

Кручение упругого полупространства с многослойным покрытием периодической структуры*

А. С. Васильев, Е. В. Садырин

(Донской государственный технический университет),

М. Е. Васильева

(Ростовский государственный университет путей сообщения)

Рассмотрена осесимметричная задача теории упругости о кручении недеформируемым круглым штампом упругого полупространства с неоднородным по глубине покрытием периодической структуры. Покрытие представляет собой многослойный пакет с чередующимися мягкими и жёсткими слоями, при этом границы слоёв могут быть как чёткими (кусочно-постоянное изменение модуля сдвига), так и сглаженными (непрерывно-неоднородные покрытия). Построено приближённое аналитическое решение задачи высокой точности, эффективное для любых толщин покрытий. Изучено влияние числа слоёв и характера неоднородности покрытия на трансформанту ядра интегрального уравнения и на распределение контактных напряжений под штампом. Показано, что при определённых параметрах задачи достигается существенное различие между результатами для непрерывного и скачкообразного характера изменения модуля сдвига по глубине.

Ключевые слова: кручение, многослойные покрытия, слоистые композиты.

Введение. Многослойные покрытия активно используются для создания современных жаропрочных, абразиво- и эрозионностойких покрытий на поверхности элементов газовых и паровых турбин, деталей машин. Разработан ряд технологий, позволяющих создавать слоистые композиции из чередующихся слоёв различных материалов, в которых толщина слоя может составлять менее 100 нм при общем их количестве до нескольких тысяч [1]. Это газотермическое напыление (в частности, вакуумно-плазменное) и различные способы эпитаксиального нанесения (осаждения из газовой или водной среды). В качестве компонентов покрытия могут быть использованы различные металлы и сплавы, а в случае эпитаксии — полимерные материалы.

В работе [2] рассмотрены многослойные покрытия периодической структуры (чередующиеся слои из алюминия и палладия) со сглаженными границами между слоями. На основании экспериментальных результатов показана перспективность использования подобных покрытий для защиты от разрушения при механическом воздействии.

В настоящей работе анализируются механические характеристики контактного взаимодействия непрерывно-неоднородных и многослойных покрытий периодической структуры, возникающие при кручении упругого однородного полупространства с покрытием недеформируемым круглым штампом.

Задача о кручении однородного упругого полупространства круглым штампом впервые была сформулирована и решена в динамической постановке Рейснером и Сагочи [3]. Снеддон [4], с использованием техники интегральных преобразований, свёл данную задачу к решению интегрального уравнения.

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК № 11.519.11.3015, соглашение № 14.В37.21.1131) и РФФИ (гранты № 12-07-00639-а, 13-07-00954-а).

В. Д. Грилицкий [5] построил решение задачи о кручении круглым штампом изотропной двухслойной среды и ортотропного упругого слоя в виде степенного ряда от отношения толщины первого слоя к радиусу штампа.

В работе [6] построено решение задачи о кручении для упругого трансверсально-изотропного полупространства с неоднородным по глубине трансверсально-изотропным покрытием. Решение эффективно для всего набора физических и геометрических параметров задачи.

Постановка задачи и построение решения. Недеформируемый круглый штамп с плоским основанием жёстко сцеплен с верхней гранью Γ упругого неоднородного полупространства Ω , состоящего из неоднородного по глубине покрытия толщины H и однородного полупространства (подложки). С полупространством связана цилиндрическая система координат r, φ, z , ось z нормальна плоскости Γ и проходит через центр штампа, координата r отнесена к радиусу штампа a . Штамп контактирует с полупространством по поверхности $z=0, r \leq 1$. К штампу приложен крутящий момент M , ось которого совпадает с осью z . Под действием этого момента штамп повернётся относительно оси z на угол ε , вызвав деформацию кручения полупространства Ω . Модуль сдвига полупространства изменяется с глубиной по закону

$$G(z) = \begin{cases} G^s f(z), & -H \leq z \leq 0 \\ G^s, & -\infty \leq z < -H \end{cases}, \quad G^s = \text{const},$$

где $f(z)$ — непрерывно-дифференцируемая или кусочно-постоянная функция.

