованиях РМ не должно меняться количество исполнителей заданий, а значит, ни один ресурс исполнителя не должен быть нулевым, т. е.

$$\forall j = \overline{1, n} \rightarrow R_j \neq 0.$$

Сформулированные выше и вполне очевидные свойства однородной РЗ позволяют выявить не столь очевидные свойства РМ и математически обосновать модель преобразований, позволяющих улучшать РМ и, в ряде случаев, приводить ее к ОРМ.

Перестановочные, ухудшающие и улучшающие преобразования РМ, оперирующие одиночными заданиями. Рассмотрим РМ (9) и РС (12) в формах КРМ и КРС

$$M_R^c = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$R_M^c = [R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_m], \quad (16)$$

в которых выполняются следующие условия:

$$\forall i \in [1, n], j \in [1, m] \rightarrow r_{ij} \geq r_{i+1j}, R_j \leq R_{j+1}. \quad (17)$$

Определение 3. Перестановка p -го элемента j -го СЗ на место q -го элемента l -го СЗ ($j \neq l$), а q -го элемента l -го СЗ на освободившееся место называется одинарным перестановочным преобразованием (ОПП).

Свойство 1 ОПП в КРМ. При перестановке элементов r_{pj} и r_{ql} между СЗ $\bar{R}_j$ и $\bar{R}_l$ их ресурсы меняются следующим образом:

$$R'_j = R_j - r_{pj} + r_{ql}; R'_l = R_l + r_{pj} - r_{ql}; R'_j + R'_l = R_j + R_l, \quad (18)$$

где R'_j, R'_l – ресурсы РС с теми же индексами после перестановки.

В рассмотренном примере перестановка заданий с ресурсами $r_{22} = 63$ и $r_{24} = 65$ приведет к изменению ресурсов 2-го и 4-го столбцов: $R'_2 = 187 - 63 + 65 = 189$; $R'_4 = 190 + 63 - 65 = 188$. Аналогично ПП $r_{31} = 37$ и $r_{43} = 39$ приведет к изменению ресурсов 1-го и 3-го столбцов: $R'_1 = 186 - 37 + 39 = 188$; $R'_3 = 189 + 37 - 39 = 187$.

Необходимо отметить, что, хотя такое ПП не изменяет общий ресурс R матрицы РМ, в силу (18) оно может привести к существенному изменению ее структуры. Поэтому КРМ после ПП может потерять (и чаще всего теряет) канонические свойства. Это может произойти как из-за нарушения канонического свойства убывания ресурсов заданий в столбцах, так и из-за нарушения канонического свойства возрастания ресурсов столбцов. Следовательно, после ПП РМ необходимо проверить на соответствие каноническим свойствам и при необходимости перестроить к каноническому виду.

После сделанной в примере перестановки РМ потеряла канонические свойства по последовательности ресурсов исполнителей:

$$M_R^c = \begin{bmatrix} 42 & 65 & 57 & 69 \\ 41 & 65 & 47 & 63 \\ 39 & 59 & 46 & 56 \\ 34 & 0 & 37 & 0 \\ 32 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9в)$$

так как характеризующая ее ресурсная матрица-строка приняла вид

$$R_R^c = [188 \ 189 \ 187 \ 188], \quad (12в)$$

но уменьшился максимальный ресурс исполнителя и дефицит РМ.

Свойство 2 ОПП в КРМ. При перестановке r_{pj} и r_{ql} в КРМ дефицит ресурсов j -го и l -го столбцов меняется по формуле

$$R'_l - R'_j = (R_l - R_j) + 2(r_{pj} - r_{ql}). \quad (19)$$

Согласно ММК уменьшение наибольшего ресурса РС из РМ улучшает критериальные свойства РЗ. Согласно КРЗ уменьшение разности ресурсов РС в РМ также улучшает критериальные свойства РЗ. Очевидно, что в зависимости от конкретных значений R_j и R_l , а также r_{pj} и r_{ql} каждая из скобок в правой части равенства (19) может быть как положительной, так и отрицательной. Однако в КРМ ресурсы СЗ упорядочены, поэтому знак первой скобки в (19) зависит от соотношения индексов: если $l > j$, то $R_l \geq R_j$ и $R_l - R_j \geq 0$. Тогда ресурсный результат перестановки зависит только от знака второй скобки (19).

