

УДК 539.215.9:633.11

Давление сыпучего материала в круглом силосе**В. Б. Федосеев, О. Н. Серченко, Л. М. Грошев**

(Донской государственный технический университет)

Рассмотрена задача о распределении давления в сыпучем материале, находящемся в круглом силосе, с позиций вязкой жидкости, обладающей сухим внутренним трением.

Ключевые слова: сыпучий материал, круглый силос, боковой коэффициент, коэффициенты трения.

Введение. Как известно, сыпучие материалы обладают как свойствами твёрдого тела, так и свойствами жидкости, что сильно осложняет теоретические исследования. Например, достаточно элементарная задача расчёта давления в сыпучем материале, находящемся в цилиндрической ёмкости, с позиций сплошного твёрдого тела [1] приводит к резкому расхождению с экспериментальными данными.

Та же задача, рассматриваемая с позиций дискретного твёрдого тела, решается в первом приближении только для частиц сферической формы, «уложенных» горизонтальными слоями с правильной геометрической «упаковкой» [2]. При этом учитываются коэффициент трения между сферическими частицами (коэффициент внутреннего трения μ_i) и коэффициент трения частиц о стены ёмкости (коэффициент внешнего трения μ_e), которые определяются экспериментально. И хотя согласие с экспериментом здесь гораздо лучше, такой подход также вызывает справедливые возражения.

Предпринята попытка решить сформулированную выше задачу, представляя сыпучий материал в виде вязкой жидкости с теми же коэффициентами внутреннего (μ_i) и внешнего (μ_e) трения. При таком подходе нет необходимости задаваться формой частиц, их упругостью, упаковкой, размерами и т. д.

Теоретический расчёт давления в круглом силосе. Рассмотрим сыпучий материал в глубоком круглом силосе (см. рис. 1).

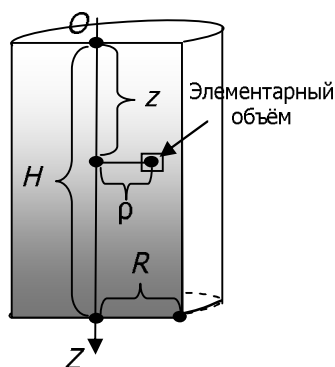


Рис. 1. Сыпучий материал в круглом силосе и цилиндрическая система координат: H — высота силоса; R — радиус силоса; z, ρ — текущие координаты элементарного кольца

В силу симметрии задачи воспользуемся цилиндрической системой координат, в которой можно пренебречь зависимостью от азимутального угла, как показано на рис. 1. В слое сыпучего материала выделим элементарное кольцо, объём которого будет равным: $2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot dz$.

В стационарном случае сумма сил, действующих на элементарное кольцо, равна нулю. В проекции на ось OZ это условие имеет вид:

$$0 = \gamma \cdot g \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dp \cdot dz - 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dp \cdot dz \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz - \mu_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dz \cdot \frac{\partial P_p}{\partial p} \cdot dp, \quad (1)$$

где γ — плотность сыпучего материала; P_z — вертикальное, параллельное силе тяжести давление в сыпучем материале; P_p — горизонтальное, перпендикулярное силе тяжести давление в сыпучем материале.

Здесь мы, в согласии с экспериментом, полагаем, что закон Паскаля для сыпучих тел не справедлив.

В уравнении (1) первое слагаемое — сила тяжести элементарного кольца, второе — сила сопротивления движению за счёт градиента вертикального давления, третье — сила внутреннего сухого трения.

В проекции на горизонтальное направление это условие имеет вид:

$$0 = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dz \cdot \frac{\partial P_p}{\partial p} \cdot dp - \mu_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dp \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz. \quad (2)$$

Здесь первое слагаемое — сила сопротивления сжатию (или растяжению) элементарного кольца, обусловленная градиентом горизонтального давления, второе — сила трения на горизонтальных поверхностях кольца.