Учитывая, что слой подвержен лишь деформации скручивания, ненулевым является лишь смещение вдоль оси φ :

$$u_z = u_r = 0, \quad u_\varphi = u_\varphi(r, z).$$

Вне штампа плоскость Γ не нагружена. При сделанных предположениях граничные условия имеют вид:

$$z=0: \quad \sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad \begin{cases} \tau_{\varphi z} = 0, & r > 1, \\ u_\varphi = r\varepsilon, & r \leq 1. \end{cases}$$

При $r \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow -\infty$ напряжения исчезают.

Считаем, что перемещения и напряжения сопрягаются на границе между покрытием (верхний индекс (1)) и подложкой (верхний индекс (2)):

$$z=-H: \quad \tau_{\varphi z}^{(1)} = \tau_{\varphi z}^{(2)}, \quad u_\varphi^{(1)} = u_\varphi^{(2)}.$$

Требуется определить закон распределения контактных касательных напряжений под штампом

$$\tau_{\varphi z}|_{z=0} = \tau(r), \quad r \leq 1.$$

Используя технику интегральных преобразований, поставленную задачу можно свести к решению следующего интегрального уравнения:

$$\int_0^1 \tau(\rho) \rho \int_0^\infty L(u) J_1(ur\lambda^{-1}) J_1(u\rho\lambda^{-1}) du d\rho = \lambda G(0) r\varepsilon, \quad r \leq 1, \quad (1)$$

где $\lambda = H/a$ — безразмерный геометрический параметр задачи, характеризующий относительную толщину покрытия; $J_1(x)$ — функция Бесселя 1-го рода; $L(u)$ — трансформанта ядра интегрального уравнения, которая строится численно [6].

С использованием двухстороннего асимптотического метода решения парных интегральных уравнений [7] можно построить приближённое решение задачи в аналитическом виде [6]:

$$\tau(r) = \frac{4}{\pi} \varepsilon G(0) \left\{ L_N^{-1}(0) \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=1}^N C_i \left(\frac{\text{sh}(A_i \lambda^{-1})}{r \sqrt{1-r^2}} - \frac{A_i}{\lambda r} \int_r^1 \frac{\text{ch}(A_i \lambda^{-1} t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} t dt \right) \right\}. \quad (2)$$

где постоянные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^N C_i \lambda \frac{A_i \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1}) + B_k \operatorname{sh}(A_i \lambda^{-1})}{B_k^2 - A_i^2} + \frac{1 + B_k \lambda^{-1}}{L_N(0) B_k^2 \lambda^{-2}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

$L_N(u)$ — аппроксимация трансформанты ядра интегрального уравнения (1) выражением:

$$L_N(u) = \prod_{i=1}^N \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2}, \quad A_i, B_i \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Решение (2) является асимптотически точным при $\lambda \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \infty$ [7]. Точность решения для произвольного значения λ зависит от точности аппроксимации трансформанты ядра функцией (3). Алгоритм построения аппроксимаций высокой точности и связь между погрешностями решения и аппроксимации описаны в работе [8].

Далее будем полагать, что функцию $f(z)$, определяющую изменение модуля сдвига в покрытии, описывает один из следующих законов:

$$1) f_1(z) = \frac{f_0 + 1}{2} - \frac{f_0 - 1}{2} \cos(2\pi k z), \quad 2) f_2(z) = \frac{f_0 + 1}{2f_0} + \frac{f_0 - 1}{2f_0} \cos(2\pi k z),$$

$$3) f_3(z) = \begin{cases} f_0, & z \in Z_1 \\ 1, & z \in [-H, 0]/Z_1' \end{cases} \quad 4) f_4(z) = \begin{cases} 1/f_0, & z \in Z_1 \\ 1, & z \in [-H, 0]/Z_1' \end{cases}$$

$$Z_1 = \bigcup_{j=0}^{k-1} \left[-\frac{4j+1}{4k} H, -\frac{4j+3}{4k} H \right].$$

В покрытиях 1—4 мягкие «слои» чередуются с жёсткими (рис. 1). Упругие свойства в покрытиях 1 и 2 меняются непрерывно, в покрытиях 3 и 4 слои имеют чёткую границу. Параметр k соответствует количеству периодов отрезка синусоиды, описывающей покрытия 1 и 2. Покрытия 3 и 4 представляют собой пакет из $(2k+1)$ слоя. В покрытиях 1 и 3 (2 и 4) модуль сдвига больше (меньше) либо равен модулю сдвига подложки на всём интервале $z \in [-H, 0]$.

