СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ И ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК 330.44

Итерационно-вероятностный метод решения линейного уравнения межотраслевого баланса

В. С. Стрельченко
(Ростовский государственный университет путей сообщения),
И. В. Богуславский
(Донской государственный технический университет)

Изложен новый метод решения систем линейных алгебраических уравнений, основанный на применении теории меры в вероятностном пространстве; показана возможность его применения для решения уравнения линейного межотраслевого баланса.
Ключевые слова: *система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), уравнение линейного межотраслевого баланса, модель Леонтьева, плотность вероятностной меры.*

Введение. Задача оптимального планирования является одной из фундаментальных задач современной экономики. Производственные ресурсы могут сочетаться различными способами и обеспечивать при этом одинаковое количество выпускаемой продукции. Например, можно производить одно и то же количество продукции при больших финансовых затратах, но малых трудозатратах. Либо, наоборот, делать малые капиталовложения при больших затратах труда. Суть оптимального планирования состоит в выборе наиболее рационального способа производства продукции, который будет направлен на минимизацию затрат и максимизацию прибыли.

Одним из способов планирования производства является модель многоотраслевой экономики Леонтьева, а точнее, уравнение межотраслевого баланса. С его помощью удобно планировать валовой выпуск продукции для какого-либо периода времени по заданному вектору конечного потребления. Уравнение межотраслевого баланса представляет собой систему линейных алгебраических уравнений и решается такими методами, как метод Гаусса, Жордана — Гаусса, Крамера, Якоби, матричный и итерационный методы и др., каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки.

Целью данного исследования является разработка нового стохастического метода решения уравнения межотраслевого баланса, основанного на использовании теории меры в вероятностном пространстве и метода простых итераций.

Суть модели Леонтьева и методы решения уравнения межотраслевого баланса. Модель Леонтьева используется для расчёта связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида [1]. На первом этапе строятся уравнения, описывающие балансовые соотношения между отраслями (1). Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовой выпуск i-й отрасли должен быть равным сумме объёмов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме балансовые соотношения имеют вид:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i; \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где x_i — валовой выпуск i-й отрасли; x_{ij} — объём продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объёма продукции x_j; y_i — объём продукции i-й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере, или так называемый продукт конечного потребления.

В соотношениях баланса принято рассматривать стоимостный баланс, поскольку продукция различных отраслей имеет разные измерения.

На основе анализа экономики США В. В. Леонтьевым был установлен факт, что в течение длительного времени соотношения $\frac{x_{ij}}{x_j}$ очень слабо меняются и могут рассматриваться как постоянные величины.

В силу указанного факта можно сделать следующее допущение: для производства продукции *j*-й отрасли объёма x_j нужно использовать продукцию *i*-й отрасли объёма $a_{ij}x_i$, где $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ — постоянное число. При таком допущении технология производства принимается линейной, а само допущение называется гипотезой линейности. При этом числа a_{ij} называются коэффициентами прямых затрат. Согласно гипотезе линейности имеем:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j\,;\; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Тогда уравнения балансовых соотношений можно записать в матричной форме:

$$\overline{x} = A\overline{x} + \overline{y}\,, \tag{3}$$

где

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\; \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},\; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Описание матричного представления (4) и уравнение (3), собственно, и представляют собой модель Леонтьева. А уравнение (3) носит название уравнения линейного межотраслевого баланса.

Для его решения используются традиционные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), такие как матричный метод, метод Гаусса, Жордана — Гаусса, Крамера, простых итераций и т. д. Они подробно изложены во многих источниках, в частности в [2, 3]. Авторами данной работы предлагается использовать для решения уравнения (3) новый метод, имеющий ряд достоинств по сравнению с ранее известными, как применительно к решению уравнения линейного межотраслевого баланса, так и к другим задачам, в которых решаются СЛАУ.

Применение стохастического метода решения СЛАУ к уравнению межотраслевого баланса. Рассмотрим линейное уравнение:

$$z(x) = C(x) + y\,, \tag{5}$$

где $x \in D(C)$ — искомый входной элемент; $z(x) \in F$ — выходной элемент; C — линейный оператор, в частности для конечномерного пространства, C — матрица $n \times n$ элементов; $y \in F$ — вектор правых частей.

Линейный оператор C определён на линейном многообразии $D(C)$ банахова пространства E и отображает его в некое банахово пространство F.

Множество $D(C)$ — область определения оператора C. Совокупность всех $z \in F$, для которых уравнение (5) разрешимо, является областью значений оператора C.

В уравнении (5) мы сталкиваемся с отображением, которое в конечномерном пространстве сужается до векторной функции случайных аргументов. Необходимо определить вероятностные характеристики векторной случайной величины Z по заданным вероятностным характеристикам векторной случайной величины X, связанной с величиной Z функциональной зависимостью $Z=\varphi(X)$.