Из уравнения (1), учитывая (2), получим дифференциальное уравнение для определения вертикальной компоненты давления:

$$0 = \gamma \cdot g \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dp \cdot dz - 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot dp \cdot dz \cdot (1 + \mu_i^2) \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z}. \quad (3)$$

Проинтегрируем уравнение (3) по координате p в пределах от 0 до R :

$$0 = \pi \cdot \gamma \cdot g \cdot R^2 \cdot dz - \pi \cdot R^2 \cdot dz \cdot (1 + \mu_i^2) \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} + C. \quad (4)$$

Поскольку при таком интегрировании элементарный объём переходит в элементарный слой, то в последнем уравнении первое слагаемое представляет собой силу тяжести, действующую на единицу длины (вдоль радиальной оси) элементарного слоя толщиной dz , второе слагаемое — результирующую силу сопротивления (за счёт градиента давления и силы внутреннего трения), действующую на этот элементарный слой. Поскольку уравнение (4) справедливо и на поверхности $p = R$, то очевидно, что константа C представляет собой силу трения, действующую на боковую поверхность элементарного слоя со стороны стенки силоса и направленную против силы тяжести:

$$C = -\mu_e \cdot P_p \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot dz = -\mu_e \cdot k \cdot P_z \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot dz. \quad (5)$$

Здесь использована связь между вертикальной и горизонтальной компонентами давления через боковой коэффициент k : $P_p = k \cdot P_z$ (такая зависимость установлена в [3] и рекомендована в СНиП 2.02.02-85).

Общий интеграл уравнения (4) с учётом (5) можно представить в виде:

$$P_z = \frac{\gamma \cdot g \cdot R}{2 \cdot \mu_e \cdot k} + C_1 \cdot \exp \left(-\frac{2 \cdot \mu_e \cdot k \cdot z}{(1 + \mu_i^2) \cdot R} \right). \quad (6)$$

Если найти константу C_1 из условия, что на поверхности силоса давление равно нулю, то выражение для вертикального давления (без учёта зависимости от горизонтальной координаты) примет вид:

$$P_z = \frac{\gamma \cdot g \cdot R}{2 \cdot \mu_e \cdot k} \cdot \left(1 - \exp \left(-\frac{2 \cdot \mu_e \cdot k \cdot z}{(1 + \mu_i^2) \cdot R} \right) \right). \quad (7)$$

Соответственно, выражение для горизонтальной компоненты давления запишется в виде:

$$P_p = \frac{\gamma \cdot g \cdot R}{2 \cdot \mu_e} \cdot \left(1 - \exp \left(- \frac{2 \cdot \mu_e \cdot k \cdot z}{(1 + \mu_i^2) \cdot R} \right) \right). \quad (8)$$

Для анализа полученного решения найдём разность Δ между весом сыпучего материала в силосе и суммой сил давления на дно силоса F_D и силы трения сыпучего материала о боковую стену $F_{Тр}$. Нетрудно убедиться, что эта разность будет равна:

$$\Delta = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot g \cdot R^3}{2 \cdot \mu_e \cdot k} (1 + \mu_i^2 - 1) \cdot \left(1 - \exp \left(- \frac{2 \cdot \mu_e \cdot k \cdot H}{(1 + \mu_i^2) \cdot R} \right) \right). \quad (9)$$

Из данного выражения видно, что $\Delta = 0$ в том случае, когда $\mu_i = 0$. Таким образом, при выполнении условия равновесия движение сыпучего материала не происходит и внутренним трением можно пренебречь. Из (9) также следует, что если $\mu_i \neq 0$, то сила трения в сумме с силой давления будут меньше силы тяжести, за счёт чего, собственно, и происходит уплотнение сыпучего материала в силосе.

Очевидно, что при $\mu_i \rightarrow 0$, $k \rightarrow 1$ наступит равновесное состояние (сыпучее тело переходит в идеальную жидкость), давление по горизонтали станет равным давлению по вертикали и, соответственно, решение (7) примет вид:

$$P_0 = \frac{\gamma \cdot g \cdot R}{2 \cdot \mu_e} \cdot \left(1 - \exp \left(- \frac{2 \cdot \mu_e \cdot z}{R} \right) \right). \quad (10)$$

Графики зависимости давлений, рассчитанных по формулам (7) и (10), приведены на рис. 2.

