

УДК 004.942:621.375.7

Л.В. ЧЕРКЕСОВА

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ–ХИЛЛА С УЧЁТОМ СОБСТВЕННОГО ТОКА РЕЗОНАНСНОГО КОНТУРА

Дан анализ решений нелинейного дифференциального уравнения Матье-Хилла, описывающего нелинейный резонатор или нелинейно-параметрическую зонную (или пазонную) систему (НПС), работающую в высших зонах неустойчивости колебаний на высших гармониках. Получены устойчивое и неустойчивое решения этого уравнения с учётом влияния собственного тока резонансного контура НПС на модуляцию его индуктивности.

Ключевые слова. резонансный контур, нелинейный резонатор, нелинейно-параметрическая зонная система, амплитуда колебаний.

Введение. Нелинейный параметрический эффект широко используется в электронике для создания маломощных усилителей и высокоэффективных генераторов, элементов памяти, логических элементов – регистров, счетчиков, дешифраторов, сумматоров и функциональных преобразователей и др. Применение электронной аппаратуры, имеющей в своем составе нелинейные резонаторы, чрезвычайно широко. *Нелинейные резонаторы* представляют собой колебательные параметрические зонные (или пазонные) системы, работающие в первой или высших зонах неустойчивости колебаний, на высших гармониках.

Резонансные схемы, использующие колебательные контуры, представляют собой нелинейно-параметрические зонные (пазонные) системы (НПС). Они широко используются в качестве высококачественных усилителей, генераторов, преобразователей, а в цифровой технике – триггеров, логических элементов и элементов памяти. Их применение позволяет не только улучшить технические характеристики электронной аппаратуры, но и повышает их надежность в условиях неблагоприятного воздействия окружающей среды. Достоинства таких систем обуславливают их использование в измерительной технике, в качестве датчиков НЧ-диапазона как маломощных функциональных устройств.

Постановка задачи. Изучение свойств и закономерностей явлений в НПС, работающих в высших зонах неустойчивости, весьма актуально и возможно при разработке точных методик и широкого класса экспериментальных методов. Подобные исследования лежат в плоскости наноэлектроники при изучении нелинейных параметрических резонансных явлений в наноразмерных структурах.

Методы и результаты исследования. Нелинейно-параметрические взаимодействия распространены в природе очень широко и присущи многим нелинейным средам. Колебательные процессы в НПС удобно моделировать с помощью нелинейных электрических цепей, в которых легко получить, описать и исследовать все явления и процессы, связанные с нелинейно-параметрическими взаимодействиями. Нелинейная пазонная система индуктивного типа в общем случае описывается нелинейным дифференциальным уравнением [1]:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\delta(t, i(t)) \times \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2(t, i(t)) \times i(t) = 0, \quad (1)$$

где $\delta(t, i(t)) = \frac{dL(t, i(t))}{dt} + \frac{R}{2L(t, i(t))}$ и $\omega_0^2(t, i(t)) = \frac{d^2 L(t, i(t))}{dt^2} + \frac{1}{L(t, i(t)) \times C}$ – соответственно коэффициент затухания и квадрат частоты собственных колебаний резонансного контура.

Для решения уравнения (1) предположим, что влияние собственного тока резонансного контура параметрического преобразователя на рассматриваемую систему отсутствует. Тогда оно преобразуется к уравнению:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\delta(t) \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2(t) \times i(t) = 0.$$

Используя подстановку $i(t) = Y \times e^{-\int \delta(t) dt}$, его можно преобразовать к виду:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + F^2(t) \times U = 0, \quad \text{где } F^2(t) = \omega_0^2(t) - \delta^2(t) - \frac{d\delta}{dt}. \quad (2)$$

