УДК 330.4:339.138:658

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПЛАНА КАК СОСТАВЛЯЮЩЕЕ ЗВЕНО ПРОИЗВОДСТВЕННОГО МАРКЕТИНГА

А.В. НЕМОВА
(Донской государственный технический университет)

Рассматривается проблема оперативного реагирования предприятий на изменения во внутренней и внешней среде на основе экономико-математического моделирования, в частности линейного программирования, с целью повышения эффективности производства.

Ключевые слова: *маркетинг, линейное программирование, симплекс-метод, оптимизация, матрица, алгоритм.*

Введение. Экономико-математическое моделирование выступает одним из основных инструментов маркетинговой деятельности и оперирует множеством разнообразных методов, наиболее распространенным среди которых является линейное программирование. Обычно процесс моделирования предполагает прохождение ряда этапов для достижения цели: определение проблемы и ее анализ → разработка модели → математический анализ построенной модели → сбор исходных данных → проведение расчетов → анализ результатов расчетов и их использование на практике.

В последнее время все большее внимание уделяется проведению маркетинговых исследований, с которых начинается деятельность практически любой компании. Исторические предпосылки современной системы маркетинга во многом обусловили повышение интереса к этому виду деятельности в настоящее время. Ориентация на потребителей и конкурентов, гибкая адаптация к постоянно меняющимся условиям во внешней и внутренней среде функционирования любой компании являются необходимыми условиями для обеспечения непрерывности и эффективности её функционирования, а также обеспечения её самоокупаемости и самофинансирования. Маркетинговая деятельность предполагает в первую очередь детальное изучение рынка товаров и услуг, спроса и предложения, поведения потребителей, рыночной конъюнктуры, динамики цен с целью лучшего продвижения своей продукции. Целесообразность внедрения на производственных предприятиях специализированных маркетинговых служб обусловлена необходимостью управления спросом на производимую продукцию для достижения поставленных целей.

Прежде чем формировать производственную программу, руководству предприятия необходимо знать, какую продукцию, в каком объеме, где, когда и по каким ценам оно будет реализовывать. Для этого нужно изучить спрос на продукцию, рынки ее сбыта, их емкость, реальных и потенциальных конкурентов, потенциальных покупателей, возможность организации производства по конкурентной цене, доступность необходимых материальных ресурсов, наличие кадров необходимой квалификации и т. д. Эти и другие задачи возлагаются на службу маркетинга или на иных внутренних сотрудников компании. От того, насколько качественно выполнены поставленные задачи, зависят конечные финансовые результаты, воспроизводство капитала, его структура и, как следствие, финансовая устойчивость предприятия. В этой связи важным этапом этих маркетинговых исследований является формирование такой производственной программы, которая бы отвечала потребностям рынка, но при этом была оптимальной и соответствовала особенностям конкретно взятого предприятия.

Метод программирования как способ решения маркетинговых проблем. В условиях рыночных отношений, когда сырьевые ресурсы ограничены, возникает вопрос минимизации прибыли, себестоимости и экономии ресурсов. На сегодняшний день существует необходимость оперативного реагирования предприятий на изменения во внутренней и внешней среде их функционирования, на изменение спроса на товары, работы, услуги и т. д. Перед компаниями возникает целый комплекс задач, основной среди которых является максимизация эффективности деятельности предприятия путем оптимизации использования ресурсов и формирования рационального набора выпускаемой продукции. Её решение включает в себя анализ текущего состояния рынка и разработку на основе его данных стратегических и оперативно-тактических решений.

Линейное программирование представляет собой математический метод выбора самого благоприятного решения из ряда возможных. Его применение обусловлено необходимостью решения таких маркетинговых проблем, как, например, разработка максимально выгодного ассортимента продукции при ограниченном количестве ресурсов, расчёт оптимальной величины товарных запасов и т. д. С данным методом тесно связаны оптимизационные задачи, целью которых является нахождение наилучшего варианта использования материальных, трудовых, финансовых и временных ресурсов. Решаются такие задачи путём построения экономико-математических моделей оптимизации производственных планов предприятия.