Свойство 3 ОПП в КРМ. Если $l > j$, то для обеспечения возможности улучшения ресурсных свойств РМ необходимо, чтобы $r_{pj} < r_{ql}$.

Действительно, согласно (18) и (19) уменьшение разности большего и меньшего ресурсов РС за счет ОПП приводит одновременно и к уменьшению наибольшего из ресурсов РС в РМ. Поэтому такое ОПП улучшает критериальные свойства РЗ как по КРЗ, так и по ММК. Так, например, полученная выше РС (12в) сразу показывает положительный результат ОПП: оценка по максимальной загрузке снизилась на единицу, а максимальный дефицит загрузки РМ уменьшился вдвое.

Определение 4. Одинарное ПП, приводящее к улучшению критериальных свойств РМ, считается улучшающим (УПП).

Свойство 4 ОПП в КРМ. При выполнении свойства 3 ОПП в КРМ, отвечающее условию

$$R_j - R_l < R'_l - R'_j < R_l - R_j, \quad (20)$$

является УПП.

Двойное неравенство (20) обусловлено тем, что по разным причинам (например, из-за наличия единственной пары перспективных для перестановки заданий) ОПП может привести не только к уменьшению дефицита $R'_l - R'_j$, но и к его отрицательности, т. е. ресурс j -го столбца станет больше l -го. Это допустимо, если модуль дефицита все-таки уменьшится. Подставив в (20) формулу (18), получим условия реализации свойства 4 ОПП в КРМ

$$R_l - R_j > r_{pj} - r_{ql} > 0. \quad (21)$$

Действительно, в рассмотренном примере разность ресурсов переставляемых заданий $65 - 63 = 39 - 37 = 2$, а дефициты ресурсов соответствующих РС $190 - 187 = 189 - 186 = 3$, что удовлетворяет системе неравенств (21).

Перестановочное преобразование, не отвечающее свойству 4, следует назвать «ухудшающим», т. е. бесперспективным.

Свойство 5 ОПП в КРМ. Идеология КРЗ приводит к утверждению, что для него наилучшим ОПП для двух столбцов является такое, которое максимально приближает к нулю их дефицит, откуда вторая скобка в (19) – дефицит выравнивания ресурсов (ДВР) переставляемых заданий – должна отвечать условию

$$r_{ql} - r_{pj} = \left\lfloor \frac{R_l - R_j}{2} \right\rfloor, \text{ либо } r_{ql} - r_{pj} = \left\lceil \frac{R_l - R_j}{2} \right\rceil, \quad (22)$$

где символами $\lfloor \cdot \rfloor$ и $\lceil \cdot \rceil$ обозначены операции взятия меньшего и большего целого, соответственно (в рассмотренном примере разность ресурсов заданий отвечает второму из условий).

Свойство 6 ОПП в КРМ. Идеология ММК приводит к утверждению, что для этого критерия наилучшим ПП для двух столбцов является такое, которое максимально приближает ресурс одного из них к среднему ресурсу РМ, откуда вторая скобка в (19) – дефицит минимизации ресурсов (ДМР) переставляемых заданий – должна отвечать условию

$$r_{ql} - r_{pj} = \text{round}\left(\frac{R_l - R_{cp}}{2}\right), \text{ либо } r_{ql} - r_{pj} = \text{round}\left(\frac{R_{cp} - R_j}{2}\right), \quad (23)$$

где функция round означает операцию взятия ближайшего целого.

Рассмотренные выше свойства найдены для ОПП. Однако перестановке могут подвергаться пары, тройки и т. д. заданий, а также группы заданий неравной мощности. Этот случай предполагается исследовать в следующей статье.

Селективно-перестановочный алгоритм (СПА) улучшения решения РЗ в однородных ИС, оперирующий одиночными заданиями. Выявленные выше свойства и математические модели, определяющие результаты ПП одиночных заданий, позволяют построить несложный, но эффективный алгоритм решения РЗ, стартовой моделью которой является произвольно полученное решение. Оно может быть результатом применения приближенного метода, например, алгоритма критического пути [3, 6, 7], или промежуточным результатом реализации АР.