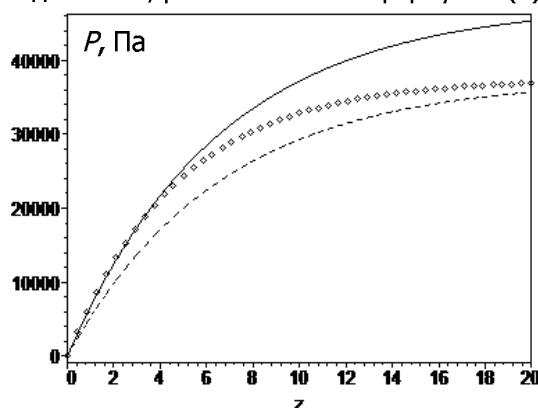


Рис. 2. Вертикальное (сплошная линия) и горизонтальное (пунктирная линия) давление в стационарном состоянии и давление (линия из точек) в равновесном состоянии для круглого силоса с сыпучим материалом ($R = 3,5$ м, $\chi = 300^\circ$, $\gamma = 800$ кг/м³)

Из рисунка следует, что вертикальное давление в стационарном состоянии (сплошная линия) больше давления в равновесном состоянии (линия из точек). В то же время горизонтальное давление в стационарном состоянии меньше давления в равновесном состоянии (пунктирная линия). Следовательно, в равновесном состоянии стены силоса берут на себя большую нагрузку, в результате чего давление на дно уменьшается. Иначе говоря, в стационарном состоянии (при движении сыпучего материала) на стены силоса оказывается меньшая нагрузка, чем в равновесном состоянии, когда сыпучий материал неподвижен.

При нахождении сыпучего материала в силосе формально он не перемещается, следовательно, находится в равновесном состоянии. При этом давление в нём необходимо рассчитывать по формуле (10). Но в действительности в сыпучем материале скачкообразно происходят процессы его уплотнения, слёживания под действием микроколебаний сейсмического или техногенного

характера, т. е. он находится в состоянии микродвижения. Таким образом, сыпучий материал часть времени «проводит» в стационарном состоянии, а часть — в равновесном. Соответственно, давление также меняется скачкообразно.

Введём теперь в решение (7) зависимость от координаты ρ . Аналогично [3] эту зависимость представим в виде:

$$P_z = \frac{\gamma \cdot g \cdot R}{2 \cdot \mu_e \cdot k} \cdot \left(1 - \exp \left(- \frac{2 \cdot \mu_e \cdot k}{1 + \mu_i^2} \cdot \frac{z - (R - \rho) \cdot \operatorname{tg} \chi}{R} \right) \right), \quad (11)$$

где χ — угол естественного откоса.

Потребуем теперь, чтобы решение (11) удовлетворяло уравнению (2) с учётом того, что $P_p = k \cdot P_z$:

$$k \cdot \frac{\partial P_z}{\partial \rho} = \mu_i \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z}. \quad (12)$$

Найдя первые производные от (11) по координатам ρ и z и подставив их в равенство (12), получаем, что оно выполняется только при $k \cdot \operatorname{tg} \chi = \mu_i$, т. е.

$$k = \frac{\mu_i}{\operatorname{tg} \chi}. \quad (13)$$

Это выражение для бокового коэффициента совпадает с результатом, полученным в [3] для сыпучего материала, находящегося в насыпи.

Однако решение в форме (11) не удовлетворяет граничному условию на поверхности $z = 0$. Поэтому для нахождения более точного решения разобьём весь объём силоса, занятый сыпучим материалом, на области (рис. 3).

