

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ К ЗАДАЧЕ О ЦИЛИНДРЕ, СЖАТОМ БОКОВЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Г.И. ВОЛОКИТИН, К.В. КОЗЛОВ, В.Б. ФЕДОСЕЕВ

(Донской государственный технический университет)

Рассматривается задача потери устойчивости полого кругового цилиндра. Используется теория малых деформаций, наложенных на конечную. Докритическое начальное напряженное состояние неоднородное. Закон состояния определен соотношением Блейтца–Ко.

Ключевые слова: конечная деформация, напряжения, круговой цилиндр, тензор, выпучивание, устойчивость.

Введение. Согласно феноменологическому подходу, принятому в механике сплошных сред, базовые соотношения для нелинейно-упругих тел включают конкретное представление удельной потенциальной энергии деформации. Предлагаемое выражение должно допускать описание основных нелинейных эффектов и приводить к доступному математическому рассмотрению простых деформаций. На свойства резиноподобных материалов сильно влияют химический состав и процессы изготовления. Для некоторых сортов резины подходит модель несжимаемого упругого материала, конкретизированная потенциалами Муни, Трелоара, Г.М. Бартенева и Т.Н. Хазановича, К.Ф. Черных и И.М. Шубиной [1]. Однако часто необходим учет сжимаемости материала. Как практический, так и теоретический интерес в этом случае представляет потенциал Блейтца и Ко. Целью данной работы является исследование устойчивости равновесия толстостенного цилиндра из этого материала при гидростатическом сжатии на основе трехмерных уравнений нелинейной теории упругости.

Определяющие соотношения и начальная деформация нелинейно упругого цилиндра. Закон состояния задается выражением плотности потенциальной энергии деформации, предложенным в работах Блейтца и Ко [2, 3]:

$$W = \frac{\mu\beta}{2} \left[I_1 + \frac{1}{\alpha} (I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right] + \frac{\mu}{2} (1 - \beta) \left[\frac{I_2}{I_3} + \frac{1}{\alpha} (I_3^{\alpha} - 1) - 3 \right]. \quad (1)$$

Здесь I_1 , I_2 , I_3 – главные инварианты меры деформации Коши–Грина, коэффициенты α , β , μ – модули упругости. Константа α выражается через постоянные Ламе и коэффициент Пуассона:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{\nu}{1 - 2\nu}.$$

Трехконстантный закон состояния (1) удачно подходит для описания упругих свойств некоторых сортов резины, требующих учета сжимаемости.

Далее будет использован закон состояния для напряжений в форме Фингера [1]:

$$T = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} E + \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) F - \frac{\partial W}{\partial I_2} F^2 \right],$$

где T – тензор напряжений Коши; E – единичный тензор; F – мера деформации Фингера. Выражение тензора T , найденное с учетом потенциала (1), принимает вид:

$$T = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[c^{-1} E + c^0 F - c^1 F^2 \right]. \quad (2)$$

Обобщенные модули задаются равенствами:

$$c^{-1} = -\frac{\mu\beta}{2} I_3^{-\alpha} + \frac{\mu(1-\beta)}{2} \left(I_3^{\alpha} - \frac{I_2}{I_3} \right), \quad c^0 = \frac{\mu\beta}{2} + \frac{\mu(1-\beta)}{2} \frac{I_1}{I_3}, \quad c^1 = \frac{\mu(1-\beta)}{2} \frac{1}{I_3}.$$

Рассматривается осесимметричная деформация кругового полого цилиндра.

Материальные координаты – цилиндрические координаты точки недеформированного цилиндра – r, φ, z . Координаты точки после деформации, возникающей за счет поверхностного нагружения равномерно распределенным давлением по наружной боковой поверхностям цилиндра, обозначены соответственно R, Φ, Z . Место точки в актуальной конфигурации определяется выражениями:

$$R = R(r)e_r + dz i_3, \quad \Phi = \varphi. \quad (3)$$

Здесь e_r, e_φ, i_3 – базисные векторы цилиндрических координат; r, φ, z – радиус, азимутальный угол и высота соответственно. Введем обозначения:

$$a \equiv R', \quad b \equiv \frac{R}{r}. \quad (4)$$

Тогда градиент деформации, определяемой соотношениями (3), принимает вид

$$\overset{0}{\nabla} R = \left(e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + i_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) R = a e_r e_r + b e_\varphi e_\varphi + d i_3 i_3,$$