Любая модель оптимизации содержит целевую функцию, в которой показательной является эффективность производства, характеризуемая такими показателями, как прибыль, выручка, затраты ресурсов, и систему ограничений, куда входят факторы, в области которых модель не теряет своей практической ценности. Особую роль среди них играет критерий оптимальности, под которым понимается экономический показатель, сведение которого к максимуму или минимуму указывает на достижение целей оптимизации. Запись этого критерия в виде функции от переменных задачи и формирует целевую функцию. При выборе критерия оптимальности учитывается ряд общих требований, к которым стоит отнести: учёт возможных ограничений от принятия того или иного решения, исключение одинаковых по величине издержек, а также учёт рыночного состояния на данный период времени.

Экономико-математическая модель оптимизации, сформированная на основании поставленной задачи планирования производства фирмы, сводится к задаче линейного программирования. По сути, поставленная задача является задачей оптимизации плана, так как её сущность состоит в определении экстремума вещественной целевой функции. Ещё до появления ЭВМ и АСУ были предприняты первые попытки применить математику для решения экономических задач. Поэтому изначально математическая постановка задачи планирования производства применялась в экономической сфере, и линейные задачи нахождения оптимальных планов построения производственных программ исследовались именно в области экономики. Однако самые известные работы, направленные на внедрение экономико-математических методов в сферу управления, появились уже после возникновения первых ЭВМ, без которых теперь невозможно решать большинство задач управления, отличающихся большой размерностью и значительным числом переменных и ограничений. К числу тех, кто посвятил свои исследования задачам линейного программирования и их практическому применению, можно отнести Джона фон Неймана, Л.В. Канторовича, Б. Эгервари и др. [1–7].

Поскольку задачи оптимизации можно классифицировать по ряду признаков, то и соответственно модели, строящиеся на основе исходных данных этих задач, тоже могут быть различными. Задачи оптимального программирования в наиболее общем виде классифицируют по целому ряду признаков, приведенных в табл.1.

Таблица 1

Классификация оптимизационных задач

Признаки классификации	Виды задач	Характеристика задач
1. Характер взаимосвязи между переменными	а) линейные	целевая функция и функциональные связи в системе ограничений являются линейными
	б) нелинейные	присутствует нелинейность хотя бы в одном из неравенств системы ограничений или целевой функции
2. Характер изменения переменных	а) непрерывные	значения каждой из переменных могут полностью заполнять некоторую область
	б) дискретные	все или хотя бы одна переменная могут принимать некоторые целочисленные значения
3. Учёт фактора времени	а) статические	моделирование и принятие решений осуществляются в предположении о независимости от времени элементов модели в течение периода, на который принимается управленческое решение
	б) динамические	нельзя предположить, что элементы модели независимы от времени в течение периода, на который принимается управленческое решение
4. Наличие информации о переменных	а) детерминированные (полная определённость)	отдельные элементы являются вероятностными величинами, но дополнительными статистическими исследованиями могут быть установлены их законы распределения вероятностей
	б) задачи в условиях неполной определенности	можно сделать предположение о возможных исходах случайных элементов, но нельзя сделать вывод о вероятностях исходов
	в) задачи в условиях неопределенности	то же
5. Число критериев оценки альтернатив	а) простые (однокритериальные) задачи	задачи, где экономически приемлемо использование одного критерия оптимальности
	б) сложные (многокритериальные) задачи	выбор управленческого решения происходит по нескольким показателям

Среди наиболее известных оптимизационных моделей большее распространение получила экономико-математическая модель, построенная на задаче линейного программирования, в которой функция F(X) максимизируется и является при этом линейной, а ограничения задаются системой линейных неравенств, также являющихся линейными. Ниже приведены постановка данной задачи и её решение, однако, чтобы был более понятен смысл данной задачи и необходимость построения соответствующей модели в целом, недостаточно просто привести данные по этой задачи и сформулировать её экономико-математическую модель, нужно ещё провести расчет и экономический анализ в целях проведения маркетинговых исследований.

Постановка задачи планирования производства. Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в табл. 2 (цифры условные). Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2, соответственно 2 и 3 руб.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от её реализации будет максимальной.

