УДК 517.9

С.В. ЕФИМОВ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА НЕКОТОРЫХ БИСИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ СО СДВИГОМ МЕТОДОМ ГОМОТОПИИ

Продолжено исследование малоизученной задачи индекса бисингулярных операторов со сдвигом. Рассмотрены новые случаи вычисления индекса бисингулярных операторов с нераспадающимся инволютивным сдвигом методом гомотопии.

Ключевые слова: *индекс оператора, бисингулярный оператор, инволютивный сдвиг, гомотопия, частичный индекс функции.*

Введение. В теории линейных операторов важное место отводится вопросам нетеровости (фредгольмовости) и индекса. В работах [1–4] построено символическое исчисление и исследована нетеровость бисингулярных операторов с различными инволютивными сдвигами. Однако об индексе таких операторов известно мало. Имеет смысл, в первую очередь, выявить случаи, когда можно построить гомотопию в классе нетеровых операторов от бисингулярного оператора со сдвигом к бисингулярному оператору без сдвига, индекс которого хорошо известен [5]. Некоторые такие случаи рассмотрены в [6], и более общий – в [7]. В настоящей работе изучаются другие случаи, допускающие решение задачи методом гомотопии.

Постановка задачи. Пусть Γ_1, Γ_2 – простые замкнутые контуры типа Ляпунова в комплексной плоскости, $1 < \mathrm{p} < +\infty$, I_1 и S_1 – единичный оператор и оператор сингулярного интегрирования Коши соответственно в пространстве $L_\mathrm{p}(\Gamma_1)$, I_2 и S_2 – такие же операторы в $L_\mathrm{p}(\Gamma_2)$. В пространстве $L_\mathrm{p}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ введем четыре проектора $P_{\pm+} = \frac{1}{4}(I_1 \pm S_1) \otimes (I_2 + S_2)$, $P_{\pm-} = \frac{1}{4}(I_1 \pm S_1) \otimes (I_2 - S_2)$.

Пусть отображение α тора $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ на себя (сдвиг на торе) по правилу

$$\alpha(t_1, t_2) = (\alpha_1(t_1, t_2), \alpha_2(t_1, t_2)) \quad (t_1 \in \Gamma_1,\ t_2 \in \Gamma_2)$$

инволютивное ($\exists \alpha^{-1} = \alpha$), достаточно гладкое ($\alpha_1$, $\alpha_2 \in C^1(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$, и их частные производные удовлетворяют условию Гельдера по переменной дифференцирования равномерно по другой переменной), и пусть частные производные функций α_1, α_2 не обращаются в нуль на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ (это условие не позволяет α распадаться на одномерные компоненты). С двумерным сдвигом α свяжем оператор сдвига W в пространстве $L_\mathrm{p}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$: $Wf = f \circ \alpha$ ($f \in L_\mathrm{p}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$).

Задачей является вычисление индекса оператора

$$\sum_{\mathrm{x,y}=\pm} a_{\mathrm{xy}} P_{\mathrm{xy}} + W \sum_{\mathrm{x,y}=\pm} b_{\mathrm{xy}} P_{\mathrm{xy}}\,, \qquad (1)$$

где a_{xy}, $b_{\mathrm{xy}} \in C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$, при некоторых ограничениях на его коэффициенты.

Предварительные сведения. Зафиксируем по одной точке z_1^{o} и z_2^{o} в ограниченных областях на комплексной плоскости с границами Γ_1 и Γ_2 соответственно. Рассмотрим целые числа $\kappa_{\mathrm{mn}} = \mathrm{ind}_{\mathrm{m}}(\alpha_{\mathrm{n}} - z_{\mathrm{n}}^{\mathrm{o}})$, $\gamma_{\mathrm{mn}} = \mathrm{sign}\kappa_{\mathrm{mn}}$ $(\mathrm{m},\ \mathrm{n} = 1,\ 2)$. Из свойств сдвига α следует, что $\kappa_{\mathrm{mn}} \neq 0$. Если $\gamma_{11} = \pm 1$, то введем $\lambda = \pm$, $\nu = \mp$. Если $\gamma_{21} = \pm 1$, то введем $\omega = \pm$, $\mu = \mp$. Для удобства обозначим $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \alpha$, если φ – функция на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. И пусть $GC(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ – мультипликативная группа обратимых элементов кольца $C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Как сообщалось в [7], из теоремы 5 работы [4] следует, что если оператор (1) нетеров в $L_{\mathrm{p}}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$, то

