# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

**М.Ф. МЕХТИЕВ, Н.К. АХМЕДОВ, П.М. САДЫКОВ**

## АНАЛИЗ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА

*Решена задача кручения радиально-слоистого цилиндра, состоящего из чередующихся жестких и мягких слоев. Соответствующие им элементарные решения могут проникать достаточно глубоко и существенно менять картину напряженно-деформированного состояния вдали от торцов. Это приводит фактически к нарушению принципа Сен-Венана в его классической формулировке.*
***Ключевые слова:*** *радиально-слоистый цилиндр, погранслой, спектр оператора.*

**Ведение.** Радиально-слоистые оболочки имеют широкое применение в различных областях машиностроения. Одним из важных обстоятельств расчета таких элементов является наличие приближенных инженерных теорий. Этим обусловлено большое количество работ, посвященных этой теме, и определяется актуальность настоящего исследования. Следует отметить два подхода при построении прикладных теорий. Первый связан с введением некоторых гипотез относительно напряженно-деформированного состояния цилиндра, второй основан на асимптотическом подходе, применяемом к трехмерным уравнениям теории упругости.

В настоящей работе в рамках второго подхода решается задача кручения радиально-слоистых цилиндров и показано, что в случае чередования жестких и мягких слоев существуют слабо затухающие погранслойные решения. Соответствующие им элементарные решения могут проникать достаточно глубоко и существенно менять картину напряженно-деформированного состояния вдали от торцов. Это приводит фактически к нарушению принципа Сен-Венана в его классической формулировке.

**Решение задачи.** 1. Рассмотрим задачу кручения кругового радиально-слоистого цилиндра, состоящего из чередующихся жестких и мягких слоев числом $n=2r-1$. Будем считать, что внутренний и внешний слои - жесткие. Каждый жесткий слой снабдим нечетным номером $j=1,3,...,n$, а мягкий–четным $i=2,4,...,n-1$ (порядок нумерации от центра цилиндра). Для простоты предположим, что упругие свойства всех жестких и всех мягких слоев одинаковы. Модули сдвига $G_j=G_{ж}$, $G_i=G_{м}$. Внутренний и внешний радиусы $k$-го слоя обозначим $r_{0k}$ и $r_{1k}$ соответственно. Пусть цилиндр занимает объем $\Gamma=\{r\in[r_{01};r_{1n}],\ \varphi\in[0,2\pi],\ z\in[-L;L]\}$. За относительную характеристику жесткости примем малый параметр

$$p=\frac{G_{м}}{G_{ж}}.$$

Уравнение равновесия $k$-го слоя в перемещениях имеет вид [1]:

$$\Delta u_{\varphi}^{(k)}-\frac{1}{\rho^2}u_{\varphi}^{(k)}=0, \qquad (1)$$

где $u_{\varphi}^{(k)}=u_{\varphi}^{(k)}(\rho,\xi)$ – компонента вектора смещений $k$-го слоя; $\rho=\frac{r}{r_{1n}}$, $\xi=\frac{z}{r_{1n}}$– новые безразмерные координаты; $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$.

Соединение слоев будем считать жестким, что означает выполнение следующих условий сопряжения:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\rho\varphi}^{(s)}(\rho_{1s},\xi)=\sigma_{\rho\varphi}^{(s+1)}(\rho_{0s+1},\xi);\\ &u_{\varphi}^{(s)}(\rho_{1s},\xi)=u_{\varphi}^{(s+1)}(\rho_{0s+1},\xi), \end{aligned} \tag{2}$$

где $s=\overline{1;n-1}$; $\sigma_{\rho\varphi}^{(k)}$–компонента тензора напряжений $k$-го слоя.

Предположим, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений:

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(1)}(\rho_{01},\xi)=0,\sigma_{\rho\varphi}^{(n)}(1,\xi)=0\,. \tag{3}$$

Считаем, что на торцах заданы произвольные граничные условия, оставляющие цилиндр в равновесии.