Таблица 2

Исходные данные для планирования производства

Вид ресурса	Запас ресурса (З)	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
S_4	21	3	-

РЕШЕНИЕ. Составим экономико-математическую модель задачи. Пусть x_1, x_2 – число единиц продукции соответственно P_1 и P_2, запланированных к производству. Для их изготовления потребуется $(1x_1 + 3x_2)$ единиц ресурса S_1, $(2x_1 + 1x_2)$ единиц ресурса S_2, $1x_2$ единиц ресурса S_3 и $3x_1$ единиц ресурса S_4 (см. табл. 2). Так как потребление ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4 не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами можно выразить системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 \le 16; \\ x_2 \le 5; \\ x_1 \le 21. \end{cases} \tag{1}$$

По смыслу задачи переменные

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{2}$$

Суммарная прибыль F составит $2x_1$ руб. от реализации продукции P_1 и $3x_2$ руб. – от реализации продукции P_2, т. е.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max. \tag{3}$$

Таким образом, экономико-математическая модель задачи состоит в следующем: необходимо найти такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2)$, который бы одновременно удовлетворял системе (1) и условию (2), при котором функция (3) принимает максимальное значение.

Решим данную задачу симплексным методом. Для этого сначала определим максимальное значение целевой функции $F(X) = 2x_1 + 3x_2$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 \le 16; \\ x_2 \le 5; \\ 3x_1 \le 21. \end{cases} \tag{4}$$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведём к системе уравнений путем введения следующих дополнительных переменных:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16; \\ x_2 + x_5 = 5; \\ 3x_1 + x_6 = 21. \end{cases} \tag{5}$$

Матрица коэффициентов этой системы уравнений будет соответственно иметь вид

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_3, x_4, x_5, x_6, то есть переменных, каждая из которых входит лишь в одно уравнение системы ограничений с единичным коэффициентом.

Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план: $X_1 = (0,0,18,16,5,21)$, табл. 3.

Таблица 3

Первый опорный план симплекс-метода

План	Базис	З	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	18	1	3	1	0	0	0
	x_4	16	2	1	0	1	0	0
	x_5	5	0	1	0	0	1	0
	x_6	21	3	0	0	0	0	1
Индексная строка	F(X0)	0	2	3	0	0	0	0

Перейдём к основному алгоритму симплекс-метода (табл. 4).

Таблица 4

Основной алгоритм симплекс-метода

План	Базис	З	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
1	x_3	18	1	3	1	0	0	0	6
	x_4	16	2	1	0	1	0	0	16
	x_5	5	0	1	0	0	1	0	5
	x_6	21	3	0	0	0	0	1	-
Индексная строка	F(X1)	0	2	3	0	0	0	0	0

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как это наибольший коэффициент. Вычислим значения коэффициента по строкам как частное от деления: $\frac{b_i}{a_{i2}}$ и из них выберем наименьшее: min (18 : 3 , 16 : 1 , 5 : 1 , -) = 5. Следовательно, 3-я строка является ведущей. Разрешающий элемент равен 1 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки. Следовательно, x_2 необходимо включить в базис, а x_5 – исключить.

Строка, соответствующая переменной x_2 в плане № 1, получена в результате деления всех элементов строки x_5 плана 0 на разрешающий элемент (1). На месте разрешающего элемента в плане № 1 получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 плана № 1 записываем нули. Таким образом, в новом плане № 1 заполнены строка x_2 и столбец x_2. Все остальные элементы нового плана № 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выберем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент. $НЭ = СЭ - \frac{(A \cdot B)}{РЭ}$, где *СЭ* – элемент старого плана, *РЭ* – разрешающий элемент (1), *A* и *B* – элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СЭ и РЭ (табл. 5).

Таблица 5

Второй опорный план симплекс-метода

План	Базис	З	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
2	x_3	3	1	0	1	0	-3	0	3
	x_4	11	2	0	0	1	-1	0	$5^1/_2$
	x_2	5	0	1	0	0	1	0	-
	x_6	21	3	0	0	0	0	1	7
Индексная строка	F(X2)	15	2	0	0	0	3	0	0

Текущий опорный план неоптимален, поэтому в качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент.

Вычислим значения θ_i по строкам как частное от деления $\frac{b_i}{a_{i1}}$ и из них выберем наименьшее: min (3 : 1 , 11 : 2 , - , 21 : 3) = 3. Следовательно, 1-я строка является ведущей. Разрешающий элемент равен 1 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки. Следовательно, x_1 необходимо включить в базис, а x_3 – исключить. Строка, соответствующая переменной x_1 в плане № 2, получена в результате деления всех элементов строки x_3 плана 1 на разрешающий элемент (1). На месте разрешающего элемента в плане № 2 получаем 1. В остальных клетках столбца x_1 плана № 2 записываем нули. Таким образом, в новом плане № 2 заполнены строка x_1

и столбец x_1. Все остальные элементы нового плана № 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Текущий опорный план неоптимален, следовательно, в качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_5, так как это наибольший коэффициент. Вычислим значения θ_i по строкам как частное от деления $\frac{b_i}{a_{i5}}$ и из них выберем наименьшее: min (- , 5 : 5 , 5 : 1 , 12 : 9) = 1. Следовательно, 2-я строка является ведущей. Разрешающий элемент равен 5 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки. Следовательно, x_5 необходимо включить в базис, а x_4 – исключить (табл. 6).