В соответствии с полученными в работе моделями алгоритм должен состоять из предварительного стартового этапа подготовки математической модели РЗ и трех последовательно повторяющихся функционально ориентированных этапов преобразования и анализа распределительных матриц.

0. Стартовый этап состоит в получении ИТР и преобразовании ее в исходную РМ, подлежащую оптимизации, и характеризующую ее РС.

I. Следующий этап состоит в перестройке структур РМ и РС к каноническому виду (15) и (16) – КРМ и КРС.

II. Постолбцовый относительно РМ и поэлементный относительно СЗ параметрический сравнительный анализ ресурсов заданий исполнителей, наиболее перспективных для УПП, в соответствии с (21), (22).

III. Принятие и реализация решения

– о перестановке заданий в анализируемом и преобразуемом массиве с последующим возвратом ко II этапу;

– об отсутствии в анализируемом варианте КРМ дальнейших УПП и завершении работы алгоритма улучшения РМ.

I. Перестройка исходной ТР в каноническую РМ.

Уже приводился пример перестроения исходной таблицы загрузки в распределительную матрицу канонической формы, которое осуществляется в соответствии с определенными выше и некоторыми дополнительными правилами (Пр.) частного порядка.

Пр.1.1. Элементы ИТР располагаются на соответственных местах $n \times m$ -матрицы, где величина n определяется максимальным количеством заданий среди назначенных таблицей исполнителям.

Пр.1.2. Элементы каждого столбца РМ располагаются в порядке убывания ресурсов назначенных исполнителям заданий, что не изменяет существа решаемой РЗ, так как в задачах этого класса порядок выполнения заданий не регламентируется.

Пр.1.3. Нижние строки столбцов загрузки исполнителей с меньшим, чем n количеством заданий дополняются нулями до размера столбца n .

Пр.1.4. Ввиду условности нумерации исполнителей для однородных РЗ, столбцы располагаются в порядке возрастания их ресурса загрузки R_j , в результате чего исполнители с максимальной загрузкой оказываются в матрице последними.

Пр.1.5. При одинаковых ресурсах загрузки СЗ располагаются в порядке возрастания их ресурсов в первых строках.

Пр.1.6. При одинаковых ресурсах заданий в первых строках СЗ они располагаются в порядке возрастания ресурсов заданий вторых строк и т. д.

Результатом реализации первого этапа алгоритма СПА является построение КРМ.

II. Поэлементный параметрический сравнительный анализ ресурсов.

Для анализа решаемой распределительной задачи используются введенные выше понятия и их численные оценки:

- взаимный дефицит столбцов загрузки: $\Delta R_j' = R_i - R_j$;
- максимальный дефицит СЗ $\Delta R_{\max}$ для текущего варианта РМ;
- приоритетный ряд пар СЗ по убыванию $\Delta R_j'$, перспективных для УПП;
- приоритетный ряд пар ресурсов заданий вида r_{pj} и r_{ql} для исследуемой перспективной

пары СЗ, построенный по убыванию $\Delta r_p^q = r_{ql} - r_{pj}$.

Таким образом, численный мониторинг структуры улучшаемой РМ на каждом шаге преобразования ее СЗ позволяет условно разбить эти столбцы на две группы. Первая группа – это СЗ-клиенты. Они группируются в основном слева¹, имеют наименьший ресурс в выбранной перспективной паре и являются претендентами на увеличение ресурса. Вторая группа – это СЗ-доноры.

¹ Условная ориентация, принятая в данной работе.

Они имеют наибольший ресурс в выбранной перспективной паре, являются претендентами на уменьшение ресурса, группируются в основном справа и рассматриваются на возможность передачи части ресурса «клиентам».

Сравнительный анализ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

Пр. II.1. Анализ КРМ начинается с верхнего элемента ее последнего столбца, ресурс которого $R_m = \max_j \{R_j\}$ в силу каноничности. Этот элемент сравнивается поэлементно с ресурсами первого столбца, у которого $R_1 = \min_j \{R_j\}$.

Пр. II.2. Если перебор элементов СЗ-клиента проходит без выделения перспективной для УПП пары и на последнем ненулевом элементе также показал невыполнение условия (21), то алгоритм переходит к рассмотрению следующего по номеру СЗ-клиента с дефицитом загрузки.