Решение (1)-(3) ищем в виде:

$$u_{\varphi}^{(k)}(\rho,\xi)=\upsilon_k(\rho)e^{\gamma\xi}\,. \tag{4}$$

В результате имеем спектральные задачи:

$$\begin{cases} \upsilon_k''(\rho)+\dfrac{1}{\rho}\upsilon_k'(\rho)+\left(\gamma^2-\dfrac{1}{\rho^2}\right)\upsilon_k(\rho)=0; & (5)\\ G_1\left(\upsilon_1'(\rho)-\dfrac{1}{\rho}\upsilon_1(\rho)\right)\Bigg|_{\rho_{01}}=G_n\left(\upsilon_n'(\rho)-\dfrac{1}{\rho}\upsilon_n(\rho)\right)\Bigg|_{1}=0; & (6)\\ \upsilon_s(\rho)\big|_{\rho_{1s}}=\upsilon_{s+1}(\rho)\big|_{\rho_{0s+1}} & (7)\\ G_s\left(\upsilon_s'(\rho)-\dfrac{1}{\rho}\upsilon_s(\rho)\right)\Bigg|_{\rho_{1s}}=G_{s+1}\left(\upsilon_{s+1}'(\rho)-\dfrac{1}{\rho}\upsilon_{s+1}(\rho)\right)\Bigg|_{\rho_{0s+1}}. & (8) \end{cases}$$

Здесь $k=\overline{1,n}$; $s=\overline{1,n-1}$.

2. Изучим спектральную задачу (5)-(8) при $p\to 0$. Будем различать два случая [2-5]:

а) условие $p\to 0$ эквивалентно $G_м\to 0,\ G_ж$ – фиксированно;

б) условие $p\to 0$ эквивалентно $G_ж\to\infty,\ G_м$ – фиксированно.

Выделим слой с номером $k$ и рассмотрим для него следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \upsilon_k''(\rho)+\dfrac{1}{\rho}\upsilon_k'(\rho)+\left(\gamma^2-\dfrac{1}{\rho^2}\right)\upsilon_k(\rho)=0;\\ \upsilon_k(\rho)\big|_{\rho_{0k}}=f_k^-\,,\quad \upsilon_k(\rho)\big|_{\rho_{1k}}=f_k^+. \end{cases} \tag{9}$$

Решение задачи (9) имеет вид:

$$\upsilon_k(\rho)=\frac{1}{L_{11}^{(k)}(\gamma)}\left[-f_k^-L_{11}(\gamma\rho_{1k},\gamma\rho)+f_k^+L_{11}(\gamma\rho_{0k},\gamma\rho)\right]. \tag{10}$$

Здесь $L_{t\theta}(\gamma\rho_{qk},\gamma\rho)=J_t(\gamma\rho_{qk})Y_\theta(\gamma\rho)-Y_t(\gamma\rho_{qk})J_\theta(\gamma\rho)$; $L_{t\theta}^{(k)}(\gamma)=J_t(\gamma\rho_{0k})Y_\theta(\gamma\rho_{1k})-J_\theta(\gamma\rho_{1k})Y_t(\gamma\rho_{0k})$; $t=0;1,\ q=0;1,\ \theta=0;1$; $J_t,Y_t$-функции Бесселя первого и второго родов соответственно.

Возвращаясь к исходной задаче (5)-(8) и удовлетворяя с помощью (10) граничные условия (6) и условия сопряжения (7), (8), получаем однородную алгебраическую систему следующего вида:

$$A(\gamma,p)\bar f=A_0(\gamma)\bar f+pA_1(\gamma)\bar f=\bar 0\,. \tag{11}$$

Здесь, учитывая $f_k^+=f_{k+1}^-$, введен $2r$-мерный вектор вида:

$$\bar f=\left(f_1^-,f_1^+,f_3^-,f_3^+,\ldots,f_n^-,f_n^+\right)^T.$$

$A_0(\gamma)$, $A_1(\gamma)$-блочные матрицы вида:

$$A_0 = \begin{Vmatrix} A_0^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_0^{(3)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_0^{(n)} \end{Vmatrix};$$

$$A_1 = \begin{Vmatrix} A_{12} & A_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{32} & A_{14}+A_{42} & A_{24} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{3,n-3} & A_{1,n-1}+A_{4,n-3} & A_{2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{3,n-1} & A_{4,n-1} \end{Vmatrix};$$

$$A_0^{(j)} = \frac{A^{(j)}}{L_{11}^{(j)}(\gamma)}; \quad A_{1i} = \frac{A_1^{(i)}}{L_{11}^{(i)}(\gamma)}; \quad A_{2i} = \frac{A_2^{(i)}}{L_{11}^{(i)}(\gamma)}; \quad A_{3i} = \frac{A_3^{(i)}}{L_{11}^{(i)}(\gamma)}; \quad A_{4i} = \frac{A_4^{(i)}}{L_{11}^{(i)}(\gamma)};$$

$$A^{(j)} = \begin{Vmatrix} a_{11}^{(j)}(\gamma) & a_{12}^{(j)}(\gamma) \\ a_{21}^{(j)}(\gamma) & a_{22}^{(j)}(\gamma) \end{Vmatrix}; \quad A_1^{(i)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_{11}^{(i)}(\gamma) \end{Vmatrix}; \quad A_2^{(i)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -a_{12}^{(i)}(\gamma) & 0 \end{Vmatrix}; \quad A_3^{(i)} = \begin{Vmatrix} 0 & -a_{21}^{(i)}(\gamma) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$A_4^{(i)} = \begin{Vmatrix} -a_{22}^{(i)}(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \qquad a_{12}^{(k)}(\gamma) = \frac{2}{\pi}; \quad a_{11}^{(k)}(\gamma) = -\left[2L_{11}^{(k)}(\gamma) - \gamma\rho_{0k}L_{01}^{(k)}(\gamma)\right];$$

$$a_{21}^{(k)}(\gamma) = -\frac{2}{\pi}; \quad a_{22}^{(k)}(\gamma) = -\left[2L_{11}^{(k)}(\gamma) - \gamma\rho_{1k}L_{10}^{(k)}(\gamma)\right]; \quad (j = 1,3,\dots,n; \; i = 2,4,\dots,n-1).$$

Изучим структуру спектра матрицы $A(\gamma, p)$ при малых $p$. Для этого исследуем спектр предельной матрицы $A(\gamma,0) = A_0(\gamma)$. Спектр $A_0(\gamma)$ является объединением спектров матричных блоков, ее составляющих. Иными словами, $\Lambda_{ж}(0) = \bigcup_{j=1,3,\dots}^{n} \Lambda_j(0)$. Здесь $\Lambda_{ж}(0)$- спектр оператора $A_0(\gamma)$, а $\Lambda_j(0)$– спектры, соответственно, операторов $A^{(j)}(\gamma)$, представляющих собой двумерные матрицы.

Исследуемый предельный случай $A_0(\gamma)\bar{f} = 0$ ( $A^{(j)}\bar{f}_j = \bar{0}, \quad \bar{f}_j = \left(f_j^-, f_j^+\right)^T$ ) соответствует условию отсутствия напряжений на боковых поверхностях жестких слоев, т.е. соответствует случаю а), что эквивалентно рассмотрению $r$ отдельных несвязанных между собой жестких слоев со свободными боковыми поверхностями.