Для того чтобы полностью охарактеризовать случайную величину, необходимо задать множество её возможных значений и дать способ определения и сравнения между собой вероятностей этих значений. Такая характеристика случайной величины называется её законом распределения.

Наиболее общей формой закона распределения случайной величины является её функция распределения [4]. Она имеет вид:

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = P\left((X_0 < x_0)(X_1 < x_1)\dots(X_n < x_n)\right).$$

Функция $F(x)$ является вероятностной мерой.

Если Z — функция векторного случайного аргумента, то её функция распределения имеет вид:

$$F_z(z) = P(Z < z) = P\left(\varphi(X) < z\right) = \int\limits_{\varphi(x_0)<z_0} \dots \int\limits_{\varphi(x_n)<z_n} f(x_0, x_1, \dots, x_n)\, dx_0 dx_1 \dots dx_n\,, \tag{6}$$

где интеграл является n-кратным и распространён на все области, для которых выполнено неравенство, написанное под знаком интеграла.

В частном случае, когда функция φ монотонна в области возможных значений случайной величины X, существует только одна область, в которой выполнимо неравенство под знаком интеграла (6). В этом случае интеграл заменой переменных приведётся к виду:

$$F_z(z) = \int\limits_{-\infty}^{z_0} \dots \int\limits_{-\infty}^{z_n} f\left(\psi(\eta_0), \psi(\eta_1), \dots, \psi(\eta_n)\right) \cdot |I|\, d\eta_0 d\eta_1 \dots d\eta_n\,, \tag{7}$$

где $\eta=\varphi(x)$; $x=\psi(\eta)$; I — матрица Якоби вида $I=\left|\dfrac{D\psi(\eta)}{D\eta}\right| = \left|\dfrac{Dx}{Dz}\right|$.

Если матрица Якоби не обращается в ноль в области возможных значений, то существует обратное отображение, причём $\dfrac{Dx}{Dz} = \left(\dfrac{Dz}{Dx}\right)^{-1}$.

Дифференцируя (7), получим формулу, характеризующую закон сохранения меры для плотности вероятности векторной случайной величины Z:

$$f_z(z) = f\left(\psi(z)\right)|I|. \tag{8}$$

В исследуемом авторами случае векторная величина Z является линейной функцией векторной случайной величины X, поэтому

$$z=\varphi(x) = Cx + y\,,\quad x = \psi(z) = C^{-1}\cdot z - C^{-1}\cdot y\,. \tag{9}$$

Подставляя последнее выражение в (8), получим формулу для плотности вероятности линейной функции векторной случайной величины:

$$f_z(z) = f\left(C^{-1}\cdot z - C^{-1}\cdot y\right)|I|. \tag{10}$$

Эта формула показывает, что при линейном преобразовании векторной случайной величины кривая плотности вероятности не изменяет своего характера, а только смещается относительно начала координат.

Применим формулу (10) для решения уравнения (5).

Как было сказано выше, предлагаемый в статье подход использует метод итераций, поэтому необходимо обозначить начальную область изоляции корня D_0 и привести уравнение (5) к виду:

$$x = Ax + y\ , \tag{11}$$

где $A = C + E$, E — единичная матрица.

Как видно, уравнение (11) представляет собой не что иное, как уравнение линейного межотраслевого баланса (3).

Для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы оператор A из уравнения (11) был сжимающим [5, 6], т. е. $\|A\| \le 1$.

Если оператор A не сжимающий, то его необходимо привести к сжимающему виду.

Каждое последующее приближение x будем находить по формуле

$$x_n = A \cdot x_{n-1} + y\ . \tag{12}$$

Из (5) следует, что $z\left(x_{n-1}\right) = C \cdot x_{n-1} + y$, поэтому

$$x_n = A \cdot x_{n-1} + y = A^2 \cdot x_{n-2} + \left(A + E\right) \cdot y = A^3 \cdot x_{n-3} + \left(A^2 + A + E\right) \cdot y = \ldots$$

Таким образом, можно выразить приближение x на любой итерации через x_0 формулой

$$x_n = A^n \cdot x_0 + \left(A^{n-1} + A^{n-2} + \ldots + E\right) \cdot y\ . \tag{13}$$

Обозначим $\left(A^{n-1} + A^{n-2} + \ldots + E\right) \cdot y = D$. Тогда

$$x_n = A^n \cdot x_0 + D\ ,\ x_0 = A^{-n} \cdot \left(x_n - D\right). \tag{14}$$

Подставим последнее уравнение в формулу (10):

$$f_{x_n}\left(x_n\right) = f_{x_0}\left(A^{-n} \cdot \left(x_n - D\right)\right) \cdot \left\| \frac{D\left\{A^{-n} \cdot \left(x_n - D\right)\right\}}{Dx_n} \right\| = f_{x_0}\left(A^{-n} \cdot \left(x_n - D\right)\right) \cdot \left\|A^{-n}\right\|, \tag{15}$$

здесь внешние прямые скобки в определителе означают, что этот определитель берётся по абсолютной величине.