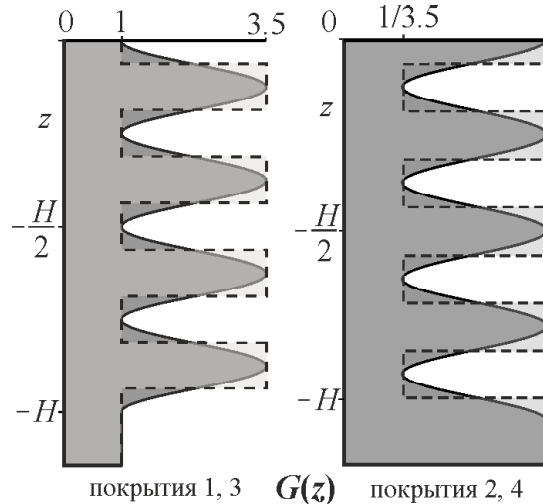


Рис. 1. Графики изменения модуля сдвига по глубине. Сплошные линии соответствуют покрытиям 1 и 2, пунктирные — покрытиям 3 и 4

Показатель неоднородности $f_0 = \text{const} > 1$ характеризует отношение модуля сдвига на поверхности Γ к модулю сдвига подложки. Ограничимся рассмотрением случая $f_0 = 7/2$, что соответствует, например, сочетанию мягкого (алюминий, серебро, медь, свинец и т. д.) и жёсткого (железо, сталь, палладий, молибден и т. д.) металлов.

Анализ трансформант ядер интегрального уравнения. На рис. 2 изображены трансформанты ядер для законов 1—4 при $k = 1, 10, 50$. Из графика видна динамика изменения трансформанты ядра при увеличении числа слоёв.

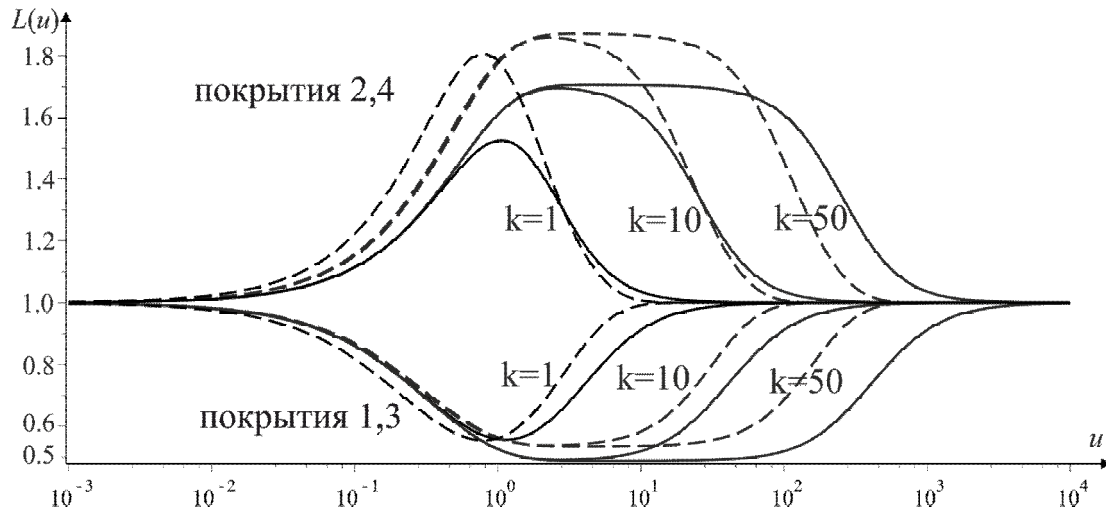


Рис. 2. Трансформанты ядер для законов 1—4 при $k = 1, 10, 50$. Сплошные линии соответствуют законам 1 и 2, пунктирные — законам 3 и 4

Отметим свойства, общие для слоистых и непрерывно-неоднородных (функционально-градиентных, ФГ) покрытий:

- 1) трансформанты ядер при всех значениях k имеют одну точку экстремума, обозначим её u_0 . Для законов 2 и 4 — это точка максимума, для законов 1 и 3 — минимума;
- 2) при увеличении числа слоёв (параметр k) точка экстремума u_0 сдвигается вправо по оси u ;
- 3) значение экстремума трансформанты ядра $L(u_0)$ удаляется от 1 (для законов 2 и 4 увеличивается, для законов 1 и 3 — уменьшается) при увеличении k . При этом значения экстремума при $k = 10$ и $k = 50$ близки, т. е. можно предположить, что они сходятся к некоторому пределу;
- 4) при увеличении k расширяется диапазон значений u , в которых значение трансформанты существенно отличается от 1.

Можно заметить ряд качественных отличий трансформант, соответствующих слоистым и ФГ покрытиям:

- 1) при $u < 0,5$ трансформанты для законов 1 и 2 практически не изменяются с увеличением параметра k , в то время как графики трансформант ядер для законов 3 и 4 сдвигаются вправо вдоль оси u , приближаясь к некоторому пределу;
- 2) экстремальные значения трансформант ($L(u_0)$) для слоистых покрытий, больше, чем для ФГ;
- 3) для слоистых покрытий $L(u)$ стремится к 1 при $u \rightarrow \infty$ быстрее, чем для ФГ.

Анализ контактных напряжений. Таблица 1 содержит величины погрешности аппроксимации трансформант ядер выражениями (3) для законов 1—4, где погрешность определяется формулой:

$$\Delta_L = \max |L_N(u)/L(u) - 1| \cdot 100 \, \%.$$

Таблица 1

Погрешность аппроксимации трансформант ядер для законов 1—4

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 4$	$k = 10$	$k = 50$
закон 1	0,32 %	0,26 %	0,5 %	0,19 %	1,1 %
закон 2	0,53 %	0,58 %	0,47 %	0,19 %	0,52 %
закон 3	0,16 %	0,20 %		0,34 %	
закон 4	0,18 %	0,33 %		0,43 %	

Из значений таблицы видно, что построены аппроксимации высокой точности для всех рассматриваемых законов и значений параметра k , следовательно, погрешность построенных решений мала.

Введём величину: $\tau_{rel}(\lambda, r) = \tau(\lambda, r) / \tau_{hom}(r)$, где $\tau(\lambda, r)$ — контактные напряжения под штампом для покрытий 1—4; $\tau_{hom}(r)$ — контактные напряжения, возникающие в однородном полупространстве с модулем сдвига, равным значению модуля сдвига на поверхности покрытий 1—4, то есть $G = G(0)$.

Величина $\tau_{rel}(\lambda, r)$ наглядно демонстрирует отличие контактных напряжений, возникающих на поверхности неоднородного и однородного полупространств, и, в отличие от $\tau(\lambda, r)$, не имеет особенности при $r = 1$. Из физического смысла поставленной задачи следует, что для покрытий 1—4 выполнено $\tau_{rel}(\lambda, r) \rightarrow 1$, при $\lambda \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \infty$.

На рис. 3 изображена зависимость величины $\tau_{rel}(\lambda, r)$ для покрытий 1, 2 при $k = 1, 2, 10$ и покрытий 3, 4 при $k = 10$ от параметра λ в точке $r = 0,5$. Численный эксперимент показал, что графики для любого фиксированного $r \in [0..0,99]$ качественно не отличаются от приведённых на рис. 3.