$$\begin{vmatrix} a_{+\pm} & \tilde{b}_{\lambda\omega} \\ b_{+\pm} & \tilde{a}_{\lambda\omega} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{-\pm} & \tilde{b}_{\nu\mu} \\ b_{-\pm} & \tilde{a}_{\nu\mu} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{\pm+} & \tilde{b}_{\mu\nu} \\ b_{\pm+} & \tilde{a}_{\mu\nu} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{\pm-} & \tilde{b}_{\omega\lambda} \\ b_{\pm-} & \tilde{a}_{\omega\lambda} \end{vmatrix} \in GC(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \qquad (2)$$

и непрерывная деформация его коэффициентов a_{xy}, b_{xy} $(\mathrm{x},\ \mathrm{y} = \pm)$ в пространстве $C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ при соблюдении условия (2) не нарушит нетеровость оператора (1) и, разумеется, не изменит его индекс.

На основании последнего свойства в [7] доказано, что если оператор (1) нетеров, то после умножения на некоторые обратимые операторы его можно прогомотопировать в классе нетеровых операторов того же вида, что и сам (1), к более простым операторам вида

$$P_{\lambda\omega} + aP_{\lambda\mu} + bP_{\nu\omega} + cP_{\nu\mu} + WdP_{\lambda\omega}, \qquad (3)$$

$$P_{\nu\mu} + aP_{\nu\omega} + bP_{\lambda\mu} + cP_{\lambda\omega} + WdP_{\nu\mu}, \qquad (4)$$

где a, b, c, $d \in C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$.

Случай, когда существует непрерывный путь по расширенной комплексной плоскости из 1 в ∞, на котором нет значений функции $d\tilde{d}$, допускает [7] дальнейшую гомотопию операторов (3) и (4) к характеристическим бисингулярным операторам без сдвига. Ниже мы рассмотрим в некотором смысле симметричный случай.

Результаты работы. Предварительно отметим, что если $\varphi \in GC(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$, то $\mathrm{ind}_{\mathrm{m}}\tilde{\varphi} = \kappa_{\mathrm{m}1}\mathrm{ind}_1\varphi + \kappa_{\mathrm{m}2}\mathrm{ind}_2\varphi$ $(\mathrm{m} = 1,\ 2)$. Если при этом функция φ инвариантна относительно сдвига α, т.е. $\tilde{\varphi} = \varphi$, и один ее частичный индекс равен 0, то равен 0 и другой (напоминаем, что $\kappa_{\mathrm{mn}} \neq 0$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор (3) (или (4)) нетеров в $L_{\mathrm{p}}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ и выполнены условия:

«*Существует непрерывный путь по комплексной плоскости из* 1 *в* 0, (5)

на котором нет значений функции $d\tilde{d}$»,

«*Хотя бы один частичный индекс функции* $d\tilde{d}$ *равен* 0». (6)

Тогда этот оператор гомотопен в классе нетеровых операторов того же вида характеристическому бисингулярному оператору без сдвига

$$P_{\lambda\omega} + aP_{\lambda\mu} + bP_{\nu\omega} + cP_{\nu\mu} \qquad (7)$$

(соответственно

$$P_{\nu\mu} + aP_{\nu\omega} + bP_{\lambda\mu} + cP_{\lambda\omega}) \qquad (8)$$

и его индекс вычисляется по формуле

$$\gamma_{11}\gamma_{21}\mathrm{ind}_1 c\cdot\mathrm{ind}_2 c\,. \qquad (9)$$

Доказательство. Операторы (3) и (4) являются частными случаями оператора (1), и при любых возможных значениях λ, ν, ω, μ условие (2) для операторов (3) и (4) состоит в том, что a, b, c, $1-d\tilde{d}\in GC(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Поэтому если мы сможем построить гомотопию d_ξ ($0\le\xi\le 3$) в пространстве $C(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ от функции $d_0=d$ к функции $d_3=0$, соблюдая условие $1-d_\xi\tilde{d}_\xi\in GC(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, то мы и получим искомые гомотопии операторов (3) и (4) к операторам без сдвига.