Таблица 6

Текущий опорный план симплекс-метода

План	Базис	3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
3	x_1	3	1	0	1	0	-3	0	-
	x_4	5	0	0	-2	1	5	0	1
	x_2	5	0	1	0	0	1	0	5
	x_6	12	0	0	-3	0	9	1	$1^1/_3$
Индексная строка	F(X3)	21	0	0	2	0	-3	0	0

Строка, соответствующая переменной x_5 в плане № 3, получена в результате деления всех элементов строки x_4 плана 2 на разрешающий элемент 5. На месте разрешающего элемента в плане № 3 получаем 1. В остальных клетках столбца x_5 плана № 3 записываем нули. Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x_5 и столбец x_5.

Все остальные элементы нового плана № 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Конец итераций: найден оптимальный план (табл. 7).

Таблица 7

Окончательный вариант симплекс-таблицы

План	Базис	3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_1	6	1	0	$^{-1}/_5$	$^3/_5$	0	0
	x_5	1	0	0	$^{-2}/_5$	$^1/_5$	1	0
	x_2	4	0	1	$^2/_5$	$^{-1}/_5$	0	0
	x_6	3	0	0	$^3/_5$	$-1^4/_5$	0	1
Индексная строка	F(X4)	24	0	0	$^4/_5$	$^3/_5$	0	0

Оптимальный план можно записать так: $x_1 = 6$, $x_5 = 1$, $x_2 = 4$, $x_6 = 3$; $F(X) = 2\cdot6 + 3\cdot4 = 24$.

То есть для получения максимального значения прибыли $F(X) = 24$ производственному предприятию необходимо произвести 6 единиц продукции P_1 и 4 единицы продукции P_2 с учетом всех сложившихся на данный момент условий, в которых организация осуществляет свою деятельность.

Любые попытки создать оптимальный план (даже если эти попытки оказываются неудачными) всегда дают положительный эффект: система, для которой разрабатывается производственная программа, изучается более глубоко, и появляется возможность понимания сущности происходящих в компании хозяйственных процессов. В процессе формирования производственного плана выявляются слабые места, имеющиеся в системе управления организацией, а также причины их возникновения и способы их устранения.

Очень удачно отражена рекуррентная взаимосвязь в модели, рассмотренной А. П. Тяпухиным, которая выглядит следующим образом:

$$Y_{\text{снаб}1}=f(X_{\text{сн}});$$
$$У_{\text{пр-во}2}=f(Y_{\text{снаб.}},X_{\text{пр-во}});$$
$$У_{\text{снаб}3}=f(У_{\text{пр-во}},X_{\text{маркет}}).$$

В данной модели подчеркивается связь между снабжением, производством, маркетингом и сбытом, поэтому ее применение на практике так же очень актуально, как и использование метода линейного программирования, рассмотренного выше.