Приравнивая определители $A^{(j)}(\gamma)$ нулю, получаем:

$$\Delta_j(\gamma) = \gamma^2\left[L_{00}^{(j)}(\gamma) - \frac{2}{\gamma\rho_{1j}}L_{01}^{(j)}(\gamma) - \frac{2}{\gamma\rho_{0j}}L_{10}^{(j)}(\gamma) + \frac{4}{\gamma^2\rho_{0j}\rho_{1j}}L_{11}^{(j)}(\gamma)\right] = 0.$$

Отсюда следует, что каждая ветвь $\Lambda_j(0)$ состоит из простого собственного значения $\lambda_0 = \gamma_0^2 = 0$ и счетного множества собственных значений, которые являются корнями уравнения:

$$L_{00}^{(j)}(\gamma) - \frac{2}{\gamma\rho_{1j}}L_{01}^{(j)}(\gamma) - \frac{2}{\gamma\rho_{0j}}L_{10}^{(j)}(\gamma) + \frac{4}{\gamma^2\rho_{0j}\rho_{1j}}L_{11}^{(j)}(\gamma) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, спектр $A_0(\gamma)$ состоит из $r$ точек $\lambda_0 = 0$ и $r$ ветвей счетного множества собственных значений, которые являются корнями характеристического уравнения (12).

Видно, что предельный переход при $p \to 0$ невозможен, если $\gamma$ является корнем одного из уравнений:

$$L_{11}^{(i)}(\gamma) = 0 .$$

Это указывает на возможность существования дополнительных ветвей у предельного спектра.

Для определения возможности существования дополнительных ветвей у предельного спектра, в случае б), рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \upsilon_k''(\rho) + \dfrac{1}{\rho}\upsilon_k'(\rho) + \left(\gamma^2 - \dfrac{1}{\rho^2}\right)\upsilon_k(\rho) = 0; \\ G_k\left(\upsilon_k'(\rho) - \dfrac{1}{\rho}\upsilon_k(\rho)\right)\Bigg|_{\rho_{0k}} = \tau_k^-; \\ G_k\left(\upsilon_k'(\rho) - \dfrac{1}{\rho}\upsilon_k(\rho)\right)\Bigg|_{\rho_{1k}} = \tau_k^+. \end{cases} \tag{13}$$

Решение задачи (13) имеет вид:

$$\begin{aligned} \upsilon_k(\rho) = \frac{2}{G_k \Delta_k(\gamma)} \Bigg\{ -\tau_k^- \left[ \gamma L_{01}(\gamma\rho_{1k}, \gamma\rho) - \frac{2}{\rho_{1k}} L_{11}(\gamma\rho_{1k}, \gamma\rho) \right] + \\ + \tau_k^+ \left[ \gamma L_{01}(\gamma\rho_{0k}, \gamma\rho) - \frac{2}{\rho_{0k}} L_{11}(\gamma\rho_{0k}, \gamma\rho) \right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Удовлетворяя с помощью (14) условия (6)–(8), получаем однородную алгебраическую систему вида:

$$B(\gamma, p)\bar{\tau} = B_0(\gamma)\bar{\tau} + pB_1(\gamma)\bar{\tau} = \bar{0} . \tag{15}$$

Здесь с учетом $\tau_1^- = \tau_n^+ = 0$ и $\tau_k^+ = \tau_{k+1}^-$ введен в рассмотрение вектор

$$\bar{\tau} = \left(\tau_2^-, \tau_2^+, \tau_4^-, \tau_4^+, \ldots, \tau_{n-1}^-, \tau_{n-1}^+\right)^T,$$

где $B_0(\gamma)$ и $B_1(\gamma)$ - блочные матрицы вида:

$$B_0 = \begin{Vmatrix} B_0^{(2)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_0^{(4)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & B_0^{(n-1)} \end{Vmatrix};$$

$$B_1 = \begin{Vmatrix} B_{11} + B_{43} & B_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B_{33} & B_{13} + B_{45} & B_{25} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & B_{3,n-2} & B_{1,n-2} + B_{4,n} \end{Vmatrix};$$

$$B_0^{(i)} = \frac{B_i}{\Delta_i(\gamma)}; B_{1j} = \frac{B_1^{(j)}}{\Delta_j(\gamma)}; B_{2j} = \frac{B_2^{(j)}}{\Delta_j(\gamma)}; B_{3j} = \frac{B_3^{(j)}}{\Delta_j(\gamma)}; B_{4j} = \frac{B_4^{(j)}}{\Delta_j(\gamma)};$$