где $\overset{0}{\nabla}$ – набла-оператор в отсчетной конфигурации. Отсюда находим меру Фингера и главные инварианты:

$$F = a^2 e_r e_r + b^2 e_\varphi e_\varphi + d^2 i_3 i_3, \quad I_1 = I_1(F) = a^2 + b^2 + d^2, \quad I_2 = a^2(b^2 + d^2) + b^2 d^2, \quad I_3 = a^2 b^2 d^2. \quad (5)$$

Тензор напряжений является соосным мере Фингера и с помощью физических компонент [1] выражается в виде:

$$T = \sigma_r e_r e_r + \sigma_\varphi e_\varphi e_\varphi + \sigma_z i_3 i_3,$$

где, учитывая формулы (2) и (3), для физических компонент можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\mu(1-\beta)}{I_3^{3/2}} (I_3^{1+\alpha} - \nu_1 I_3^{1-\alpha} - I_2 + a^2(\nu_1 I_3 + I_1) - a^4), \\ \sigma_\varphi &= \frac{\mu(1-\beta)}{I_3^{3/2}} (I_3^{1+\alpha} - \nu_1 I_3^{1-\alpha} - I_2 + b^2(\nu_1 I_3 + I_1) - b^4), \\ \sigma_z &= \frac{\mu(1-\beta)}{I_3^{3/2}} (I_3^{1+\alpha} - \nu_1 I_3^{1-\alpha} - I_2 + d^2(\nu_1 I_3 + I_1) - d^4). \end{aligned} \quad (6)$$

В соотношениях (6) инварианты вычислены по формулам (5), а $\nu_1 = \frac{\beta}{1-\beta}$.

Если отсутствуют массовые силы, условие равновесия в объеме имеет вид

$$\left(e_r \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} e_\varphi \frac{\partial}{\partial \Phi} + i_3 \frac{\partial}{\partial Z} \right) (\sigma_r e_r e_r + \sigma_\varphi e_\varphi e_\varphi + \sigma_z i_3 i_3) = 0.$$

Учитывая зависимости (6) и дериационные формулы [1], можно это условие свести к одному уравнению

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{a}{rb} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0. \quad (7)$$

Поскольку в этом уравнении напряжения σ_r, σ_φ определены формулами (6), то ясно, что (7) – это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Приведем вариант уравнения, отвечающий упрощенному варианту потенциала (1), – материалу Ноулса–Стернберга ($\alpha = 1/2, \beta = 0, \nu = 1/4$):

$$\frac{da}{dr} + \frac{a-b}{3r} \left(\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^3}{b^3} \right) = 0. \quad (8)$$

Условия равновесия на цилиндрических поверхностях имеют вид:

$$\sigma_r = \begin{cases} 0, & r = r_b \\ -p, & r = r_h \end{cases}, \quad (9)$$

где r_b – внутренний радиус трубы; r_h – наружный радиус; p – интенсивность давления. В частности, для материала Ноулса–Стернберга $\sigma_r = \mu \left(1 - \frac{1}{a^3 b d} \right)$.

Краевое условие на торце удовлетворяется интегрально, в «смысле Сен-Венана»:

$$Q = \int_{r_b(r_h)}^{r_h(r_h)} \sigma_z a b r dr, \quad (10)$$

где Q – продольная сила, приложенная к торцам цилиндра для равновесия. Окончательно задача Ламе для цилиндра определяется краевой задачей (7), (9). Причем параметр осевого смещения точек d задается в соответствии с условием (10). В упрощенном случае материала Ноулса–Стернберга задача Ламе для нелинейно-упругого цилиндра рассмотрена в [4].

Для решения нелинейной краевой задачи (7), (9) предложен численный метод, использующий конечные разности [5]. Выбираются равноотстоящие узлы, производные аппроксимируются центральными разностями. Узловые значения аргумента определяются формулами:

$$r_j = r_b + (j-2)h, \quad j = 2, 3, \dots, N+2, \quad h = \frac{r_h - r_b}{N}.$$

Используем также еще две «законтурные» точки $r_1 = r_b - h$, $r_{N+3} = r_h + h$. Обозначим x_j значения искомой функции $R(r)$ на выбранной сетке значений аргумента. Тогда, в частности, из (7) имеем систему $N+1$ нелинейных алгебраических уравнений:

$$x_j = \frac{1}{2}(x_{j+1} + x_{j-1}) + \frac{h^2(a-b)}{3r_j} \left(\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^3}{b^3} \right),$$