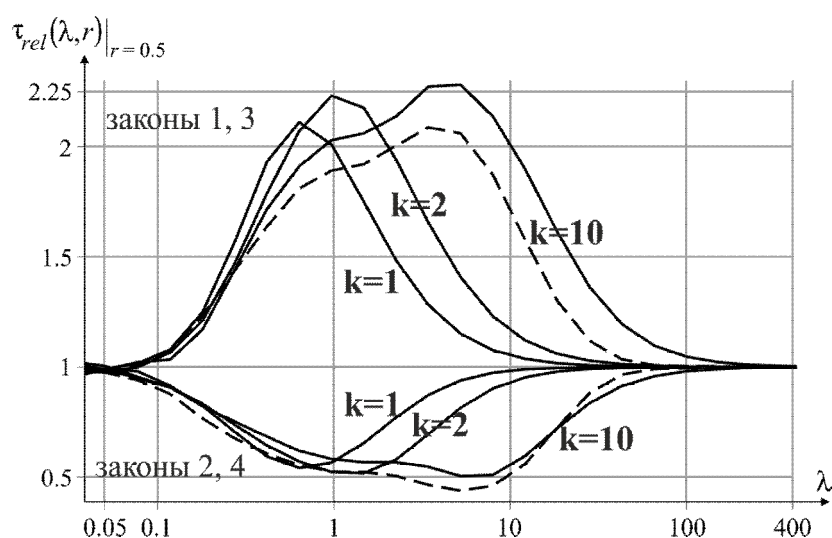


Рис. 3. Зависимость относительных контактных напряжений от параметра λ при $r = 0,5$

Отметим свойства контактных напряжений для покрытий 1—4, вытекающие из рис. 3:

- 1) величины $\tau_{rel}(\lambda, r)$ и $\tau(\lambda, r)$ при фиксированном r имеет одну точку экстремума (обозначим её λ_0);
- 2) при увеличении k точка экстремума λ_0 сдвигается вправо по оси λ . Это означает, что максимальное отличие контактных напряжений для неоднородных покрытий 1—4 и контактных напряжений, возникающих в однородном полупространстве, при увеличении k достигается для всё более толстых покрытий;
- 3) при увеличении k значение экстремума функции $\tau_{rel}(\lambda_0, r)$ удаляется от 1 (для закона 2 увеличивается, для закона 1 — уменьшается);
- 4) при увеличении параметра k расширяется диапазон λ , в котором значение $\tau_{rel}(\lambda, r)$ существенно отличается от 1 (диапазон λ , где распределение контактных напряжений существенно

отличается от случая однородной среды). Другими словами, неоднородность оказывает существенное влияние на всё более толстые покрытия.

Свойства 1—4 являются общими для слоистых и ФГ покрытий, ниже приведены их основные отличия:

5) экстремальные значения контактных напряжений для слоистых покрытий меньше, чем для ФГ;
6) кривые зависимости контактных напряжений от параметра λ для слоистых и ФГ покрытий похожи, однако, численные значения при фиксированных λ могут существенно отличаться. Например, при $k = 10$ и $\lambda = 18$ отличие контактных напряжений для покрытий 1 и 3 достигает 25 %.

На рисунке 4 изображены графики зависимости величины $\tau_{rel}(\lambda, r)$ от координаты r для покрытия 1, $k = 1$ при «малых» значениях параметра λ (тонкие покрытия), «средних» λ (покрытия сравнимые с размерами штампа) и «больших» λ (толстые покрытия).

