МЕХАНИКА
MECHANICS

УДК 539.3 DOI 10.12737/20219

Взаимодействие штампов на ортотропном полупространстве*

Д. А. Пожарский[1], Т. Г. Юрушкина[2]**
[1,2] Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Interaction of punches on orthotropic half-space ***

D. A. Pozharskiy[1], T. G. Yurushkina[2]**
[1,2] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Получено интегральное уравнение трехмерной контактной задачи для ортотропного полупространства (9 независимых упругих параметров в законе Гука), ядро которого не содержит квадратур и зависит от решения характеристического бикубического уравнения. Рассмотрено взаимодействие двух одинаковых симметрично внедряемых жестких штампов, имеющих форму эллиптических параболоидов. При неизвестной области контакта для решения этой задачи использован метод нелинейных граничных интегральных уравнений Галанова, позволяющий одновременно определить область контакта и давления в этой области. Для отладки компьютерной программы использовано точное решение для одного эллиптического штампа. При заданной осадке, форме основания и взаимной удаленности штампов для разных ортотропных материалов рассчитаны контактные давления, области контакта и вдавливающие силы. Модель ортотропного тела применяется для описания многих востребованных в технике и промышленности материалов: сера, сегнетовая соль, вольфрамит, барит, древесина различных пород.

Ключевые слова: теория упругости, контактные задачи, ортотропное полупространство, взаимодействие штампов.

An integral equation of the three-dimensional contact problem for an orthotropic half-space (9 independent elastic parameters in Hooke's law) is obtained where its kernel does not include integrals, but it depends on the solution of a characteristic binary cubic. The interaction between two identical symmetrically embedded punches is considered for the case of the elliptic paraboloids. Galanov's method of nonlinear boundary integral equations is used for solving the problem with an unknown contact domain that makes it possible to determine simultaneously the contact domain and the contact pressure. The exact solution to one elliptical punch is used for debugging the computer program. Contact pressures, contact zones and pressing forces are calculated for various orthotropic materials at the specified settlement, base forms of the punches, and relative distances between the punches. The orthotropic body model is applicable for describing lots of materials which are in-demand in the machinery and industry: sulfur, Rochelle salt, wolframite, barite, and various wood species.

Keywords: elasticity theory, contact problems, orthotropic half-space, interacting of punches.

Введение. Уравнения упругого равновесия и закон Гука для ортотропного тела описаны в монографии [1]. Примеры ортотропных материалов даны в работах [2, 3]. Интегральное уравнение (ИУ) трехмерной контактной задачи для ортотропного полупространства, ядро которого выражено через двукратный интеграл, и его точное решение для кругового штампа впервые было получено А. О. Ватульяном [4]. В работах [5, 6] предложен метод освобождения от квадратур в ядре ИУ для трансверсально изотропного полупространства, основанный на теории обобщенных функций и применимый также для ортотропного полупространства. В результате существенно упрощается расчет и регуляризация ядра ИУ, что и позволяет применить для решения контактных задач метод Галанова [7]. Исследовались точные решения контактных задач [8, 9] и взаимодействие штампов [10] для трансверсально изотропного полупространства. Цель настоящего исследования — изучить взаимодействие двух одинаковых штампов на ортотропном полупространстве.

* Работа выполнена по гранту РФФИ 15-01-00331.
** E-mail: pozharda@rambler.ru, zamtiana_z30@mail.ru
*** The research is done on RFFI grant no. 15-01-00331.

Контактная задача. В декартовых координатах рассмотрим ортотропное упругое полупространство $z \geq 0$. Оси упругой симметрии совпадают с осями координат. Закон Гука в прямой форме (выражения напряжений через деформации) включает 9 независимых упругих параметров c_{ii} (i=1, 2, 3, 4, 5, 6), c_{12}, c_{13}, c_{23} [1]. Пусть при z=0 в полупространство внедряются два одинаковых абсолютно жестких штампа (эллиптические параболоиды, вершины которых расположены на оси x), основания которых описываются функциями

$$f_{\pm}(x,y) = \frac{(x \pm h)^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}, \quad R_1 \geq R_2.$$

Пусть задача симметрична относительно оси y. Штампы вдавливаются без перекоса одинаковыми силами P, испытывая осадку δ. При заданных упругих параметрах, величинах R_1, R_2, h и осадке δ требуется определить области контакта $\Omega_{\pm}$, контактное давление $q(x,y)=\sigma_z(x,y,0)/c_{33}$ и силу P.