Самые первые серьезные по своим масштабам работы, связанные с математической формулировкой задач управления, приходятся на период бурного научно-технического развития и автоматизации производства. Интеграция математических и экономических методов сопровождалась большими затратами финансовых ресурсов. На применение этих методов возлагались большие надежды, большинство которых так и не оправдались. Сегодня в рамках осуществляемой маркетинговой деятельности экономико-математическое моделирование получило широкое распространение на многих предприятиях. Как правило, построение моделей осуществляется с применением новейших компьютерных технологий и использованием современных программных продуктов. Одним из наиболее распространенных способов решения оптимизационных задач является использование надстройки MS Excel «Поиск решений», позволяющей решать широкий круг задач на оптимизацию и обеспечивающей быстрый поиск оптимальных решений достаточно сложных моделей. В основе средства поиска решения MS Excel лежит алгоритм нелинейной оптимизации Generalized Reduced Gradient (GRG2), разработанный Л. Ласдоном и А. Уорреном. Процедура поиска решения позволяет найти оптимальное значение формулы, содержащейся в целевой ячейке. Её можно использовать для определения значения влияющей ячейки, которое соответствует экстремуму зависимой ячейки: например, можно изменить объём планируемого бюджета рекламы и посмотреть, как это повлияет на размер планируемых расходов. Помимо MS Excel в последнее время получили широкое распространение программные продукты группы Arena, в частности для оптимизации производственных программ применяется Arena OptQuest; Optytrace; SMath Studio; платформа ERP, реализующая стандартные циклы планирования. На последней стоит остановиться более подробно. Дело в том, что платформа ERP позволяет решить широкий круг задач, связанных с планированием (за исключением оперативного планирования). Сегодня возможна оптимизация оперативного планирования с помощью программных продуктов, разработанных на основе ERP-платформы. Например, решение на базе модуля Advanced Supply Chain Planning (ASCP) из линейки Oracle E-Business Suite. Данный модуль позволяет решить комплекс задач на всех этапах планирования (в том числе оперативного планирования). Однако модуль ASCP имеет некоторые ограничения: невозможен учет специфики отдельных отраслей, существует ограничение количества критериев качества планирования и отсутствует возможность проследить алгоритм получения решения. Для решения данной проблемы считаю целесообразным применение «корректора оперативного плана», особенностью которого является наличие как универсальной части, так и изменяемой, которую можно дорабатывать с учетом особенностей каждого конкретного предприятия.

Вывод. Создание экономико-математической модели с помощью методов математического программирования позволяет воссоздать образ реального экономического процесса в виде модели, включающей известные существенные показатели и искомые величины, которые вместе характеризуют рассматриваемый объект. Такая модель позволяет менеджерам, аналитикам, маркетологам приготовить и обосновать управленческие решения, имея дело не с реальным объектом, а с его моделью. Это в значительной мере расширяет возможности для выбора наиболее рационального способа управления, при этом не нарушая функционирование реального объекта в процессе поиска оптимальных решений. Таким образом, появляется возможность использования компьютеров, поскольку язык математических моделей является для них наиболее удобным.

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2001.
2. Калихман И.Л. Динамическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Калихман, М.А. Войтенко. – М.: Высшая школа, 1979.
3. Красс М.С. Математика для экономических специальностей / М.С. Красс. – М.: ИНФРА-М, 1999.
4. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование / А.В. Лотов. – М.: Наука, 1984.
5. Мэнкью Н.Г. Макроэкономика / Н.Г. Мэнкью. – М.: Изд-во МГУ, 1994.
6. Новиков О.А. Прикладные вопросы массового обслуживания / О.А. Новиков, С.И. Петухов. – М.: Советское радио, 1969.
7. Самуэльсон П.Э. Экономика / П.Э. Самуэльсон, В.Д. Нордхаус. – М.: Вильямс, 2000.

Материал поступил в редакцию 3.06.11.

References

1. Ventcel` E.S. Issledovanie operacij / E.S. Ventcel`. – M.: Vy`sshaya shkola, 2001. – In Russian.
2. Kalixman I.L. Dinamicheskoe programmirovanie v primerax i zadachax / I.L. Kalixman, M.A. Vojtenko. – M.: Vy`sshaya shkola, 1979. – In Russian.
3. Krass M.S. Matematika dlya e`konomicheskix special`nostej / M.S. Krass. – M.: INFRA-M, 1999. – In Russian.
4. Lotov A.V. Vvedenie v e`konomiko-matematicheskoe modelirovanie / A.V. Lotov. – M.: Nauka, 1984. – In Russian.
5. Me`nk`yu N.G. Makroe`konomika / N.G. Me`nk`yu. – M.: Izd-vo MGU, 1994. – In Russian.
6. Novikov O.A. Prikladny`e voprosy` massovogo obsluzhivaniya / O.A. Novikov, S.I. Petuxov. – M.: Sovetskoe radio, 1969. – In Russian.
7. Samue`l`son P.E`. E`konomika / P.E`. Samue`l`son, V.D. Nordxaus. – M.: Vil`yams, 2000. – In Russian.

MATHEMATICAL ECONOMIC MODEL OF PRODUCTION BUDGET OPTIMIZATION AS MARKETING CONSTITUENT

A.V. NEMOVA

(Don State Technical University)

The problem of dynamic response of the enterprises on changes in the internal and external environment on the basis of economic mathematical modeling, linear programming particularly, for the purpose of the production effectivization is considered.

Keywords: *marketing, linear programming, simplex method, optimization, matrix, algorithm.*