С учётом преобразований

$$f_{x_n}\left(x_n\right) = f_{x_0}\left(A^{-n} \cdot \left(x_n - A^{n-1} - A^{n-2} - \ldots - E\right) \cdot y\right) \cdot \left|A^{-n}\right|, \tag{16}$$

где $f_{x_0}\left(A^{-n} \cdot \left(x_n - A^{n-1} - A^{n-2} - \ldots - E\right) \cdot y\right)$ — значение плотности вероятностной меры начального приближения x_0 в области изоляции корня D_0.

Область D_0 задаётся $2n$ точками, у каждой из которых n координат. Координаты точек области D на последующих итерациях определяются по формуле (12).

Область D сжимается к точке концентрации корня и вероятностная мера вырождается в этой точке в δ-функцию, если считать оператор и вектор правых частей не случайными. Каждое найденное по формуле (15) значение плотности вероятностной меры на i-й итерации имеет место в области D_i.

Из полученной в результате подстановки формулы (16) видно, что, задав начальное приближение и определив плотность его вероятностной меры, можно найти плотность вероятностной меры x на любом шаге.

Заключение. В работе изложен принципиально новый метод решения систем линейных алгебраических уравнений и рассмотрено его применение для решения уравнения линейного межотраслевого баланса.

Предложенный подход выгодно отличается от используемых ранее методов тем, что в анализе участвует достаточно широкая окрестность решения. Также неоспоримым преимуществом метода является отсутствие затруднений с выбором начальной точки.

Кроме того, предложенный алгоритм имеет более широкую область применения, чем ранее известные. В частности, он может быть использован в случае нечёткого задания линейного оператора или вектора правых частей.

Библиографический список

1. Красс, М. С. Основы математики и её приложения в экономическом образовании / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. — Москва: Дело, 2001. — 154 с.
2. Вержбицкий, В. М. Основы численных методов: учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. — Москва: Высшая школа, 2002. — 840 с.
3. Ильин, В. А. Линейная алгебра: учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — Москва: Физматлит, 2004. — 280 с.
4. Пугачёв, В. С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления / В. С. Пугачёв. — Москва: Физматлит, 1960. — 883 с.
5. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — Москва: Наука, 1984. — 752 с.
6. Бирман, Ш. М. Функциональный анализ / Ш. М. Бирман [и др.]; под ред. С. Г. Крейн. — Москва: Наука, 1972. — 544 с.

Материал поступил в редакцию 02.12.2011.

References

1. Krass, M. S. Osnovy` matematiki i eyo prilozheniya v e`konomicheskom obrazovanii / M. S. Krass, B. P. Chupry`nov. — Moskva: Delo, 2001. — 154 s. — In Russian.
2. Verzhbiczkij, V. M. Osnovy` chislenny`x metodov: uchebnik dlya vuzov / V. M. Verzhbiczkij. — Moskva: Vy`sshaya shkola, 2002. — 840 s. — In Russian.
3. Il`in, V. A. Linejnaya algebra: uchebnik dlya vuzov / V. A. Il`in, E`. G. Poznyak. — Moskva: Fizmatlit, 2004. — 280 s. — In Russian.
4. Pugachyov, V. S. Teoriya sluchajny`x funkcij i eyo primenenie k zadacham avtomaticheskogo upravleniya / V. S. Pugachyov. — Moskva: Fizmatlit, 1960. — 883 s. — In Russian.
5. Kantorovich, L. V. Funkcional`ny`j analiz / L. V. Kantorovich, G. P. Akilov. — Moskva: Nauka, 1984. — 752 s. — In Russian.
6. Birman, Sh. M. Funkcional`ny`j analiz / Sh. M. Birman [i dr.]; pod red. S. G. Krejn. — Moskva: Nauka, 1972. — 544 s. — In Russian.

ITERATIVE PROBABILISTIC SOLUTION METHOD OF INTERSECTORAL BALANCE LINEAR EQUATION

V. S. Strelchenko
(Rostov State Transport University),
I. V. Boguslavskiy
(Don State Technical University)

The new solution method for the systems of linear algebraic equations based on the application of the measure theory in the probabilistic space is stated. The possibility of its application for the solution of the equation of linear intersectoral balance is shown.

Keywords: *system of linear algebraic equations, equation of linear intersectoral balance, Leontief model, probability measure density.*