где $a = \frac{x_{j+1} + x_{j-1}}{2h}$, $b = \frac{x_j}{r_j}$. Еще два условия определим из краевых условий:

$$x_1 = x_3 - 2h \left(\frac{x_2}{r_2} \right)^{-2/3}, \quad x_{N+3} = x_{N+1} + 2h \left(1 + \frac{p_h}{\mu} \right)^{-1/3} \left(\frac{x_{N+2}}{r_h} \right)^{-2/3}.$$

Таким образом, имеем систему $N+3$ алгебраических уравнений с $N+3$ неизвестными. Решение системы получено методом простых итераций [5]. В качестве нулевого приближения итерационного метода решения краевой задачи на сетке принимались узловые значения соответствующего решения задачи Ламе для цилиндра в линейной теории упругости. Такой выбор обусловлен тем, что при малой относительной толщине оболочки и небольших давлениях уравнения (7), (8) и (9) переходят в соотношения линейной теории, для которых известны точные решения [6].

Следует отметить, что в упрощенном варианте материала Ноулса–Стернберга допускается решение дифференциального уравнения (8) в аналитическом виде. Его можно переписать, учитывая тождество $\frac{d}{dr} = \frac{a-b}{r} \frac{d}{db}$, следующим образом

$$\frac{da}{db} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^3}{b^3} \right) = 0.$$

Применим подстановку $t = \frac{a}{b}$. С помощью тождеств $\frac{da}{db} = t + b \frac{dt}{db}$ и $\frac{db}{dr} = \frac{a-b}{r}$ последнее дифференциальное уравнение можно представить в виде:

$$\frac{dr}{r} = -3 \frac{dt}{(t-1)t(t^2+t+4)}.$$

Отсюда находим

$$r = C_1 \frac{|t|^{\frac{3}{4}}}{|t-1|^{\frac{1}{2}}(t^2+t+4)^{\frac{1}{8}}} \exp\left(\frac{3}{4\sqrt{15}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{15}}\right) \equiv C_1 \psi(t), \quad (11)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Далее, учитывая равенство $\frac{dr}{r} = \frac{1}{t} \frac{dR}{R}$, получаем другое дифференциальное уравнение

$$\frac{dR}{R} = -3 \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+4)}.$$

Отсюда имеем

$$R = C_2 \frac{(t^2+t+4)^{\frac{1}{4}}}{|t-1|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{3}{2\sqrt{15}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{15}}\right) \equiv C_2 \zeta(t). \quad (12)$$

Выражения (11) и (12) дают общее решение исходного дифференциального уравнения (8) в параметрической форме. Для решения краевой задачи необходимо удовлетворить краевым условиям (9) и найти границы изменения параметра t_B и t_H ($t_B \mapsto r_B$, $t_H \mapsto r_H$). Эти значения параметра t определяются из системы двух нелинейных уравнений, вытекающих из краевых условий (9):

$$\begin{cases} \frac{r_B}{r_H} = \frac{\psi(t_B)}{\psi(t_H)}, \\ \left(\frac{t_B}{t_H}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(1 + \frac{\rho}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{r_B \zeta(t_H)}{r_H \zeta(t_B)}. \end{cases}$$

Далее, изменяя параметр t от t_B до t_H , с помощью (11) и (12) можно определить зависимость $R(r)$. В [4] указаны полученные ранее другими авторами параметрические формулы общего решения дифференциального уравнения (8). Однако соотношения (11), (12) имеют отличия, связанные с выбором параметра. Также в [4] не прояснен вопрос решения краевой задачи. Точное решение сходной нелинейной краевой задачи Ламе для сферы из материала Ноулса–Стернберга приведено в [7].

Уравнения нейтрального равновесия. Вектор добавочного перемещения возьмем в виде, допускающем несимметричные формы выпучивания:

$$w = u(r, \varphi, z)e_r + v(r, \varphi, z)e_\varphi + w(r, \varphi, z)i_3.$$

Применяя деривационные формулы, для градиента вектора добавочной деформации имеем равенство

$$\begin{aligned} \nabla w = & \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial r} e_r e_r + \frac{1}{R} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) e_\varphi e_\varphi + \frac{1}{d} \frac{\partial w}{\partial z} i_3 i_3 + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial r} e_r e_\varphi + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) e_\varphi e_r + \\ & \frac{1}{d} \frac{\partial u}{\partial z} i_3 e_r + \frac{1}{d} \frac{\partial v}{\partial z} i_3 e_\varphi + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial r} e_r i_3 + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} e_\varphi i_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Смежные формы равновесия цилиндра исследуем с помощью оператора А.И. Лурье Θ [1,6], который для материала Блейтца и Ко определен соотношением (10), полученным в работе [7]. Учитывая это соотношение и равенство (13), для тензора Θ имеем следующее представление:

$$\begin{aligned}
\Theta = & \left(A_1 \frac{\partial u}{\partial r} + A_2 \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + A_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) e_r e_r + \left(B_1 \frac{\partial u}{\partial r} + B_2 \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + B_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) e_\varphi e_\varphi + \\
& + \left(C_1 \frac{\partial u}{\partial r} + C_2 \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + C_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) i_3 i_3 + \left(D_1 \frac{\partial v}{\partial r} + D_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \right) e_r e_\varphi + \\
& + \left(F_1 \frac{\partial v}{\partial r} + F_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \right) e_\varphi e_r + \left(G_1 \frac{\partial w}{\partial r} + G_2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) e_r i_3 + \\
& + \left(H_1 \frac{\partial w}{\partial r} + H_2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) i_3 e_r + \left(P_1 \frac{\partial w}{\partial \varphi} + P_2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) e_\varphi i_3 + \left(Q_1 \frac{\partial w}{\partial \varphi} + Q_2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) i_3 e_\varphi.
\end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициенты при неизвестных u , v , w и их частных производных известны после решения начальной задачи Ламе функции переменной r . Приведем выражение одного из этих коэффициентов:

$$A_1 = \frac{\mu(1-\beta)}{aI_3^{3/2}} \left((1+2\alpha)v_1 I_3^{(1-\alpha)} + (2\alpha-1)I_3^{(1+\alpha)} + v_1 a^2 I_3 + 3b^2 d^2 \right).$$

Уравнения нейтрального равновесия в объеме [1] ($\nabla \Theta = 0$) приводят к системе трех линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta_{rr}}{\partial r} + \frac{a}{R} \left(\Theta_{rr} - \Theta_{\varphi\varphi} + \frac{\partial \Theta_{\varphi r}}{\partial \varphi} \right) + \frac{a}{d} \frac{\partial \Theta_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \Theta_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{a}{R} \left(\Theta_{r\varphi} + \Theta_{\varphi r} + \frac{\partial \Theta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \right) + \frac{a}{d} \frac{\partial \Theta_{z\varphi}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \Theta_{rz}}{\partial r} + \frac{a}{R} \left(\Theta_{rz} + \frac{\partial \Theta_{\varphi z}}{\partial \varphi} \right) + \frac{a}{d} \frac{\partial \Theta_{zz}}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

В уравнениях системы (15) компоненты тензора Θ выражены в соответствии с представлением (14). Нейтральное равновесие на боковой поверхности определяется условием [1,6]

$$N\Theta = -p(\nabla w N - N \nabla w^T), \quad (16)$$

где ∇ – набла-оператор в метрике деформированного состояния; N – вектор внешней нормали к деформированной поверхности, нагруженной гидростатическим давлением интенсивности p . На торцах принимаем граничные условия вида при $z=0$ и $z=L$ (L – длина цилиндра):

$$w=0, \quad \Theta_{rz} = \Theta_{zr} = 0. \quad (17)$$

Соотношения (17) означают недопустимость добавочного перемещения в осевом направлении и отсутствие трения на торцах [8]. Эти равенства не противоречат характеру нагружения цилиндра наружным давлением и сжатия с торцов абсолютно жесткими гладкими плитами.

Разыскиваем решение краевой задачи (15), (16)

$$\begin{cases} u = X_{nm}(r) \cos n\varphi \cos \lambda_m z, \\ v = Y_{nm}(r) \sin n\varphi \cos \lambda_m z, \\ w = Z_{nm}(r) \cos n\varphi \sin \lambda_m z, \end{cases} \quad (18)$$