С учетом симметрии задачи $q(-x,y)=q(x,y)$. Тогда ИУ задачи можно свести к ИУ на одном участке. После замен

$x_* = x - h,\ q_*(x_*, y) = q(x,y),\ \ \Omega_* \leftrightarrow \Omega_-$,

это ИУ можно переписать в форме (звездочки далее опускаем):

$$\iint_{\Omega} q(\xi,\eta)[K(\eta - y, \xi - x) + K(\eta - y, \xi + x + 2h)]d\xi d\eta = 2\pi[\delta - f(x,y)],\ \ (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}, \quad R_1 \geq R_2.$$

Ядро ИУ (1) представимо в форме свободной от квадратур:

$$K(rs_1, rs_2) = \frac{a_0}{r} \cdot \frac{\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+\mu_3)(\mu_3+\mu_1)}{p_1\mu_1\mu_2\mu_3 - p_2(\mu_1+\mu_2+\mu_3)} = \frac{F(s_1^2, s_2^2)}{r}, \tag{2}$$

$$r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad s_1 = \cos\varphi, \quad s_2 = \sin\varphi,$$

$$p_1 = a_0[\Delta_1 s_1^4 + 2(2\gamma_6 + \gamma_3 - \gamma_7\gamma_8)s_1^2 s_2^2 + \Delta_2 s_2^4],$$

$$p_2 = -(\gamma_5 s_1^2 + \gamma_4 s_2^2)[\gamma_6(\Delta_1 s_1^4 + \Delta_2 s_2^4) + (\Delta - 2\gamma_3\gamma_6 + 2\gamma_6\gamma_7\gamma_8)s_1^2 s_2^2].$$

Здесь μ_1, μ_2, μ_3 — корни уравнения

$$a_0\mu^6 + a_2\mu^4 + a_4\mu^2 + a_6 = 0, \quad \operatorname{Re}\mu_k > 0, \ \ a_0 = \gamma_4\gamma_5, \tag{3}$$

$$a_2 = -[\gamma_4(\Delta_1 - 2\gamma_5\gamma_7) + \gamma_5\gamma_6]s_1^2 - [\gamma_5(\Delta_2 - 2\gamma_4\gamma_8) + \gamma_4\gamma_6]s_2^2,$$

$$a_4 = [\gamma_6(\Delta_1 - 2\gamma_5\gamma_7) + \gamma_1\gamma_4\gamma_5]s_1^4 + [\gamma_6(\Delta_2 - 2\gamma_4\gamma_8) + \gamma_2\gamma_4\gamma_5]s_2^4 +$$

$$+ 2s_1^2 s_2^2[\frac{\Delta}{2} + \gamma_9(\gamma_4+\gamma_8)(\gamma_5+\gamma_7) + \gamma_4\gamma_5\gamma_6 - \gamma_3\gamma_7\gamma_8 - \gamma_1\gamma_4\gamma_8 - \gamma_2\gamma_5\gamma_7 - \gamma_3\gamma_6],$$

$$a_6 = -(\gamma_5 s_1^2 + \gamma_4 s_2^2)[\gamma_6(\gamma_1 s_1^4 + \gamma_2 s_2^4) + (\gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_3\gamma_6 - \gamma_3^2)s_1^2 s_2^2],$$

$$\gamma_j = c_{jj}c_{33}^{-1}, \ \ j = 1,2,4,5,6, \ \ \gamma_3 = c_{12}c_{33}^{-1}, \ \ \gamma_7 = c_{13}c_{33}^{-1}, \ \ \gamma_8 = c_{23}c_{33}^{-1}, \ \ \gamma_9 = \gamma_3 + \gamma_6,$$

$$\Delta_1 = \gamma_1 - \gamma_7^2, \quad \Delta_2 = \gamma_2 - \gamma_8^2, \quad \Delta = c_{33}^{-3}\det\|c_{nm}\|, \ \ n,m = 1,2,3.$$

При вычислении ядра (2) в каждой точке приходится решать новое кубическое характеристическое уравнение (по формулам Кардано), получающееся из уравнения (3).