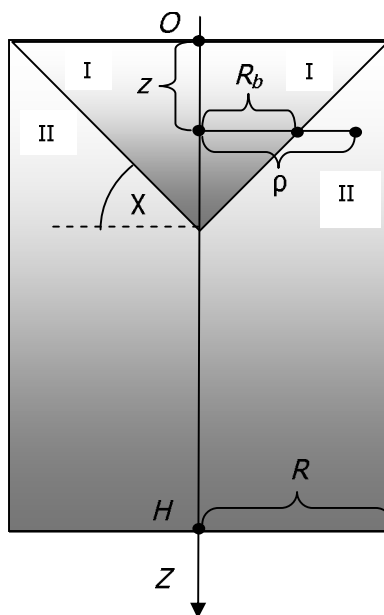


Рис. 3. Деление силоса на области: H — высота силоса; R — радиус силоса; χ — угол естественного откоса; z, ρ — текущие координаты элементарного кольца; R_b — произвольная точка на границе областей I и II

Поскольку в области I влияние стенок силоса ещё не будет сказываться (эта область расположена выше плоскости естественного откоса), то в этой области решение будет определяться формулой [3]:

$$P_z^I(z) = \frac{\gamma \cdot g}{1 + \mu_f^2} \cdot z. \quad (14)$$

Решение в области II будем искать в виде:

$$P_z^{II}(\rho, z) = \frac{\gamma \cdot g \cdot R}{2 \cdot \mu_e \cdot k} \cdot \left(1 - \exp \left(- \frac{2 \cdot \mu_e \cdot k}{1 + \mu_f^2} \cdot \frac{z - (R - \rho) \cdot \operatorname{tg} \chi}{R} \right) \right) + \frac{\gamma \cdot g}{1 + \mu_f^2} \cdot (R - \rho) \cdot \operatorname{tg} \chi. \quad (15)$$

На линии $z = 0$ решение (15) обращается в нуль, на боковой стенке силоса (при $\rho = R$) оно переходит в уравнение (7), а на поверхности естественного откоса (на границе областей), определяемой уравнениями $\rho = R_b$, $z = (R - R_b) \cdot \operatorname{tg} \chi$, уравнение (15) переходит в уравнение (14). Таким образом, согласование решений в областях I и II выполнено.

В случае, когда сыпучий материал находится в силосе с абсолютно гладкими стенами ($\mu_e \rightarrow 0$), решение (15) примет вид:

$$\lim_{\mu_e \rightarrow 0} P_z^{II} = \frac{\gamma \cdot g}{1 + \mu_f^2} \cdot [z - (R - \rho) \cdot \operatorname{tg} \chi] + \frac{\gamma \cdot g}{1 + \mu_f^2} \cdot (R - \rho) \cdot \operatorname{tg} \chi = \frac{\gamma \cdot g}{1 + \mu_f^2} \cdot z.$$

Это означает, что сыпучий материал в этом случае ведёт себя как безграничная насыпь и влиянием стенок можно пренебречь, что не противоречит физическому смыслу задачи.

Итак, мы видим, что решения (14) и (15) удовлетворяют граничным условиям и предельному переходу к идеальной жидкости.

Таким образом, для идеального сыпучего материала в круглом силосе найдено вертикальное давление (15). Горизонтальное давление определяем из выражения (15) с учётом выражения (13) для бокового коэффициента.

На рис. 4 показана зависимость вертикального и горизонтального давления, рассчитанного по формулам (14) и (15), в силосе радиуса $R = 3,5$ м, в котором находится сыпучий материал ($\gamma = 800$ кг/м³, $\chi = 30^\circ$), непосредственно вдоль его стенки и по центру силоса. Как видно из рисунка, вертикальное давление по осевой линии силоса ($\rho = 0$) несколько выше вертикального давления у стенки силоса ($\rho = R$) и, кроме того, горизонтальное давление меньше вертикального.