где n и λ_m – параметры волнообразования, в соответствии с (17) определяется равенством

$$\lambda_m = \frac{\pi m}{L}, \text{ а числа } n, m \text{ – целые.}$$

Подстановка (18) в уравнения (15) и краевые условия (16) приводит к разделению переменных. В результате получаем однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & A_1 X''_{nm} + \left[A'_1 + A_2 + \frac{a}{R} (A_1 - B_1) \right] X'_{nm} + n \left(A_2 + \frac{a}{R} F_1 \right) Y'_{nm} + \lambda_m \left(A_3 + \frac{a}{d} H_1 \right) Z'_{nm} + \\ & + \left[A'_2 + \frac{a}{R} (A_2 - B_2 - n^2 F_2) - \lambda_m^2 \frac{a}{d} H_2 \right] X_{nm} + n \left[A'_2 + \frac{a}{R} (A_2 - B_2 - F_2) \right] Y_{nm} + \\ & + \lambda_m \left[A'_3 + \frac{a}{R} (A_3 - B_3) \right] Z_{nm} = 0, \\ & D_1 Y''_{nm} + \left[D'_1 - D_2 + \frac{a}{R} (D_1 + F_1) \right] Y'_{nm} - n \left(D_2 + \frac{a}{R} B_1 \right) X'_{nm} - \left[D'_2 + \frac{a}{R} (D_2 + F_2 + \right. \\ & + n^2 B_2) + \frac{a}{d} \lambda_m^2 Q_2 \left. \right] Y_{nm} - n \left[D'_2 + \frac{a}{R} (D_2 + F_2 + B_2) \right] X_{nm} - \\ & - n \lambda_m \left(\frac{a}{R} B_3 + \frac{a}{d} Q_1 \right) Z_{nm} = 0, \\ & G_1 Z''_{nm} + \left(G'_1 + \frac{a}{R} G_1 \right) Z'_{nm} - \lambda_m \left(G_2 + \frac{a}{d} C_1 \right) X'_{nm} - \lambda_m \left(G'_2 + \frac{a}{R} G_2 + \frac{a}{d} C_2 \right) X_{nm} - \\ & - \lambda_m n \left(\frac{a}{R} P_2 + \frac{a}{d} C_2 \right) Y_{nm} - \\ & - \left(n^2 \frac{a}{R} P_1 + \lambda_m^2 \frac{a}{d} C_3 \right) Z_{nm} = 0 \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Из краевых условий (16) после разделения переменных получим при $r = r_b$ и $r = r_h$:

$$\left\{ \begin{aligned} & A_1 X'_{nm} + \left(A_2 + \frac{q}{R} \right) (X_{nm} + n Y_{nm}) + \lambda_m \left(A_3 + \frac{q}{d} \right) Z_{nm} = 0, \\ & D_1 Y'_{nm} - \left(D_2 - \frac{q}{R} \right) (n X_{nm} + Y_{nm}) = 0, \\ & G_1 Z'_{nm} - \lambda_m \left(G_2 - \frac{q}{d} \right) = 0. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

В условиях (20) $q = 0$, если $r = r_b$, и $q = p$, если $r = r_h$.

Однородная система (19) и краевые условия (20) выражают нейтральное равновесие цилиндра. При бифуркационных значениях параметров p и d возможны нетривиальные решения краевой задачи (19), (20). Они соответствуют возмущенным равновесным формам цилиндра. Критические значения давления находим как наименьшие бифуркационные значения p при надлежащем выборе n и λ_m . Бифуркационные значения – собственные числа задачи (19), (20). Отметим, задача на собственные значения является *нелинейной*, поскольку искомый параметр входит нелинейно через функцию $R(r)$. Для решения такой задачи на собственные значения использован численный метод [8].

Выводы. Численный алгоритм определения бифуркационных нагрузок, включающий решение задачи Ламе о начальной деформации цилиндра, вычисление коэффициентов системы (19) и по-

лучение собственных значений, реализован на ЭВМ. Расчеты проводились как для упрощенного варианта материала – материала Ноулса–Стернберга, так и для полного закона Блейтца и Ко. В качестве примера применения полученных уравнений нейтрального равновесия рассматривались некоторые случаи потери устойчивости, изучаемые в теории оболочек [9]. Для очень длинных цилиндрических оболочек под внешним боковым давлением критическая нагрузка разыскивалась в виде соотношения Грасгофа–Бресса: $p = 2\mu(1+\nu)p_*\varepsilon^3$, где ε – относительная толщина оболочки, p_* – безразмерный параметр давления. Обнаружено, что критическому (минимальному) давлению отвечают плоские формы выпучивания: $n = 2$, $m = 0$. Представления о влиянии нелинейности на величину верхнего критического давления в зависимости от относительной толщины отражены в табл. 1. Данные второй строки согласуются с результатами, приведенными в [8]. Численный анализ также показал, что для не слишком толстостенных цилиндров влияние на критическое значение параметра давления точности решения начальной задачи (задачи Ламе) и константы β незначительное. Изучался случай оболочек средней длины, где принималось $\frac{r_b}{L} = 0,38$.