В табл. 1 даны значения безразмерных параметров γ_j (j=1, 2, …, 8) (3) для ряда материалов [2, 3].

Для решения ИУ (3) при условии $q(x,y)=0$, $(x,y)\in\partial\Omega$, используем метод нелинейных граничных ИУ типа Гаммерштейна, позволяющий одновременно определить область контакта и контактное давление. Суть метода подробно изложена в работах [7, 10].

Предположим, что область контакта Ω в ИУ (3) целиком содержится в прямоугольнике

$S = \{|x| \leq a_0,\ |y| \leq b_0\}$.

Таблица 1

Значения характеристик (безразмерные)

Материал	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8
Топаз, $Al_2(F,OH)SiO_4$	0,956	1,183	0,427	0,366	0,451	0,444	0,288	0,298
Ангидрит, $CaSO_4$	0,838	1,652	0,147	0,290	0,237	0,0827	0,136	0,283
Сера, S	0,497	0,424	0,275	0,0890	0,180	0,157	0,354	0,329
Барит, $BaSO_4$	0,832	0,757	0,428	0,112	0,251	0,240	0,283	0,266
Целестин, $SrSO_4$	0,812	0,825	0,601	0,105	0,217	0,207	0,470	0,481
Вольфрамит, $(Mn, Fe) WO_4$	0,758	0,719	0,358	0,216	0,271	0,0871	0,341	0,295
Сегнетова соль, $NaK(C_4H_4O_6)\cdot 4H_2O$	0,687	1,027	0,380	0,361	0,0865	0,264	0,313	0,394
Ясень белый	0,162	0,104	0,0628	0,0702	0,0994	0	0,0878	0,0736
Береза желтая	0,109	0,0698	0,0484	0,0637	0,0693	0,0159	0,0686	0,0532
Дуб красный	0,181	0,0958	0,0559	0,0760	0,0835	0	0,0885	0,0631
Грецкий орех черный	0,142	0,0749	0,0575	0,0558	0,0765	0,0189	0,107	0,0759
Лиственница западная	0,0915	0,0753	0,0322	0,0690	0,0630	0,0070	0,0414	0,0312
Сосна широкохвойная	0,117	0,0633	0,0402	0,0600	0,0710	0,0120	0,0536	0,0312

Прямоугольник S покроем равномерной сеткой из m узлов с шагами h_1 по оси x и h_2 по оси y. При расчете значений ядра в этих узлах его особенности сглаживались по формулам

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \to (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \delta_*, \quad \delta_* = \frac{h_1 h_2}{16}. \tag{4}$$

Регуляризация (4) обеспечивает сходимость метода и отладку программы, давая хорошее совпадение с точным решением для одного эллиптического параболоида, которое имеет вид

$$q(x,y) = q_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad \Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$P = q_0 \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = \frac{2}{3}\pi a b q_0, \tag{5}$$

где

$$\delta = \frac{abq_0}{8}\int\limits_0^\infty \frac{c(\varphi)d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}, \quad c(\varphi) = F(\cos^2\varphi, \sin^2\varphi),$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{a^2}{2R_1} + \frac{b^2}{2R_2} = \delta, \tag{6}$$

$$c = \int\limits_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)\cos^2\varphi d\varphi}{[\varepsilon^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{3/2}}, \quad d = \int\limits_0^{2\pi} \frac{c(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi}{[\varepsilon^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi]^{3/2}}, \quad \varepsilon = \frac{a}{b}.$$

При заданных величинах δ, R_1, R_2 сперва из формулы (6) для R_2/R_1 следует найти ε, а затем определить полуоси эллипса контакта a и b из следующей формулы (6). Величина q_0 далее находится из первой формулы (6).