Пр. II.3. Выполнение соотношения (21) указывает на перспективность анализируемой пары, и ее индексы вместе с прогнозируемым результатом по улучшению дефицита загрузки вносятся в организованный программой упорядоченный список перспективных пар.

Пр. II.4. Если в ходе реализации алгоритма произошел перебор всех столбцов-клиентов и не выявлена ни одна перспективная пара, СЗ-донор помечается как бесперспективный и исключается из поля действия алгоритма, а к рассмотрению принимается СЗ со следующим меньшим номером $k = m - 1$ и таким же максимальным ресурсом $R_k = \max_j \{R_j\}$.

Пр. II.5. Если очередной СЗ-донор имеет ресурс $R_k < \max_j \{R_j\}$, то задача улучшения решения по минимаксному критерию в рамках алгоритма с одинарными перестановками неразрешима.

Пр. II.6. Если в решаемой РЗ рассматривается задача улучшения КРЗ, мониторинг структуры КРМ продолжается либо до получения списка перспективных УПП либо до безрезультатной обработки СЗ-донора с $k = 2$.

Пр. II.7. Если получен список УПП, то он ранжируется по ДВР или ДМР, из него выбирается пара с максимальным дефицитом и осуществляется переход к третьему этапу СПА.

III. Управляющие решения по перестановкам элементов РМ.

Пр. III.1. Производится УПП для наиболее перспективной пары, характеризующейся максимальным ДВР или ДМР и обеспечивающей максимальный эффект ресурсного улучшения РМ.

Пр. III.2. После УПП изменяются структуры РМ и РС, поэтому, если это оказывается необходимым, производится приведение их к канонической форме, т. е. осуществляется возврат к I этапу.

Пр. III.3. Если в процессе мониторинга ресурсной структуры последнего СЗ-донора УПП не получен, то делается вывод о бесперспективности применения алгоритма с одинарными перестановками в решаемой задаче и осуществляется выход из СПА.

Пример применения СПА решения однородной РЗ. Результат начального применения разработанных в статье оценок и алгоритма отражен в табл. 4. В ней на условном 0-м шаге помещена ИТР – таблица решения однородной РЗ методом критического пути. Из таблицы видно, что, во-первых, в этом случае результат работы этого быстрого, но приближенного алгоритма крайне неудачен, так как максимальный дефицит распределения достигает 17% найденного в дальнейшем оптимума по ММК. Кроме того, структура данных таблицы очень далека от канонической. Поэтому на первом шаге ИТР приведена к РМ добавкой заданий с нулевыми ресурсами, а затем к КМР. Последняя проанализирована на наиболее перспективную УПП.

Наиболее высокий дефицит ресурсов на первом шаге показали элементы первого СЗ-клиента и последнего СЗ-донора, выделенные утолщенной границей. Поэтому на втором шаге они подвергнуты УПП.

Таблица 4

Оптимизация решения распределительной задачи одинарными перестановками

Шаги ПП РМ	Одинарные ПП в РМ		Исполнители				
	Виды РМ	Средний ресурс	1	2	3	4	5
			Ресурсы столбцов				
0 шаг	Исходная таблица распределения заданий	268,4	265	265	244	279	289
		Ресурсы заданий	36	49	46	37	43
			52	65	62	32	32
			35	37	52	39	51
			52	46	34	30	64
			42	68	50	40	46
			48			46	53
						55	
1 шаг	РМ в канонической форме	Дефицит	24	24	45	10	0
		268,4	244	265	265	279	289
		Ресурсы заданий	62	52	68	55	64
			52	52	65	46	53
			50	48	49	40	51
			46	42	46	39	46
			34	36	37	37	43
			0	35	0	32	32
2 шаг	Преобразованная РМ	Дефицит	0	0	0	30	0
		268,4	263	265	265	279	270
		Ресурсы заданий	62	52	68	55	64
			52	52	65	46	34
			50	48	49	40	51
			46	42	46	39	46
			53	36	37	37	43
			0	35	0	32	32
3 шаг	РМ в канонической форме	Дефицит	0	0	0	30	0
		268,4	263	265	265	270	279
		Ресурсы заданий	62	52	68	64	55
			53	52	65	51	46
			52	48	49	46	40
			50	42	46	43	39
			46	36	37	34	37
			0	35	0	32	32
4 шаг	Преобразованная РМ	Дефицит	0	0	0	0	30
		268,4	268	265	265	270	274
		Ресурсы заданий	62	52	68	64	50
			53	52	65	51	46
			52	48	49	46	40
			55	42	46	43	39
			46	36	37	34	37
			0	35	0	32	32
5 шаг	РМ в канонической фор- ме	Дефицит	0	0	0	0	30
		268,4	265	265	268	270	274
		Ресурсы заданий	52	68	62	64	50
			52	65	55	51	46
			48	49	53	46	40
			42	46	52	43	39
			36	37	46	34	37
			35	0	0	32	32
5 шаг	РМ в канонической фор- ме	Дефицит	0	0	0	0	30
		Дефицит	9	9	6	4	0