$$B_i = \begin{Vmatrix} b_{11}^{(i)}(\gamma) & b_{12}^{(i)}(\gamma) \\ b_{21}^{(i)}(\gamma) & b_{22}^{(i)}(\gamma) \end{Vmatrix}; B_1^{(j)} = \begin{Vmatrix} -b_{22}^{(j)}(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; B_2^{(j)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -b_{12}^{(j)}(\gamma) & 0 \end{Vmatrix};$$

$$B_3^{(j)} = \begin{Vmatrix} 0 & -b_{21}^{(j)}(\gamma) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; B_4^{(j)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b_{11}^{(j)}(\gamma) \end{Vmatrix}; b_{11}^{(k)}(\gamma) = \frac{2}{\rho_{1k}} L_{11}^{(k)}(\gamma) - \gamma L_{10}^{(k)}(\gamma);$$

$$b_{12}^{(k)}(\gamma)=\frac{2}{\pi\rho_{0k}};b_{21}^{(k)}(\gamma)=-\frac{2}{\pi\rho_{1k}};\; b_{22}^{(k)}(\gamma)=\frac{2}{\rho_{0k}}L_{11}^{(k)}(\gamma)-\gamma L_{01}^{(k)}(\gamma).$$

Обозначим спектр предельного оператора $B(\gamma,0)=B_0(\gamma)$ через $\Lambda_м(0)$, где $\Lambda_м(0)=\bigcup\limits_{i=2,4,...}^{n-1}\Lambda_i(0)$. Каждая ветвь $\Lambda_i(0)$ соответствует условию отсутствия перемещений на боковых поверхностях мягких слоев и определяется корнями уравнения:

$$L_{11}^{(i)}(\gamma)=0\,. \tag{16}$$

Применяя теорию возмущений линейных операторов [6] к алгебраической системе (11), (15), сформулируем следующую теорему.

**Теорема.** Спектр $\Lambda(p)$ задачи (5)-(8) при $p\to 0$ является счетным вещественным множеством и представляется в виде:

$$\Lambda(p)=\Lambda_0(p)\cup\Lambda_н(p)\cup\Lambda_в^{(1)}(p)\cup\Lambda_в^{(2)}(p)$$

где $\Lambda_0(p)$ состоит из двукратного собственного значения $\gamma_0=0$; $\Lambda_н(p)$ состоит из $2(r-1)$ собственных значений вида:

$$\gamma_t=p^{\frac{1}{2}}\eta_{0t}+O\left(p^{3/2}\right), \tag{17}$$

где $\eta_{0t}^2$ является ненулевым собственным значением якобиевой алгебраической системы

$$C\overline{X}-\eta_{0t}^2 D\overline{X}=\overline{0}\,,$$

где

$$D=diag\left\|d_{jj}\right\|,\ \overline{X}=\left(X_1,X_3,...,X_n\right)^T;$$

$$C=\left\|\begin{matrix} c_{11} & -c_{11} & 0 & ... & 0 & 0\\ -c_{11} & (c_{11}+c_{33}) & -c_{33} & ... & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & ... & -c_{n-2,n-2} & c_{n-2,n-2}\end{matrix}\right\|;$$

$$d_{jj}=\frac{\rho_{1j}^4-\rho_{0j}^4}{4},\ c_{jj}=\frac{2\rho_{1j}^2\rho_{0j+2}^2}{\rho_{0j+2}^2-\rho_{1j}^2};$$

$\Lambda_в^{(1)}(p)$ состоит из $r$ множеств собственных значений вида:

$$\gamma_{tj}=\gamma_{0tj}+O\left(p^{\delta}\right),$$

где $\gamma_{0tj}$ является корнем уравнения (12);