При исследовании НПС индуктивного типа кривую намагничивания сердечников катушек индуктивности часто считают безгистерезисной и аппроксимируют гиперболическим синусом [1, 2]. Тогда ток в цепи накачки в случае, если параметрический преобразователь подключен к генератору с напряжением $U(t) = U_m \cos \omega t$, определяется следующим образом:

$$i_H(t) = \frac{\alpha l}{W} \times sh \left(\frac{\beta U_m}{2SW\omega} \sin(\omega t) \right).$$

В работах [1, 2] было показано, что изменение индуктивности одного сердечника резонансного контура будет иметь вид:

$$L(t) = \frac{L_0}{ch(b \sin(\omega t))},$$

где $L_0 = \frac{SW^2}{\alpha \beta l}$ – индуктивность резонансного контура при $i(t)=0$; $b = \frac{\beta U_m}{2SW\omega}$ – приведен-

ная амплитуда тока накачки; W – число витков обмотки накачки; S, l – площадь поперечного сечения и длина средней линии сердечника; ω – круговая частота напряжения накачки.

На практике большой интерес представляет НПС индуктивного типа, в которой затухание очень мало, т.е. сопротивление активных потерь значительно меньше реактивных сопротивлений: ($R \ll X_L, R \ll X_C$).

Предположим, что $R = 0$ (потери в системе отсутствуют). В этом случае:

$$\delta(t) = \frac{L'(t)}{L(t)}; \quad e^{-\int \delta(t) dt} = \frac{1}{L(t)}; \quad F^2(t) = \frac{1}{L(t)C} = \omega_0^2 \times ch(b \sin \omega t), \quad (3)$$

где $\omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C}$ представляет собой квадрат собственной частоты резонансного контура

НПС при отсутствии модуляции индуктивности.

Функция $F^2(t)$ имеет физический смысл квадрата круговой частоты собственных колебаний резонансного контура. В дальнейшем для решения уравнения (2) с учётом (3) используем следующее разложение:

$$ch(b \sin \omega t) = I_0(b) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(b) \times \cos(2k\omega t),$$

где $I_{2k}(b)$ – модифицированные функции Бесселя чётных порядков.

В случае $R = 0$ уравнение (2) имеет вид:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \omega_0^2 (I_0(b) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \times I_{2k}(b) \cos(2k\omega t)) U = 0.$$

Сделав замену переменной $\omega t = \tau$, получим уравнение Хилла в виде:

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \times \left(I_0(b) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(b) \cos(2k\tau) \right) U = 0. \quad (4)$$

Для решения уравнения (4) можно применить метод Уиттекера, согласно которому необходимо, чтобы ряд $\sum_{k=0}^{\infty} I_{2k}(b) < \infty$ сходилась [3].

Докажем сходимости этого ряда. Известно, что

$$I_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(z) = \cos(z),$$

где $I_n(z)$ – модифицированные функции Бесселя порядка n [4].

Прибавив в последней формуле к обеим частям $I_0(z)$, получим:

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(z) = \cos(z) + I_0(z).$$

Заменив в последнем выражении z на ix , а также используя известные формулы $I_n(ix) = i^n I_n(x)$ и $\cos(ix) = \cosh(x)$, окончательно получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_{2k}(x) = \frac{\cosh(x) + I_0(x)}{2}.$$

Таким образом, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} I_{2k}(b) < \infty$ сходится.

Применим метод Уиттекера для решения уравнения (4). В случае малости коэффициентов при сомножителе $\cos(2k\tau)$ можно получить достаточно хорошее приближение, используя три центральных строки и три центральных столбца определителя Хилла бесконечного порядка [3].

Для уравнения Хилла $\frac{d^2 U}{d\tau^2} + F^2(\tau) \times U = 0$ чаще всего рассматриваются два случая, в одном из которых функция $F^2(\tau)$ имеет вид:

$$F^2(\tau) = \theta_0 + 2\theta_1 \cos(2\tau) + 2\theta_2 \cos(4\tau) + \dots, \quad (5)$$

где коэффициенты θ_n – заданные постоянные, и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ абсолютно сходится.