Окончание табл. 4

6 шаг	Преобразованная РМ	268,4	269	265	268	270	270
		Ресурсы заданий	52	68	62	64	50
			52	65	55	51	42
			48	49	53	46	40
			46	46	52	43	39
			36	37	46	34	37
			35	0	0	32	32
			0	0	0	0	30
		Дефицит	1	5	2	0	0
7 шаг	РМ в канонической форме	268,4	265	268	269	270	270
		Ресурсы заданий	68	62	52	64	50
			65	55	52	51	42
			49	53	48	46	40
			46	52	46	43	39
			37	46	36	34	37
			0	0	35	32	32
			0	0	0	0	30
		Дефицит	5	2	1	0	0
8 шаг	Преобразованная РМ	268,4	267	268	269	270	268
		Ресурсы заданий	68	62	52	64	50
			65	55	52	51	42
			49	53	48	46	40
			46	52	46	43	37
			39	46	36	34	37
			0	0	35	32	32
			0	0	0	0	30
		Дефицит	3	2	1	0	2
9 шаг	РМ в канонической форме	47,2	267	268	268	269	270
		Ресурсы заданий	68	50	62	52	64
			65	42	55	52	51
			49	40	53	48	46
			46	37	52	46	43
			39	37	46	36	34
			0	32	0	35	32
			0	30	0	0	0
		Дефицит	3	2	2	1	0
10 шаг	Преобразованная РМ	47,6	269	268	268	269	268
		Ресурсы заданий	68	50	62	52	64
			65	42	55	52	49
			51	40	53	48	46
			46	37	52	46	43
			39	37	46	36	34
			0	32	0	35	32
			0	30	0	0	0
		Дефицит	0	1	1	0	1
11 шаг	Оптимальная по ММЖ и КРЗ каноническая РМ	47,6	268	268	268	269	269
		Ресурсы заданий	50	62	64	52	68
			42	55	49	52	65
			40	53	46	48	51
			37	52	43	46	46
			37	46	34	36	39
			32	0	32	35	0
			30	0	0	0	0
		Дефицит	1	1	1	0	0

Наиболее высокий дефицит ресурсов на первом шаге показали элементы первого СЗ-клиента и последнего СЗ-донора, выделенные утолщенной границей. Поэтому на втором шаге они подвергнуты УПП, что эффективно улучшило распределение ресурсов между исполнителями. Максимальный дефицит загрузки снизился с 45 до 16. Соответственно с 289 до 279 уменьшилась максимальная загрузка ИС. Таким образом, решение РЗ уже на втором шаге приблизилось к экстремумам как по ММК, так и по КРЗ.

Однако произведенное УПП существенно изменило структуру РМ как по загрузке исполнителей, так и по последовательности ресурсов преобразованных СЗ. Поэтому на третьем шаге РМ вновь приведена к КРМ, и проведен ее мониторинг, который выявил новую перспективную для УПП пары заданий. Они выделены двойными границами и на четвертом шаге подвергнуты УПП, что улучшает дефицит почти вдвое (с 16 до 9) и понижает максимальную загрузку с 279 до 274, т. е. реализация СПА демонстрирует продолжение приближения решения РЗ к экстремумам ММК и КРЗ.