$\Lambda_в^{(2)}(p)$ состоит из $(r-1)$ множеств собственных значений вида:

$$\gamma_{ti}=\gamma_{0ti}+O\left(p^{\delta}\right),$$

где $\gamma_{0ti}$ – корень уравнения (16); $\delta=1$, если $\gamma_{0tj}\neq\gamma_{0tj+1}$, $\gamma_{0tj}\neq\gamma_{0tj-1}$, и $\delta=\frac{1}{2}$, если имеет место хотя бы одно из равенств:

$$\gamma_{0tj}=\gamma_{0tj+1};\qquad \gamma_{0tj}=\gamma_{0tj-1}.$$

Двукратному собственному значению $\gamma_0=0$ соответствует проникающее решение

$$u_{\varphi 0}^{(k)}=\rho\left(E_0+D_0\xi\right). \tag{18}$$

Допустим, что $\lambda_t(p) \in \Lambda_н(p)$. Тогда собственная функция $\upsilon_t(\rho)$ имеет вид:

$$\upsilon_t(\rho) = C_t(\upsilon_{0t}(\rho) + O(p)),$$

$$\begin{cases} \upsilon_{0tj} = \rho X_{tj} \\ \upsilon_{0ti} = \dfrac{1}{\rho_{1i}^2 - \rho_{0i}^2}\left[X_{t,i+1}\rho_{1i}^2\left(\rho - \dfrac{\rho_{0i}^2}{\rho}\right) - X_{t,i-1}\rho_{0i}^2\left(\rho - \dfrac{\rho_{1i}^2}{\rho}\right)\right]. \end{cases} \tag{19}$$

Рассмотрим некоторое собственное значение $\lambda_t(p) = \gamma_t \in \Lambda_в(p)$ и соответствующий ему собственный вектор $\upsilon_t(\rho)$ при малых $p$. Здесь могут быть различные варианты.

1. Допустим, $\lambda_t(0) = \gamma_{0t}$ является простым собственным значением предельной матрицы $A(\gamma,0) = A_0(\gamma)$ и $\lambda_t(0) \in \Lambda_j(0)$ ( $j = k$ - нечетное).

Тогда

$$\upsilon_{tk}(\rho) = \upsilon_{0tk}(\rho) + O(p);$$

$$\upsilon_{0ts}(\rho) = 0,\ s \neq k-1, k, k+1;$$

$$\upsilon_{0t,k-1} = X_{tk}\frac{L_{11}(\gamma_0\rho_{0k-1}, \gamma_0\rho)}{L_{11}^{(k-1)}(\gamma_0)};$$

$$\upsilon_{0tk} = \frac{X_{tk}}{L_{11}^{(k)}(\gamma_0)}\left[\frac{\pi}{2}\left(2L_{11}^{(k)}(\gamma_0) - \gamma_0\rho_{0k}L_{01}^{(k)}(\gamma_0)\right)L_{11}(\gamma_0\rho_{0k}, \gamma_0\rho) - L_{11}(\gamma_0\rho_{1k}, \gamma_0\rho)\right];$$

$$\upsilon_{0t,k+1} = -\frac{\pi X_{tk}}{2L_{11}^{(k+1)}(\gamma_0)}L_{11}(\gamma_0\rho_{1k+1}, \gamma_0\rho)\left(2L_{11}^{(k)}(\gamma_0) - \gamma_0\rho_{0k}L_{01}^{(k)}(\gamma_0)\right).$$

В рассматриваемом случае главная часть собственной функции сосредоточена в пакете из трех слоев с номерами $k-1, k, k+1$, т.е. в этом случае собственная функция локализуется в соответствующем жестком слое и окружающих его двух мягких.