Положив $\theta_{-n} = \theta_n$, ищем решение уравнения Хилла в виде:

$$U = e^{\mu\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2ni\tau},$$

где μ – характеристический показатель.

Для определения амплитуды a_n имеем систему уравнений:

$$(\mu + 2ni)^2 a_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m a_{n-m} = 0 \quad (n = \dots, -1, 0, 1, \dots). \quad (6)$$

Для определения μ составляется определитель Хилла $\Delta(i\mu)$. Известно [5], что корни определителя Хилла являются корнями уравнения:

$$\sin^2 \left(\frac{\pi i \mu}{2} \right) = \Delta(0) \sin^2 \left(\frac{\pi \sqrt{\theta^2}}{2} \right), \quad (7)$$

поэтому необходимо найти $\Delta(0)$, а затем из (7) найти μ .

Для количественного анализа решения уравнения Хилла ограничимся только коэффициентами $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, так как при большом количестве коэффициентов θ_m решение становится неоправданно громоздким при незначительном возрастании точности. Отбрасывание остатка ряда (5) при вычислениях производится исходя из условия $\theta_m \gg \theta_{m+1}$ ($m \geq 1$).

Рассмотрим случаи, когда приведённая амплитуда тока накачки принимает следующие значения: $b = 1; 1,6; 2,2$; при $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{2}$.

В случае $b = 1, \omega = 2\omega_0$ находим следующие значения: $\Delta(0) = 1,002; \mu = -0,563i$. Подставив найденное значение μ в (6) и положив $\theta_{-1} = \theta_1$, получим:

$$-4 \times (n - 0,282)^2 \times a_n + \theta_1 \times (a_{n+1} + a_{n-1}) + \theta_0 \times a_n = 0.$$

Приняв значения n равными 0, 1, -1, получим однородную систему из трёх уравнений с пятью неизвестными. Положим $a_2 = a_{-2} = 0$. Тогда получим однородную систему трех уравнений с тремя неизвестными, в которой свободной переменной будет a_0 . Решив эту систему, получим:

$$a_{-1} = -0,005 a_0, \quad a_1 = -0,019 a_0.$$

Таким образом, величину амплитуды колебаний определить нельзя. Это подтверждает тот факт, что теория линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами не может дать ответа на вопросы о величине стационарной амплитуды, процессе ее установления и т.д. [1, 2, 6].

Положим $a_0 = -1$. Тогда: $a_{-1} = 0,005, a_1 = 0,019$. Подставив значения a_0, a_1, a_{-1} и взяв мнимую часть, находим искомую функцию $U(\tau)$:

$$U(\tau) = \sin(0,563\tau) + 0,019 \times \sin(1,437\tau) - 0,005 \times \sin(2,563\tau).$$

Ток $i(\tau)$ равен:

$$i(\tau) = U(\tau) \times \frac{ch(b \sin \tau)}{L_0}. \quad (8)$$

С учетом (8) окончательно получаем выражения для тока $i(\tau)$ во всех случаях.

При $b = 1$ и $\omega = 2\omega_0$ получим:

$$i(\tau) = \frac{1}{L_0} (1,269 \sin(0,563\tau) + 0,161 \times \sin(1,437\tau) - 0,143 \times \sin(2,563\tau) - 0,005 \times \sin(3,437\tau) + 0,003 \times \sin(4,563\tau)).$$

При $b = 1,6$ и $\omega = 2\omega_0$:

$$i(\tau) = \frac{1}{L_0} (1,78 \sin(0,67\tau) + 0,52 \times \sin(1,33\tau) - \\ - 0,39 \times \sin(2,67\tau) - 0,05 \times \sin(3,33\tau) + 0,02 \times \sin(4,67\tau)).$$