Далее, после приведения измененной РМ к КРМ, процесс мониторинга и УПП продолжается. Следующие перспективные задания-клиенты и задания-доноры выделяются соответственно тройными, жирными и двойными зигзагообразными границами. Все эти и примененные выше выделения сохраняются за элементами РМ (ресурсами заданий) до конца табл. 4.

Как видно из табл. 4, на 9–11 шагах выявляется и реализуется последнее УПП, которое отмечено двойными зигзагообразными границами. Дальнейшие улучшающие преобразования невозможны, так как максимальный дефицит РС равен 1, и любая неухудшающая перестановка заданий приведет лишь к обмену ресурсами 269 и 268 между исполнителями.

Выводы. Таким образом, на 10 шаге селективно-перестановочного алгоритма с одинарными УПП получена ОРМ, описывающая решение, оптимальное сразу по двум критериям: ММК и КРЗ (аналогичный результат получен и в [9], но там уже полученный оптимум по ММК улучшался по КРЗ). Ресурс алгоритма МКП, которым получено стартовое распределение заданий, составил доли миллисекунды. Несколько сортировочно-перестановочных преобразований занимают не больше времени. В результате решение может быть получено менее чем за 1 мс. Алгоритму Романовского на решение этой задачи потребовалось 4 мс. При этом качество распределения, полученное АР, немного хуже (см. табл. 5), так как его ОРМ имеет дефицит 2, т. е. не оптимально по КРЗ.

Таблица 5

Результат решения РЗ с помощью АР		Исполнители				
		1	2	3	4	5
Средний ресурс		Ресурсы столбцов				
268,4		269	268	269	269	267
Условные номера заданий у исполните- ля	1	68	62	52	49	43
	2	65	55	52	48	40
	3	64	53	51	46	39
	4	42	52	50	46	37
	5	30	46	32	46	37
	6			32	34	36
	7					35
		Ресурсы заданий				
Дефицит загрузки		0	1	0	0	2

Библиографический список

1. Конвей Р.В. Теория расписаний / Р.В. Конвей, В.Л. Максвелл, Л.В. Миллер. – М.: Наука, 1975. – 360 с.
2. Коффман Э.Г. Теория расписания и вычислительные машины / Э.Г. Коффман. – М.: Наука, 1987. – 334 с.

3. Романовский И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач / И.В. Романовский. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

4. Филиппов А.В. Эквивалентно-селективный метод повышения эффективности работы распределительных алгоритмов / А.В. Филиппов, З.Х. Ягубов, Р.А. Нейдорф // Инновация, экология и ресурсосберегающие технологии на предприятиях машиностроения, авиастроения, транспорта и сельского хозяйства: тр. IX Междунар. науч.-техн. конф. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2010. – 1184 с. – С. 366–373.

5. Нейдорф Р.А. Селективно-минимизирующий метод повышения эффективности работы приближенных распределительных алгоритмов / Р.А. Нейдорф, А.В. Филиппов, З.Х. Ягубов // Системный анализ, управление и обработка информации: тр. 1-го Междунар. семинара студентов, аспирантов и ученых / под общ. ред. Р.А. Нейдорфа. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2010. – 312 с. – С. 106–115.

6. Будиловский Д.М. Оптимизация решения задач теории расписаний на основе эволюционно-генетической модели распределения заданий: дисс. ... канд. техн. наук / Д.М. Будиловский. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2007.

7. Филиппов А.В. Ресурсно-точностной анализ алгоритма критического пути / А.В. Филиппов // Системный анализ, управление и обработка информации: тр. 1-го Междунар. семинара студентов, аспирантов и ученых / под общ. ред. Р.А. Нейдорфа. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2010. – 312 с. – С. 98–106.

8. Нейдорф Р.А. Методологические проблемы теории расписаний / Р.А. Нейдорф, В.Г. Кобак // Системный анализ, управление и обработка информации: 1-й межвуз. сб. науч. ст. / ДГТУ; ТТИ ЮФУ. – Ростов н/Д, 2007. – С. 101–108.