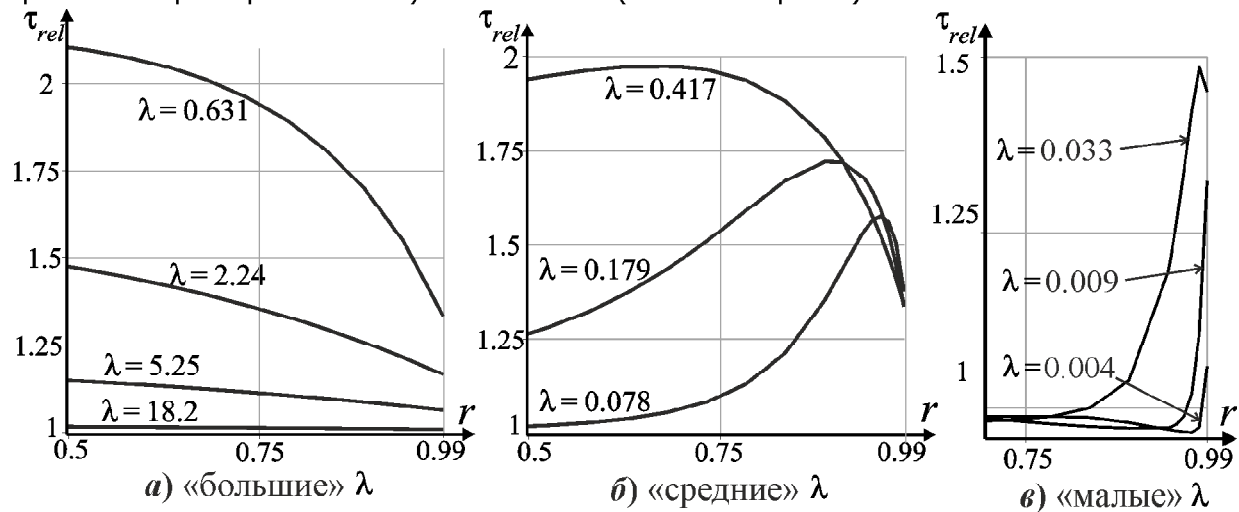


Рис. 4. Относительные контактные напряжения для покрытия 1 при $k = 1$

Контактные напряжения, возникающие на поверхности покрытия 1 при $k = 1$, обладают свойствами:

7) контактные напряжения для «больших» значений параметра λ ($\lambda > 1/2$) монотонно убывают при $r \rightarrow 1$ по сравнению со случаем однородного полупространства. Для $\lambda > 8$ разница между $\tau(\lambda, r)$ и $\tau_{hom}(\lambda, r)$ менее 8 %, для $\lambda > 25$ — менее 1 %;

8) контактные напряжения для «малых» и «средних» значений параметра λ ($\lambda \leq 1/2$) сначала возрастают, а затем убывают при $r \rightarrow 1$ по сравнению со случаем однородного полупространства;

9) из рисунка 4 видно, что при уменьшении λ сужаются области возрастания и убывания относительных контактных напряжений по r (см. предыдущее свойство). Контактные напряжения для $\lambda < 0,01$ практически не отличаются от случая однородного полупространства везде, кроме окрестности точки $r = 1$, где наблюдается резкое возрастание, а затем убывание величины относительных контактных напряжений.

Следует отметить, что понятия «больших», «средних» и «малых» значений параметра λ условны, при изменении значения параметра k или рассмотрении покрытий отличных от 1—4 их числовые диапазоны могут существенно измениться.

Свойства, аналогичные 7—9, имеют место и для покрытий 2—4 и всех значений параметра k (изменяются только количественные значения).

В работе произведён анализ контактных напряжений, возникающих на поверхности покрытий. Эта величина представляет наибольший интерес для теоретического исследования, т. к. зная её, легко можно рассчитать всё напряжённо-деформированное состояние полупространства [9].

Библиографический список

1. Структура и свойства нанокompозитных, гибридных и полимерных покрытий / А. Д. Погребняк [и др.] — Москва : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 344 с.
2. Dayal, P. Characterisation of nanolayered aluminium/palladium thin films using nanoindentation / P. Dayal, N. Savvides, M. Hoffman // *Thin Solid Films*. — 2009. — Vol. 517, iss. 13. — Pp. 3698–3703.
3. Reissner, E. Forced torsional oscillations of an elastic half-space / E. Reissner, H. F. Sagoci // *Journal of Applied Physics*. — 1944. — Vol. 15, № 9. — Pp. 652–654.
4. Sneddon, I. N. The Reissner—Sagoci problem / I. N. Sneddon // *Proceedings of the Glasgow Mathematical Association*. — 1966. — Vol. 7, № 3. — Pp. 136–144.
5. Грилицкий, Д. В. Кручение двухслойной упругой среды / Д. В. Грилицкий // *Прикладная механика*. — 1961. — Т. 7, № 1. — С. 89–94.
6. Васильев, А. С. Контактная задача о кручении круглым штампом трансверсально-изотропного упругого полупространства с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием / А. С. Васильев, Е. В. Садырин, И. А. Федотов // *Вестник Дон. гос. техн. ун-та*. — 2013. — № 1–2. — С. 25–34.
7. Айзикович, С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред / С. М. Айзикович // *Прикладная математика и механика*. — 1982. — Т. 46, № 1. — С. 148–158.
8. Айзикович, С. М. Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства / С. М. Айзикович, А. С. Васильев // *Прикладная математика и механика*. — 2013. — Т. 77, № 1. — С. 129–137.
9. Айзикович, С. М. Деформирование полупространства при действии произвольной осесимметричной нагрузки / С. М. Айзикович, Л. И. Кренёв, И. С. Трубочик // *Прикладная математика и механика*. — 2008. — Т. 72, № 4. — С. 644–651.