2. Допустим, $\gamma_{0l} \in \Lambda_l(0)$ ( $l$ - четное)

Тогда

$$\upsilon_{tk}(\rho) = \upsilon_{0tk}(\rho) + O(p);$$

$$\upsilon_{0ts}(\rho) = 0,\ s \neq l-1, l, l+1;$$

$$\upsilon_{0t,l-1} = \frac{2p^{\frac{1}{2}}y_{et}}{\Delta_{l-1}(\gamma_0)}\left[\gamma_0 L_{01}(\gamma_0\rho_{0l-1}, \gamma_0\rho) - \frac{2}{\rho_{0l-1}}L_{11}(\gamma_0\rho_{0l-1}, \gamma_0\rho)\right],$$

$$\upsilon_{0tl} = -\frac{2p^{-\frac{1}{2}}y_{et}}{\Delta_l(\gamma_0)}\left[\gamma_0 L_{01}(\gamma_0\rho_{1l}, \gamma_0\rho) - \frac{2}{\rho_{1l}}L_{11}(\gamma_0\rho_{1l}, \gamma_0\rho) + \frac{\pi}{2\rho_{1l}}(\gamma_0\rho_{0l}L_{01}(\gamma_0\rho_{0l}, \gamma_0\rho) - \right.$$
$$\left. - 2L_{11}(\gamma_0\rho_{0l}, \gamma_0\rho)\left(2L_{11}^{(l)}(\gamma_0) - \gamma_0\rho_{1l}L_{10}^{(l)}(\gamma_0)\right))\right];$$

$$\upsilon_{0t,l+1} = \frac{p^{\frac{1}{2}}y_{et}\pi\rho_{0l}}{\Delta_l(\gamma_0)\rho_{1l}}\left(2L_{11}^{(l)}(\gamma_0) - \gamma_0\rho_{1l}L_{10}^{(l)}(\gamma_0)\right)\left(\gamma_0 L_{01}(\gamma_0\rho_{1l+1}, \gamma_0\rho) - \frac{2}{\rho_{1l+1}}L_{11}(\gamma_0\rho_{1l+1}, \gamma_0\rho)\right).$$

В этом случае собственная функция локализуется в соответствующем мягком слое.

3. Допустим, $\gamma_0 \in \bigcap_{h=k,k+2}^{k+2q}\Lambda_h(0)$, ( $k$ - нечетное число).

Тогда

$$\upsilon_{tm}(\rho) = \upsilon_{0tm}(\rho) + O(p);$$
$$\upsilon_{0ts}(\rho) = 0,\ s \neq k-1,\ldots,k+2q+1;$$
$$\upsilon_{0t,k-1} = X_{tk}^{(l)} \frac{L_{11}(\gamma_0 \rho_{0k-1}, \gamma_0 \rho)}{L_{11}^{(k-1)}(\gamma_0)};$$
$$\upsilon_{0th} = \frac{X_{th}^{(l)}}{L_{11}^{(h)}(\gamma_0)} \left[ \frac{\pi}{2} \left( 2L_{11}^{(h)}(\gamma_0) - \gamma_0 \rho_{0h} L_{01}^{(h)}(\gamma_0) \right) L_{11}(\gamma_0 \rho_{0h}, \gamma_0 \rho) - L_{11}(\gamma_0 \rho_{1h}, \gamma_0 \rho) \right];$$
$$\upsilon_{0t,h+1} = X_{t,h+2}^{(l)} \frac{L_{11}(\gamma_0 \rho_{0,h+1}, \gamma_0 \rho)}{L_{11}^{(h+1)}(\gamma_0)} - \frac{\pi L_{11}(\gamma_0 \rho_{1,h+1}, \gamma_0 \rho)}{2L_{11}^{(h+1)}(\gamma_0)} \left( 2L_{11}^{(h)}(\gamma_0) - \gamma_0 \rho_{0h} L_{01}^{(h)}(\gamma_0) \right) X_{th}^{(l)};$$
$$\upsilon_{0t,k+2q+1} = -X_{t,k+2q}^{(l)} \frac{\pi L_{11}(\gamma_0 \rho_{1,k+2q+1}, \gamma_0 \rho)}{2L_{11}^{(k+2q+1)}(\gamma_0)} \left( 2L_{11}^{(k+2q)}(\gamma_0) - \gamma_0 \rho_{0,k+2q} L_{01}^{(k+2q)}(\gamma_0) \right).$$