Из условия (5) следует, что $d\tilde{d}\in GC(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, а так как функция $d\tilde{d}$ инвариантна относительно сдвига α, то из условия (6) следует, что на самом деле оба ее частичных индекса равны 0. Тогда $d\tilde{d}=\exp(2u)$, где $u\in C(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Из очевидного равенства $\exp(2\tilde{u})=\exp(2u)$ и непрерывности u, $\tilde{u}$ получаем $\tilde{u}-u=\pi in$, где n – целая постоянная, $i^2=-1$. Переходя к функциям со сдвигом α, получим $u-\tilde{u}=\pi in$, откуда $n=0$ и $\tilde{u}=u$. Обозначим буквой r половину наименьшего значения $\left|\exp(2\delta u(t_1,t_2))\right|$ при $t_1\in\Gamma_1$, $t_2\in\Gamma_2$, $\delta\in[0;1]$. Отметим, что $r>0$. Тогда из (5) следует существование непрерывного пути из точки 1 в точку $-r$ по комплексной плоскости, на котором нет значений функции $d\tilde{d}=\exp(2u)$ и точки 0. Пусть $z=g(\xi)$ ($0\le\xi\le 1$) – непрерывная параметризация этого пути, $g(0)=1$, $g(1)=-r$. Для нее определена непрерывная ветвь комплексного квадратного корня $w(\xi)=\sqrt{g(\xi)}$: $(w(\xi))^2=g(\xi)$, $w(0)=1$. Очевидно, $w(\xi)\ne 0$. Обозначим

$$d_\xi=\frac{d}{w(\xi)} \text{ для } 0\le\xi\le 1$$

и отметим, что для любого фиксированного ξ

$$1-d_\xi\tilde{d}_\xi=1-\frac{d\tilde{d}}{g(\xi)}=\frac{g(\xi)-d\tilde{d}}{g(\xi)}\in GC(\Gamma_1\times\Gamma_2)\,,$$

$$d_0=d\,,\; d_1\tilde{d}_1=-\frac{d\tilde{d}}{r}=-\frac{\exp(2u)}{r}.$$

Продолжим дальше: $\quad d_\xi=\exp((1-\xi)u)\cdot d_1$ для $1<\xi\le 2$.

Поскольку $\tilde{u}=u$, то на этом участке гомотопии

$$1-d_\xi\tilde{d}_\xi=1-\exp(2(1-\xi)u)\cdot d_1\tilde{d}_1=\frac{r+\exp(2(2-\xi)u)}{r}\in GC(\Gamma_1\times\Gamma_2)\,;$$

при этом $d_2\tilde{d}_2=-\dfrac{1}{r}$ (т.е. функцию $d\tilde{d}$ стянули в точку). Наконец, определим

$$d_\xi=(3-\xi)d_2 \text{ для } 2<\xi\le 3\,.$$

И в этом случае также

$$1-d_\xi\tilde{d}_\xi = 1-(3-\xi)^2 d_2\tilde{d}_2 = 1+\frac{(3-\xi)^2}{r} \in GC(\Gamma_1\times\Gamma_2),$$

причем $d_3 = 0$. Итак, нужная гомотопия d_ξ ($0\le\xi\le 3$) построена.

Остается вычислить индекс операторов (7) и (8) по хорошо известной формуле индекса характеристического бисингулярного оператора без сдвига [5, теорема 5]. Если при этом учесть условия нетеровости [5, теорема 2], то получим формулу (9). Теорема доказана.

Рассмотрим один случай, сводящийся к теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор (3) (или (4)) нетеров в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ и выполнены условия:

«*Функция d антиинвариантна относительно сдвига α (т.е. $\tilde{d} = -d$)*», (10)

«*Хотя бы один частичный индекс функции $1+d^2$ равен 0*». (11)

Тогда этот оператор гомотопен в классе нетеровых операторов того же вида характеристическому бисингулярному оператору без сдвига (7) (соответственно (8)) и его индекс вычисляется по формуле (9).