Материал поступил в редакцию 8.04.2013.

References

1. Pogrebnyak, A. D., et al. *Struktura i svoystva nanokompozitnykh, gibridnykh i polimernykh pokrytiy*. [Structure and properties of nanocomposite, hybrid, and polymer coatings.] Moscow : Knizhnyy dom "LIBROKOM", 2011, 344 p. (in Russian).
2. Dayal, P., Savvides, N., Hoffman, M. Characterisation of nanolayered aluminium/palladium thin films using nanoindentation. *Thin Solid Films*, 2009, vol. 517, iss. 13, pp. 3698–3703.
3. Reissner, E., Sagoci, H. F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. *Journal of Applied Physics*, 1944, vol. 15, no. 9, pp. 652–654.
4. Sneddon, I. N. The Reissner—Sagoci problem. *Proc. of the Glasgow Mathematical Association*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 136–144.
5. Grilitskiy, D. V. *Krucheniye dvuxsloynoy uprugoy sredy*. [Two-layered elastic medium torsion.] *Prikladnaya mekhanika*, 1961, vol. 7, no. 1, pp. 89–94 (in Russian).
6. Vasilyev, A. S., Sadyrin, E. V., Fedotov, I. A. *Kontaktnaya zadacha o kruchenii kruglym shtampom transversalno-izotropnogo uprugogo poluprostranstva s neodnorodnym transversalno-izotropnym pokrytiyem*. [Contact problem on torsion of transversely isotropic elastic half-space with inhomogeneous transversely isotropic coating by round die.] *Vestnik of Don State Technical University*, 2013, no. 1–2, pp. 25–34 (in Russian).

7. Aizikovich, S. M. Asimptoticheskiye resheniya kontaktnykh zadach teorii uprugosti dlya neodnorodnykh po glubine sred. [Asymptotic solutions to contact problems on elasticity theory for nonhomogeneous in depth media.] *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1982, vol. 46, no. 1, pp. 148–158 (in Russian).

8. Aizikovich, S. M., Vasilyev, A. S. Dvukhstoronniy asimptoticheskiy metod resheniya integralnogo uravneniya kontaktnoy zadachi o kruchenii neodnorodnogo po glubine uprugogo poluprostranstva. [Double-sided asymptotic solution method of the contact problem integral equation on non-uniform in depth elastic half-space torsion.] *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 129–137 (in Russian).

9. Aizikovich, S. M., Krenev, L. I., Trubchik, I. S. Deformirovaniye poluprostranstva pri deystvii proizvolnoy osesimmetrichnoy nagruzki. [Deformation of half-space under arbitrary axially symmetric load action.] *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2008, vol. 72, no. 4, pp. 644–651 (in Russian).

TORSION OF ELASTIC HALF-SPACE WITH MULTILAYERED COATING OF PERIODIC STRUCTURE*

A. S. Vasilyev, E. V. Sadyrin

(Don State Technical University),

M. E. Vasilyeva

(Rostov State Transport University)

An axisymmetric problem of the elasticity theory on torsion of an elastic half-space with inhomogeneous in depth coating of periodic structure by a non-deformable circular punch is considered. The coating is represented by a set of alternating soft and hard layers. The boundaries of the layers can be clear (piecewise-constant variation of the shear modulus) or smooth (continuously inhomogeneous or functionally-graded coatings). The approximate analytical solution to the problem of high accuracy is constructed which is effective for any coating thickness. The effect of the number of layers, and of the coating inhomogeneity type on the kernel transform of the integral equation and on the contact stresses distribution under the punch is investigated. It is shown that with certain values of the problem parameters, the substantial difference between the results for the continuous and piecewise constant type of the variation of the shear modulus in depth is obtained.

Keywords: torsion, multilayered coatings, layered composites.

* The research is done with the support from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (State Contract No. 11.519.11.3015, Agreement No. 14.B37.21.1131) and RFFI (grants Nos. 12-07-00639-a, 13-07-00954-a).