При $b = 2,2$ и $\omega = 2\omega_0$:

$$i(\tau) = \frac{1}{L_0} (2,97 \times \sin(0,87\tau) + 1,81 \times \sin(1,13\tau) - \sin(2,87\tau) - \\ - 0,39 \times \sin(3,13\tau) + 0,1 \times \sin(4,87\tau) + 0,03 \times \sin(5,13\tau)).$$

На рис.1 приведены в нормированных единицах графики функций $i=i(\tau)$ для значений $b=1, 1,6$ и $2,2$. Из графиков видно, что в областях устойчивого решения уравнения Хилла установившиеся параметрические колебания существовать не могут. В этих областях наблюдаются случайные колебания с постоянно изменяющейся амплитудой и фазой, т.е., как говорят, в этих областях нелинейный резонатор НПС индуктивного типа «шумит».

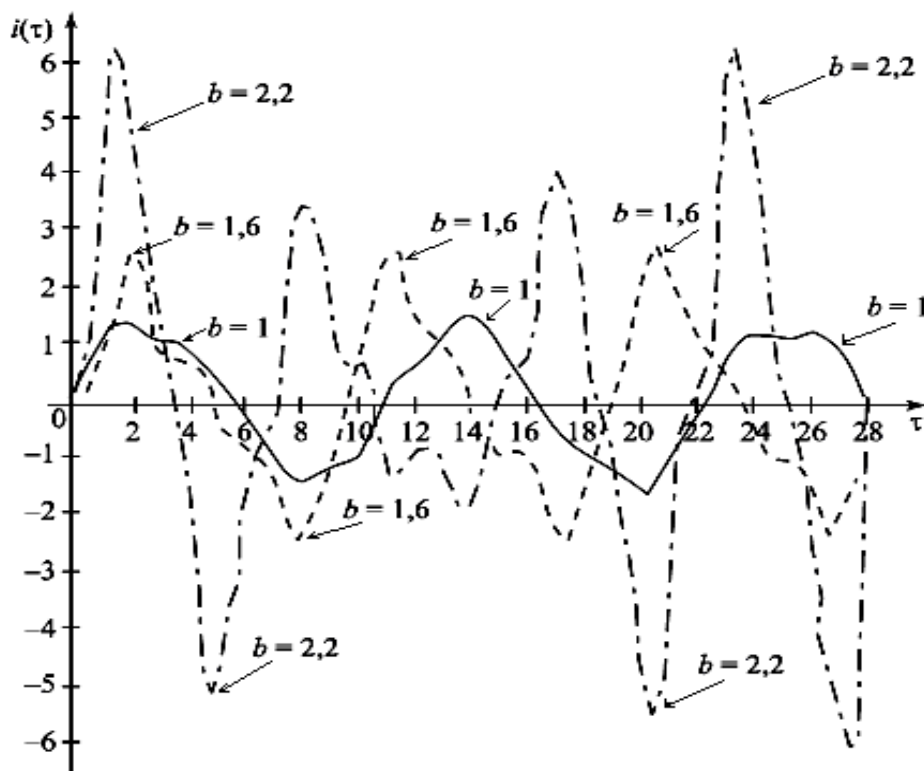


Рис.1. Кривые, описывающие механизм усиления тока в резонансном контуре при увеличении приведенной амплитуды тока накачки b . Обозначения на рис.: $b=1$ – сплошная линия; $b=1,6$ – пунктирная линия; $b=2,2$ – штрихпунктирная линия

В работах [1, 2] был рассмотрен случай питания нелинейно-параметрического преобразователя индуктивного типа от генератора напряжения. Аналогично производится расчет и в случае питания от генератора тока. Рассмотрим случай, когда генератор имеет синусоидальную форму тока:

$$i_i(t) = I_m \sin(\omega t). \quad (9)$$

Динамическая индуктивность контура описывается выражением [1, 2, 7]:

$$L(t) = \frac{2SW^2}{\beta\sqrt{i_H^2 W^2 + \alpha^2 l^2}}, \quad \mu(H) = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{H^2}{\alpha^2}}}. \quad (10)$$

Подставив выражение (9) в формулу (10) и сделав преобразования, получим выражение для динамической индуктивности:

$$L(t) = \frac{2L_0}{\sqrt{\frac{W^2 I_m^2}{l^2 \alpha^2} \sin^2(\omega t) + 1}}, \quad (11)$$

где $L_0 = \frac{SW^2}{\alpha \beta l}$.