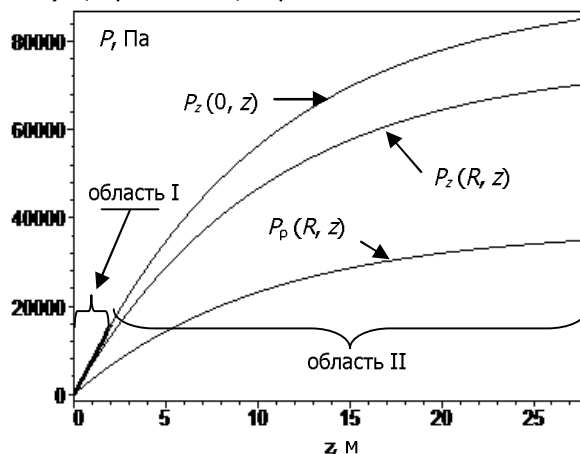


Рис. 4. Зависимость вертикального и горизонтального давления от координаты z : $P_z(0, z)$ — вертикальное давление на оси силоса; $P_z(R, z)$ — вертикальное давление у стенки силоса; $P_p(R, z)$ — горизонтальное давление у стенки силоса; радиус силоса $R = 3,5$ м; угол естественного откоса $\chi = 30^\circ$; плотность сыпучего материала $\gamma = 800$ кг/м³; $\mu_f = 0,287$; $\mu_e = 0,364$

На рис. 5, 6 представлены графики сравнения теоретических кривых (непрерывные линии) и экспериментальных значений [4]. На рис. 5 показана зависимость горизонтального давления на стену круглого железобетонного силоса высотой $H = 21$ м и радиусом $R = 3,25$ м, а на

рис. 6 — зависимость силы давления на дно стального круглого силоса высотой $H = 6$ м и радиусом $R = 0,5$ м.

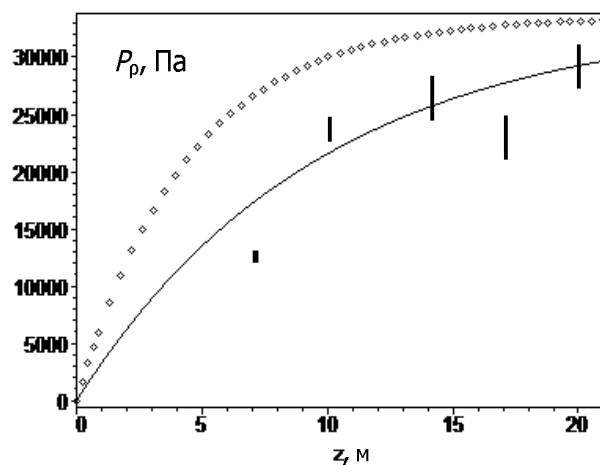


Рис. 5. Теоретическое горизонтальное стационарное (сплошная линия) и равновесное (линия из точек) давление в круглом железобетонном силосе ($H = 21$ м, $R = 3,25$ м, $\chi = 30^\circ$); вертикальные линии — разброс экспериментальных значений

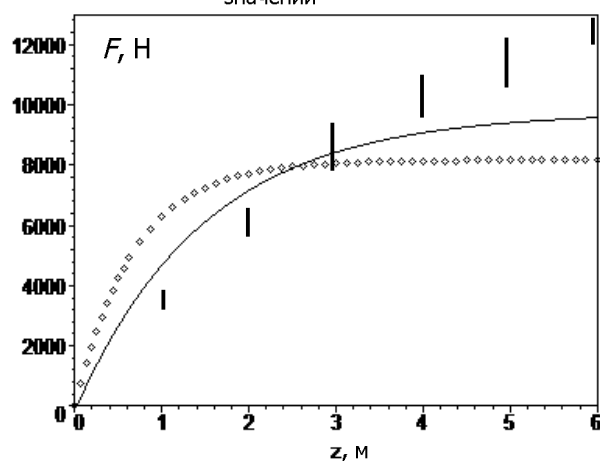


Рис. 6. Теоретическая сила давления на дно стального круглого силоса ($H = 6$ м, $R = 0,5$ м) от высоты засыпки: сплошная линия — стационарное состояние, линия из точек — равновесное ($\chi = 30^\circ$); вертикальные линии — разброс экспериментальных значений