Отметим, что даже при вдавливании кругового штампа (R_1=R_2) область контакта в решении (5) будет в общем случае эллиптической.

Численный анализ. При расчетах брали a_0=b_0 (прямоугольник S — квадрат). Число узлов бралось от 81 до 289 (при этом наибольшая погрешность вычислений наблюдается вблизи границы области контакта).

Введем безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем; контактное давление в (3) уже является безразмерным)

$$x' = \frac{x}{a_0}, \; y' = \frac{y}{a_0}, \; \delta' = \frac{\delta}{a_0}, \; R_1' = \frac{R_1}{a_0}, \; R_2' = \frac{R_2}{a_0}, \; a' = \frac{a}{a_0}, \; b' = \frac{b}{a_0}, \; P' = \frac{P}{a_0^2}.$$

В табл. 2 приведены значения $q_0=q(0,0)$ и P для случая вдавливания круговых параболоидов ($R_1=R_2=0{,}5$) при $\delta=1$. Случай $h=\infty$ соответствует вдавливанию только одного штампа.

Как показывают расчеты, давление и сила возрастают с ростом осадки штампов. При сближении штампов (с уменьшением значения h) проявляется сложный характер взаимодействия штампов: функция распределения контактных давлений становится несимметричной, уменьшаются значения давления и силы.

Таблица 2

Значения давления и силы

Материал	$h=\infty$		$h=5$		$h=1{,}1$	
	q_0	P	q_0	P	q_0	P
Топаз	0,886	0,922	0,873	0,881	0,836	0,763
Ангидрит	0,758	0,788	0,748	0,757	0,720	0,661
Сера	0,514	0,531	0,506	0,504	0,481	0,433
Барит	0,636	0,656	0,626	0,623	0,595	0,534
Целестин	0,557	0,575	0,548	0,546	0,521	0,468
Вольфрамит	0,695	0,724	0,685	0,691	0,656	0,599
Сегнетова соль	0,652	0,663	0,645	0,640	0,622	0,572
Ясень	0,433	0,450	0,426	0,429	0,408	0,371
Береза	0,393	0,409	0,387	0,391	0,371	0,339
Дуб	0,425	0,442	0,418	0,422	0,401	0,366
Орех	0,392	0,407	0,386	0,388	0,369	0,335
Лиственница	0,388	0,404	0,383	0,387	0,367	0,337
Сосна	0,391	0,406	0,385	0,388	0,368	0,336

Материалы из табл. 1 могут быть разделены на 2 типа. К первому типу относятся материалы, для которых выполнено следующее: если к поверхности полупространства из этого материала в начале координат приложена сосредоточенная сила ($q(x,y)=\delta(x)\delta(y)$), то нормальное перемещение поверхности в точке $x=0$, $y=1$ будет больше, чем в точке $x=1$, $y=0$ (ангидрит, сегнетова соль и лиственница). Для остальных материалов (второго типа) больше будет перемещение в точке $x=1$, $y=0$. В случае $h=\infty$ (при внедрении одного кругового параболоида) область контакта вытягивается вдоль той оси, на которой меньше нормальные перемещения точек равноудаленных от начала координат, где приложена нормальная сосредоточенная сила.

Как показывают расчеты области контакта, сделанные для сегнетовой соли и барита ($R_1=R_2=0{,}5$, $\delta=1$), в сравнении со случаем одного штампа ($h=\infty$) взаимодействие близко расположенных штампов ($h=1{,}1$) приводит к уменьшению площади области контакта под каждым штампом (при заданной осадке).

Выводы. Представление ядра ИУ в форме, свободной от квадратур, позволяет эффективно исследовать взаимодействие штампов на ортотропном полупространстве. Аналогично может быть исследован случай, когда вершины штампа расположены на оси y. Развитый метод также может быть применен для случая конических, пирамидальных и других штампов. С практической точки зрения наиболее важными представляются расчеты на контактную прочность для многочисленных пород древесины, которые обладают ортотропной структурой.

Библиографический список

1. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. — Москва : Наука, 1977. — 416 с.