Для таких оболочек критическая нагрузка разыскивалась в соответствии с формулой Саусвелла–Папковича: $p = 2\mu(1+\nu)p_*\varepsilon^{2,5}$. Длина оболочки неизменная ($d = 1$), цилиндр нагружен внешним боковым давлением. Критические значения параметра давления и соответствующие значения параметров волнообразования содержатся в табл. 2, параметр $m = 1$.

Таблица 1

$\varepsilon = 2(r_n - r_b)/(r_n + r_b)$	0,05	0,10	0,20
p_* ($\nu = 0,272$)	0,26	0,27	0,29
p_* ($\nu = 0,250$)	0,34	0,36	0,38

Таблица 2

$\varepsilon = 2(r_n - r_b)/(r_n + r_b)$	0,05	0,10	0,20
n	4	3	3
p_* ($\nu = 0,272$)	0,38	0,39	0,44
p_* ($\nu = 0,250$)	0,49	0,52	0,56

Библиографический список

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980.
2. Blatz P.J., Ko W.L. Application of finite elasticity theory to deformation of rubbery materials // Trans. Soc. Rheol. 1962, v.6. – P. 223–251.
3. Ko W.L. Application of finite elasticity theory to the behavior of rubber-like materials. Thesis in partial fulfillment of requirements for the degree of doctor of philosophy. California Institute of Technology, 1963.
4. Fu Y.B., Ogden R.W. Nonlinear elasticity: theory and applications. Cambridge University Press, 2001.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978.
6. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970.
7. Волокитин Г.И. Условия бифуркации равновесия сферы / Г.И. Волокитин, Д.В. Моисеев. // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XV междунар. конф. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2011. – Т. 1. – С. 69–73.
8. Волокитин Г.И. Устойчивость нелинейно-упругого цилиндра при боковом давлении и осевом сжатии / Г.И. Волокитин // ПММ. – 1982. – Т. 42. – Вып. 2. – С. 289–295.
9. Григолюк Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – М.: Наука, 1978.

Материал поступил в редакцию 26.03.2011.

References

1. Lur'e A.I. Nelinejnaya teoriya uprugosti / A.I. Lur'e. – M.: Nauka, 1980. – In Russian.
2. Blatz P.J., Ko W.L. Application of finite elasticity theory to deformation of rubbery materials // Trans. Soc. Rheol. 1962, v.6. – P. 223–251.
3. Ko W.L. Application of finite elasticity theory to the behavior of rubber-like materials. Thesis in partial fulfillment of requirements for the degree of doctor of philosophy. California Institute of Technology, 1963.
4. Fu Y.B., Ogden R.W. Nonlinear elasticity: theory and applications. Cambridge University Press, 2001.
5. Kalitkin N.N. Chislenny`e metody` / N.N. Kalitkin. – M.: Nauka, 1978. – In Russian.
6. Lur'e A.I. Teoriya uprugosti / A.I. Lur'e. – M.: Nauka, 1970. – In Russian.
7. Volokitin G.I. Usloviya bifurkacii ravnovesiya sfery` / G.I. Volokitin, D.V. Moiseev // Sovremennyy`e problemy` mexaniki sploshnoj sredy`: tr. XV mezhdunar. konf. – Rostov n/D: Izd-vo YuFU, 2011. – T. 1. – S. 69–73. – In Russian.
8. Volokitin G.I. Ustojchivost` nelinejno-uprugogo cilindra pri bokovom davlenii i osevom szhatii / G.I. Volokitin // PMM. – 1982. – T. 42. – Vy`p. 2. – S. 289–295. – In Russian.
9. Grigolyuk E`.I. Ustojchivost` obolochek / E`.I. Grigolyuk, V.V. Kabanov. – M.: Nauka, 1978. – In Russian.

APPLICATION OF NEUTRAL EQUILIBRIUM EQUATIONS TO PROBLEM ON CYLINDER WITH LATERAL PRESSURE COMPRESSION

G.I. VOLOKITIN, K.V. KOZLOV, V.B. FEDOSEYEV

(Don State Technical University)

The buckling problem of the hollow circular cylinder is considered. The small-strain theory superimposed on the finite is used. The subcritical initial stress state is inhomogeneous. The law of state is defined by Blatz-Ko.

Keywords: finite deformation, stresses, circular cylinder, tensor, buckling, stability.