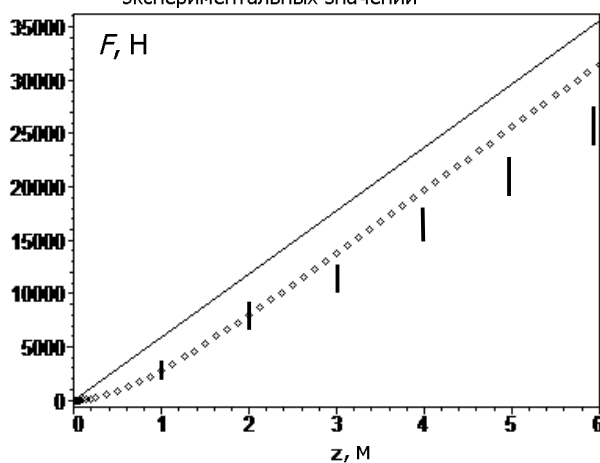


Рис. 7. Зависимость силы трения на боковую стенку круглого стального силоса ($H = 6$ м, $R = 0,5$ м, $\chi = 30^\circ$) от высоты засыпки: стационарное состояние — сплошная линия, равновесное — линия из точек, вертикальные линии — разброс экспериментальных значений

На рис. 7 представлена зависимость силы трения, действующей на боковую стенку стального круглого силоса высотой $H = 6$ м и радиусом $R = 0,5$ м, от высоты засыпки.

Как видно из рисунков, разброс экспериментальных данных достаточно велик. Кроме того, само горизонтальное давление по направлениям сторон света разное [4].

Выводы. Очевидно, что этот разброс экспериментальных значений связан с процессами уплотнения сыпучего материала, со временем его выдержки в силосе, а также с тем, с какого направления идут микровибрации сейсмического или техногенного характера. Сыпучий материал в силосе всё время находится в промежуточном положении между стационарным и равновесным состояниями. Кроме того, сами параметры сыпучего материала (насыпная плотность, углы внешнего и внутреннего трения) являются некоторыми обобщёнными, мало соответствующими конкретному сыпучему материалу и, к тому же, меняющимися с течением времени. Поэтому более точного согласия с экспериментальными данными ожидать трудно.

Но из сравнения с экспериментальными данными всё же можно сделать вывод, что состояние сыпучего материала ближе к стационарному, чем к равновесному.

Таким образом, подход к сыпучему материалу как к вязкой жидкости приводит к согласию с экспериментальными данными при минимальном количестве необходимых допущений.

Библиографический список

1. Соколовский, В. В. Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский. — Москва: Физматгиз, 1960. — 241 с.
2. Гячев, Л. В. Основы теории бункеров / Л. В. Гячев. — Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1992. — 312 с.
3. Федосеев, В. Б. Боковой коэффициент и давление в насыпи сыпучего материала / В. Б. Федосеев, А. Б. Гордеева // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки. — 2010. — № 2. — С. 58—60.
4. Хаймович, М. И. Опытное определение давления зерна в силосах / М. И. Хаймович // Строительная промышленность. — 1944. — № 5—6.

Материал поступил в редакцию 16.12.2011.

References

1. Sokolovskij, V. V. Statika sy`puchej sredy` / V. V. Sokolovskij. — Moskva: Fizmatgiz, 1960. — 241 s. — In Russian.
2. Gyachev, L. V. Osnovy` teorii bunkerov / L. V. Gyachev. — Novosibirsk: Izd-vo Novosibir. un-ta, 1992. — 312 s. — In Russian.
3. Fedoseev, V. B. Bokovoj koefficient i davlenie v nasy`pi sy`puchego materiala / V. B. Fedoseev, A. B. Gordeeva // Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Ser. Estestv. nauki. — 2010. — # 2. — S. 58—60. — In Russian.
4. Hajmovich, M. I. Opy`tnoe opredelenie davleniya zerna v silosax / M. I. Hajmovich // Stroitel`naya promy`shlennost`. — 1944. — # 5—6. — In Russian.

BULK MATERIAL PRESSURE IN ROUND SILO

V. B. Fedoseyev, O. N. Serchenko, L. M. Groshev

(Don State Technical University)

The problem on pressure distribution in the bulk material of the round silo with allowance for viscous fluid with dry internal friction is considered.

Keywords: bulk material, round silo, lateral factor, friction factors.