9. Нейдорф Р.А. Перестановочный алгоритм биэкстремального решения однородной распределительной задачи / Р.А. Нейдорф, А.В. Филиппов, З.Х. Ягубов // Вестн. Донск. гос. техн. ун-та. – 2011. – Т. 11. – № 5.

Материал поступил в редакцию 22.08.11.

References

1. Konvej R.V. Teoriya raspisaniy / R.V. Konvej, V.L. Maksvell, L.V. Miller. – M.: Nauka, 1975. – 360 s. – In Russian.

2. Koffman E.G. Teoriya raspisaniya i vy`chislitel`ny`e mashiny` / E.G. Koffman. – M.: Nauka, 1987. – 334 s. – In Russian.

3. Romanovskij I.V. Algoritmy` resheniya e`kstremal`ny`x zadach / I.V. Romanovskij. – M.: Nauka, 1977. – 352 s. – In Russian.

4. Filippov A.V. E`kivalentno-selektivny`j metod povы`sheniya e`ffektivnosti raboty` raspreditel`ny`x algoritmov / A.V. Filippov, Z.X. Yagubov, R.A. Nejdorf // Innovaciya, e`kologiya i resursosberegayushhie texnologii na predpriyatiyax mashinostroeniya, aviastroeniya, transporta i sel`skogo xozyajstva: tr. IX Mezhdunar. nauch.-texn. konf. – Rostov n/D: Izdatel`skij centr DGTU, 2010. – 1184 s. – S. 366–373. – In Russian.

5. Nejdorf R.A. Selektivno-minimiziruyushhij metod povы`sheniya e`ffektivnosti raboty` priblizhyonny`x raspreditel`ny`x algoritmov / R.A. Nejdorf, A.V. Filippov, Z.X. Yagubov // Sistemny`j analiz, upravlenie i obrabotka informacii: tr. 1-go Mezhdunar. seminar studentov, aspirantov i uchyonny`x / pod obshh. red. R.A. Nejdorfa. – Rostov n/D: Izdatel`skij centr DGTU, 2010. – 312 s. – S. 106–115. – In Russian.

6. Budilovskij D.M. Optimizaciya resheniya zadach teorii raspisanij na osnove e`volyucionno-geneticheskoy modeli raspredeleniya zadaniy: diss. ... kand. texn. nauk / D.M. Budilovskij. – Rostov n/D: Izdatel`skij centr DGTU, 2007. – In Russian.

7. Filippov A.V. Resursno-tochnostnoj analiz algoritma kriticheskogo puti / A.V. Filippov // Sistemny`j analiz, upravlenie i obrabotka informacii: tr. 1-go Mezhdunar. seminar studentov, aspirantov i uchyony`x / pod obshh. red. R.A. Nejdorfa. – Rostov n/D: Izdatel`skij centr DGTU, 2010. – 312 s. – S. 98–106. – In Russian.

8. Nejdorf R.A. Metodologicheskie problemy` teorii raspisanij / R.A. Nejdorf, V.G. Kobak // Sistemny`j analiz, upravlenie i obrabotka informacii: 1-j mezhvuz. sb. nauch. st. / DGTU; TTI YUFU. – Rostov n/D, 2007. – S. 101–108. – In Russian.

9. Nejdorf R.A. Perestanovochny`j algoritm bie`kstrema`l`nogo resheniya odnorodnoj raspreditel`noj zadachi / R.A. Nejdorf, A.V. Filippov, Z.X. Yagubov // Vestn. Donsk. gos. texn. un-ta. – 2011. – T. 11. – # 5. – In Russian.

SELECTIVE-PERMUTATIONAL METHOD FOR SOLVING PROBLEMS ON PARALLEL DISTRIBUTION OF TASKS AMONG PERFORMERS: SINGLE PERMUTATIONS

R.A. NEJDORF

(Don State Technical University)

A new for the classical scheduling theory approach to solving distribution problems is offered. The approach is based on the introduction of the concepts of distribution matrices, estimate criteria of their properties and a developed algorithm of their enhancing transformations. The method named 'selective-permutational', as it is based on the selection and permutation of the perspective column elements of the distribution matrices, is formulated. Several examples are given.

Keywords: *scheduling theory, allocation problem, optimization criterion, minimax criterion, selective approach, permutational algorithm, distribution matrix, resource column, single permutation.*