**Выводы.** Напряженно-деформированное состояние, соответствующее собственным значениям (17), слабо затухает при удалении от торцов цилиндра и может давать существенную поправку к Сен-Венановскому решению, что приводит к нарушению принципа Сен-Венана в его классической формулировке (назовем совокупность этих решений слабым погранслоем). Напряженно-деформированное состояние, соответствующее верхней части спектра $\Lambda_в^{(1)}(p)$, $\Lambda_в^{(2)}(p)$, локализуется в окрестности торцов и соответствует классическому принципу Сен-Венана (назовем совокупность этих решений сильным погранслоем). Таким образом, в задаче кручения радиально-слоистых цилиндров с чередующимися жесткими и мягкими слоями существуют слабо затухающие погранслойные решения.

**Библиографический список**


1. Лурье А.И. Теория упругости. / А.И. Лурье. - М.: Наука, 1970. – 939 с.
2. Устинов Ю.А. О структуре погранслоя в слоистых плитах / Ю.А. Устинов //Докл. АН СССР. - 1976. - Т.229. - №2. - С.325-328.
3. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. / Ю.А. Устинов. – Ростов н/Д, 2006. – 257 с.
4. Ахмедов Н.К. Анализ пограничного слоя в осесимметричной задаче теории упругости для радиально-слоистого цилиндра и распространения осесимметричных волн / Н.К. Ахмедов // Прикладная математика и механика. - 1997. - Т.61. Вып.5. - С.863-872.
5. Ахмедов Н.К. Анализ структуры пограничного слоя в задаче кручения слоистой сферической оболочки / Н.К. Ахмедов, Ю.А. Устинов // Прикладная математика и механика. - 2009. - Т.73. Вып.3. - С.416-426 .
6. Данфорд Н. Линейные операторы. Т.1. Общая теория. / Н. Данфорд, Д.Т. Шварц. - М.: Изд-во иностр. лит-ра, 1962. – 895 с.


Материал поступил в редакцию 11.11.09.

**M.F. MEKHTIEV , N.K. AKHMEDOV , P.M. SADYKOV**

## THE BOUNDARY-LAYER SOLUTION ANALYSIS IN THE PROBLEM OF TORSION FOR THE RADIALLY-LAYERED CYLINDER

It is shown on the example of the torsion problem that in radially-layered cylinders with alternating rigid and soft layers there are poorly fading boundary-layer solutions. Elementary decisions corresponding to them can get deeply enough and change essentially a picture of the stress-strain condition far from end faces. It leads actually to infringement of Sen-Venan principle in its classical formulation.
**Key words:** radially-layered cylinder, boundary layer solution, operator's spectrum.

**МЕХТИЕВ Магомед Фарман оглы** (р. 1941), декан факультета «Прикладная математика и кибернетика», заведующий кафедрой «Математические методы прикладного анализа» Бакинского государственного университета, доктор физико-математических наук (1989), профессор 1991. Окончил Бакинский государственный университет (1966),
Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, асимптотическая теория оболочек, методы оптимизации.
Автор более 100 научных публикаций.

**АХМЕДОВ Натик Каракиши оглы** (р. 1961), доцент (1999) кафедры «Математические методы прикладного анализа» Бакинского государственного университета, доктор физико-математических наук (2009). Окончил Бакинский государственный университет (1983).
Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, асимптотическая теория оболочек.
Автор 34 научных публикации.

**САДЫКОВ Полад Мамед оглы** (р. 1954), декан факультета «Обучение иностранных студентов», доцент (2001) кафедры «Общетехнические дисциплины» Азербайджанского архитектурно-строительного университета, кандидат физико-математических наук (1995). Окончил Азербайджанский педагогический университет (1975),
Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, асимптотическая теория оболочек.
Автор 16 научных публикаций.

anatig@gmail.com