2. Александров, К. С. Анизотропия упругих свойств минералов и горных пород / К. С. Александров, Г. Т. Продайвода. — Москва : СО РАН, 2000. — 347 с.

3. Хантингтон, Г. Упругие постоянные кристаллов / Г. Хантингтон // Успехи физических наук. — 1961. — Т. LXXIV, вып. 3. — С. 461–520.

4. Ватульян, А. О. О действии жесткого штампа на анизотропное полупространство / А. О. Ватульян // В сб.: Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Под ред. И. И. Воровича. — Ростов-на-Дону : Изд-во РГУ, 1983. — С. 112–115.

5. Davtyan, D. B. The action of a strip punch on a transversely isotropic half-space / D. B. Davtyan, D. A. Pozharskii // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2012. — Vol. 76, iss. 5. — P. 558–566.

6. Pozharskii, D. A. Contact problem for a transversely isotropic half-space with an unknown contact region / D. A. Pozharskii // Doklady Physics. — 2014. — Vol. 59, № 3. — P. 144–147.

7. Galanov, B. A. The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known / B. A. Galanov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1985. — Vol. 49, iss. 5. — P. 634–640.

8. Davtyan, D. B. Action of an elliptic punch on a transversely isotropic half-space / D. B. Davtyan, D. A. Pozharskii // Mechanics of Solids. — 2014. — Vol. 49, № 5. — P. 576–586.

9. Пожарский, Д. А. Сравнение точных решений контактных задач для трансверсально изотропного полупространства / Д. А. Пожарский, Д. Б. Давтян // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2015. — № 1. — С. 23–28.

10. Bedoidze, M. V. The interaction of punches on a transversely isotropic half-space / M. V. Bedoidze, D. A. Pozharskii // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2014. — Vol. 78, iss. 4. — P. 409–414.

References

1. Lekhnitskiy, S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. [Theory of anisotropic body elasticity.] Moscow: Nauka, 1977, 416 p. (in Russian).

2. Alexandrov, К.S., Prodayvoda, G.T. Anizotropiya uprugikh svoystv mineralov i gornykh porod. [Elastic anisotropy of minerals and formations.]. Moscow: SO RAN, 2000, 347 p. (in Russian).

3. Huntington, G. Uprugie postoyannye kristallov. [Elastic constants of crystals.] Physics – Uspekhi, 1961, vol. LXXIV, iss. 3, pp. 461–520 (in Russian).

4. Vatulyan, A.O. O deystvii zhestkogo shtampa na anizotropnoe poluprostranstvo. [On the action of rigid stamp on anisotropic half-space.] V sb.: Staticheskie i dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti. Pod red. I. I. Vorovicha. [Vorovich, I.I., ed. Static and dynamic mixed problems of elasticity theory.] Rostov-on-Don: RSU Press, 1983, pp. 112–115 (in Russian).

5. Davtyan, D.B, Pozharskii, D.A. The action of a strip punch on a transversely isotropic half-space. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2012, vol. 76, iss. 5, pp. 558–566.

6. Pozharskii, D.A. Contact problem for a transversely isotropic half-space with an unknown contact region. Doklady Physics, 2014, vol. 59, no. 3, pp. 144–147.

7. Galanov, B.A. The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1985, vol. 49, iss. 5, pp. 634–640.

8. Davtyan, D.B., Pozharskii, D.A. Action of an elliptic punch on a transversely isotropic half-space. Mechanics of Solids, 2014, vol. 49, no. 5, pp. 576–586.

9. Pozharskiy, D.A., Davtyan, D.B. Sravnenie tochnykh resheniy kontaktnykh zadach dlya transversal'no izotropnogo poluprostranstva. [Comparison of contact problem exact solutions for transversely isotropic half-space.] Vestnik of DSTU, 2015, no. 1, pp. 23–28 (in Russian).

10. Bedoidze, M.V., Pozharskii, D.A. The interaction of punches on a transversely isotropic half-space. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2014, vol. 78, iss. 4, pp. 409–414.

Поступила в редакцию 09.03.2016
Сдана в редакцию 10.03.2016
Запланирована в номер 07.07.2016