Обозначим $\frac{W^2 I_m^2}{l^2 \alpha^2} = 2m^2$. Применив соотношение $2 \sin^2(\omega t) = 1 - \cos(2\omega t)$ и сделав несложные преобразования, получим:

$$L(t) = \frac{\tilde{L}_0}{\sqrt{1 - \frac{m^2 \cos(2\omega t)}{1 + m^2}}}, \quad (12)$$

где $\tilde{L}_0 = \frac{2L_0}{\sqrt{1 + m^2}}$.

В случае $R=0$ (для системы без потерь) для квадрата круговой частоты собственных колебаний резонансного контура $F^2(t)$ выше была получена формула (3). Тогда с учётом выражения (12):

$$F^2(t) = \frac{1}{2} \omega_0^2 \sqrt{1 + m^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2}{1 + m^2} \cos(2\omega t)}.$$

Отсюда, в случае питания параметрического преобразователя от генератора тока, уравнение (4) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \sqrt{1 + m^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2 \cos(2\tau)}{1 + m^2}} \times U = 0.$$

Воспользуемся известной формулой биномиального ряда:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Применив эту формулу и подставив значение для переменной x

$$x = -\frac{m^2 \cos(2\tau)}{1 + m^2},$$

получим следующее уравнение для определения напряжения U :

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \sqrt{1 + m^2} \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \cos(2\tau)}{1 + m^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{m^2 \cos(2\tau)}{1 + m^2} \right)^2 - \dots \right] \times U = 0. \quad (13)$$

В уравнении (13) ряд, представленный в квадратных скобках, сходится для любых значений m и τ , так как $\left| \frac{m^2 \cos(2\tau)}{1 + m^2} \right| < 1$.

Рассмотрим решение уравнения (13) для значений: $\frac{\omega_0}{\omega} = 0,9$; $I_m = 103 \cdot 10^{-3} A$ (при $m=2,444$). После подстановки исходных данных получим:

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} + (1,0204 - 0,458 \cos(2\tau) - 0,046 \cos(4\tau) - \dots) \times U = 0.$$

Ограничимся для анализа следующим уравнением, в котором для $F^2(t)$ учтены только два слагаемых ряда, так как большее количество слагаемых приводит к громоздким вычислениям при незначительном увеличении точности:

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} + (1,0204 - 0,458 \cos(2\tau)) \times U = 0. \quad (14)$$

Найдем *неустойчивое решение* уравнения (14), соответствующее первой области неустойчивости, используя метод Уиттекера [3], согласно которому общее решение уравнения Матье

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (a - 2q \cos(2\tau)) \times y = 0$$

может быть записано в виде:

$$y = A_1 e^{\mu\tau} \times \Phi(\tau, \sigma) + A_2 e^{-\mu\tau} \times \Phi(\tau, -\sigma),$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные; μ – характеристический показатель; σ – параметр, принимающий для неустойчивых решений значения между 0 и $-\frac{\pi}{2}$.

Функция $\Phi(\tau, \sigma)$ имеет для первой области неустойчивости следующий вид:

$$\Phi(\tau, \sigma) = \sin(\tau - \sigma) + S_3 \sin(3\tau - \sigma) + C_3 \cos(3\tau - \sigma) + \dots,$$

где $S_3 = -\frac{1}{8}q + \frac{1}{64}q^2 \cos(2\tau) + \dots$, а $C_3 = \frac{3}{64}q^2 \sin(2\sigma) + \dots$.