Доказательство. При наличии теоремы 1 нам достаточно построить гомотопию d_ξ ($0\le\xi\le 2$) в пространстве $C(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ от функции $d_0 = d$ к некоторой функции d_2, удовлетворяющей условиям (5) и (6), соблюдая при этом, как и в доказательстве теоремы 1, условие $1-d_\xi\tilde{d}_\xi \in GC(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Для функции d это условие необходимо следует из нетеровости оператора (3) или (4) и может быть записано как $1+d^2 \in GC(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Таким образом, существуют достаточно малые сегменты $[\pm i;\pm i\mathrm{R}]$ ($1<\mathrm{R}<\sqrt{2}$) мнимой оси, на которых нет значений функции d. Подберем число $\mathrm{h}\,(>0)$ по соотношению $\mathrm{R}^{1+\mathrm{h}} = \sqrt{2}$ и введем семейство функций φ_ξ ($0\le\xi\le 1$): $\varphi_\xi(r) = 1$ при $0\le r\le 1$ и $\varphi_\xi(r) = r^{\mathrm{h}\xi}$ при $r>1$. Построим гомотопию

$$d_\xi = d\cdot\varphi_\xi(|d|)\ (0\le\xi\le 1).$$

Заметим, что $\tilde{d}_\xi = -d_\xi$ и $1-d_\xi\tilde{d}_\xi = 1+d_\xi^2 \in GC(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Кроме того, $d_0 = d$ и значения функции d_1 не могут принадлежать сегментам $[\pm i;\pm i\sqrt{2}]$ мнимой оси, а значения d_1^2 – сегменту $[-2;-1]$ вещественной оси. Продолжим гомотопию:

$$d_\xi = (\xi-1)i + d_1\ (1<\xi\le 2).$$

Здесь $1-d_\xi\tilde{d}_\xi = 1-((\xi-1)i+d_1)((\xi-1)i-d_1) = 1+(\xi-1)^2+d_1^2 \in GC(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ и значения функции $d_2\tilde{d}_2 = -1-d_1^2$ не попадают на сегмент $[0;1]$ (таким образом, для d_2 выполнено условие (5)). Более того, функцию $d_2\tilde{d}_2$ можно соединить в классе $GC(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ с функцией $1-d_2\tilde{d}_2$ гомотопией $(d_2\tilde{d}_2-\eta)\exp(i\pi\eta)$ ($0\le\eta\le 1$). Поэтому частичные индексы функций $d_2\tilde{d}_2$ и $1-d_0\tilde{d}_0 = 1+d^2$ одинаковы. Таким образом, функция d_2 удовлетворяет условию (6). Теорема доказана.

Отметим, что в работе [7] при переходе от оператора (1) к оператору (3) были получены $c=\dfrac{a_{\nu\mu}\tilde{a}_{\nu\mu}-b_{\nu\mu}\tilde{b}_{\nu\mu}}{a_{\lambda\omega}\tilde{a}_{\nu\mu}-b_{\lambda\omega}\tilde{b}_{\nu\mu}}$, $d=\dfrac{a_{\nu\mu}b_{\lambda\omega}-b_{\nu\mu}a_{\lambda\omega}}{a_{\nu\mu}\tilde{a}_{\lambda\omega}-b_{\nu\mu}\tilde{b}_{\lambda\omega}}$, а при переходе к (4) получены $c=\dfrac{a_{\lambda\omega}\tilde{a}_{\lambda\omega}-b_{\lambda\omega}\tilde{b}_{\lambda\omega}}{a_{\nu\mu}\tilde{a}_{\lambda\omega}-b_{\nu\mu}\tilde{b}_{\lambda\omega}}$, $d=\dfrac{a_{\lambda\omega}b_{\nu\mu}-b_{\lambda\omega}a_{\nu\mu}}{a_{\lambda\omega}\tilde{a}_{\nu\mu}-b_{\lambda\omega}\tilde{b}_{\nu\mu}}$. При этом функция $d\tilde{d}$ будет одна и та же. Тогда из теорем 1, 2 следует очевидное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть оператор (1) нетеров в $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Если функция $d=\dfrac{a_{\nu\mu}b_{\lambda\omega}-b_{\nu\mu}a_{\lambda\omega}}{a_{\nu\mu}\tilde{a}_{\lambda\omega}-b_{\nu\mu}\tilde{b}_{\lambda\omega}}$ удовлетворяет условиям (5), (6) либо условиям (10), (11), то в обоих случаях индекс оператора (1) можно вычислить как по формуле

$$\gamma_{11}\gamma_{21}\mathrm{ind}_1\frac{a_{\nu\mu}\tilde{a}_{\nu\mu}-b_{\nu\mu}\tilde{b}_{\nu\mu}}{a_{\lambda\omega}\tilde{a}_{\nu\mu}-b_{\lambda\omega}\tilde{b}_{\nu\mu}}\cdot\mathrm{ind}_2\frac{a_{\nu\mu}\tilde{a}_{\nu\mu}-b_{\nu\mu}\tilde{b}_{\nu\mu}}{a_{\lambda\omega}\tilde{a}_{\nu\mu}-b_{\lambda\omega}\tilde{b}_{\nu\mu}},$$

так и по формуле

$$\gamma_{11}\gamma_{21}\mathrm{ind}_1\frac{a_{\lambda\omega}\tilde{a}_{\lambda\omega}-b_{\lambda\omega}\tilde{b}_{\lambda\omega}}{a_{\nu\mu}\tilde{a}_{\lambda\omega}-b_{\nu\mu}\tilde{b}_{\lambda\omega}}\cdot\mathrm{ind}_2\frac{a_{\lambda\omega}\tilde{a}_{\lambda\omega}-b_{\lambda\omega}\tilde{b}_{\lambda\omega}}{a_{\nu\mu}\tilde{a}_{\lambda\omega}-b_{\nu\mu}\tilde{b}_{\lambda\omega}}.$$

Выводы. Получены новые результаты, симметрично дополняющие результаты [7] до некоторой общей картины, а также их следствия с простыми условиями.

Библиографический список

1. Сазонов Л.И. Бисингулярное уравнение со сдвигом в пространстве L_p / Л.И. Сазонов // Матем. заметки. – 1973. – Т. 13. – № 3. – С. 385–393.

2. Пилиди В.С. Об одной алгебре бисингулярных операторов со сдвигом / В.С. Пилиди, Е.Н. Стефаниди // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 9. – С. 80–81.

3. Ефимов С.В. Бисингулярные операторы с нераспадающимся инволютивным сдвигом / С.В. Ефимов // Изв. вузов. – 1992. – №2. – С. 29–36.

4. Ефимов С.В. Об эффективно проверяемых условиях нетеровости некоторых бисингулярных интегральных операторов со сдвигом / С.В. Ефимов // Интегро-дифф. операторы и их прил.: межвуз. сб. науч. тр. / ДГТУ. – Ростов н/Д. – 1997. – Вып. 2. – С. 75–78.

5. Пилиди В.С. К вопросу об индексе бисингулярных интегральных операторов / В.С. Пилиди // Мат. анализ и его прил. – Ростов н/Д. – 1975. – Т.7. – С. 123–136.

6. Ефимов С.В. Вычисление индекса некоторых бисингулярных операторов с нераспадающимся инволютивным сдвигом / С.В. Ефимов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. Прил. – 2004. – № 9. – С. 7–14.

7. Ефимов С.В. Об индексе бисингулярного оператора со сдвигом / С.В. Ефимов // Вестник ДГТУ. – 2004. – Т. 4, № 3 (21). – С. 290–295.

Материал поступил в редакцию 02.10.09.

S.V. EFIMOV

INDEX COMPUTATION OF SOME BISINGULAR OPERATORS WITH SHIFT BY HOMOTOPY METHOD

The work continues to research the insufficiently explored problem of bisingular operators with shift index. It considers new cases of index computation of the bisingular operators with indisintegrative involutive shift by the homotopy method.

ЕФИМОВ Сергей Викторович (р. 1960), доцент кафедры ОНП Сев.-Кавк. филиала МТУСИ, кандидат физико-математических наук (1989). Окончил механико-математический факультет Ростовского-на-Дону государственного университета (1982).
Научные интересы: комплексный функциональный анализ и теория линейных операторов в банаховых пространствах, вопросы нетеровости и индекса.
Автор 15 научных работ.

mtuci@mtuci-ncb.donpac.ru