Для определения σ имеем уравнение:

$$\frac{1}{4}q^2 \left(1 - \frac{11q^2}{64}\right) \cos^2(2\sigma) - q \left(1 - \frac{1}{64}q^2\right) \cos(2\sigma) + \frac{65}{1536}q^4 - \frac{3}{8}q^2 + 1 - a = 0. \quad (15)$$

Для уравнения (14) $q=0,229$. Из уравнения (15) находим, что $\sigma = -0,872$. Тогда для μ, S_3, C_3 получим следующие значения: $\mu=0,113$; $S_3 = -0,029$; $C_3 = -0,002$. Ограничимся точностью вычислений, равной 3×10^{-3} (считаем $C_3=0$), тогда:

$$\Phi(\tau, \sigma) = \sin(\tau + 0,872) - 0,029 \sin(3\tau + 0,872).$$

Отсюда находим функцию $y(\tau)$:

$$y(\tau) = A_1 e^{0,113\tau} [\sin(\tau + 0,872) - 0,029 \sin(3\tau + 0,872)] + A_2 e^{-0,113\tau} [\sin(\tau - 0,872) - 0,029 \sin(3\tau - 0,872)] \quad (16)$$

Считая, что $y(0) = 0$, из (16) получаем $A_1 = A_2$.

Постоянные $\frac{A_1}{L_0}, \frac{A_2}{L_0}$ имеют физический смысл амплитуды начальных колебаний в резонансном контуре НПС индуктивного типа. Для реальных систем, работающих в первой об-

ласти неустойчивости, можно принять $\frac{A_1}{L_0} = \frac{A_2}{L_0} = 10^{-3} A$. Тогда, учитывая, что $i(\tau) = \frac{y(\tau)}{L(\tau)}$, получаем:

$$i(\tau) = \frac{W(\tau)}{2L_0} \sqrt{1+m^2} \times \sqrt{1 - \frac{m^2 \cos(2\tau)}{1+m^2}}.$$

Взяв два слагаемых ряда (при $m = 2,444$), окончательно получим для тока $i(\tau)$:

$$i(\tau) = \frac{1,32}{L_0} \times \left\{ e^{0,113\tau} [\sin(\tau + 0,872) - 0,029 \sin(3\tau + 0,872)] + \right. \\ \left. + e^{-0,113\tau} [\sin(\tau - 0,872) - 0,029 \sin(3\tau - 0,872)] \right\} \times (1 - 0,428 \cos(2\tau)) \times 10^{-3}. \quad (17)$$

Полученное решение (17) не учитывает влияние собственного тока резонансного контура НПС на модуляцию индуктивности $L(t)$ этого же контура. Это не позволяет математически точно описать процессы установления колебаний в резонансном контуре системы после достижения ими некоторой величины, определяемой, в основном, нелинейностью параметрической системы.

Для устранения этой проблемы воспользуемся методом последовательных приближений, описанным в [8, 9], и с учетом влияния собственного тока резонансного контура параметрической системы на модуляцию его индуктивности, получим выражение для суммарной индуктивности:

$$L(\tau, i(\tau)) = \left(\frac{1}{\sqrt{[i_H \pm i(\tau)]^2 W^2 + \alpha^2 l^2}} \right) \times \frac{2SW^2}{\beta}.$$

Величина $2m^2$ с учетом первой гармоники (как имеющей наибольшую амплитуду по сравнению с высшими гармониками) будет иметь вид:

$$2m^2 = \frac{W^2}{l^2 \alpha^2} \left[I_m \pm \frac{dA_1(e^{\mu\tau} + e^{-\mu\tau})}{2L_0} \right]^2. \quad (18)$$

В последних полученных выражениях ток $i(\tau)$ может как суммироваться, так и вычитаться с током I_m . Это обусловлено схемными особенностями параметрических преобразователей индуктивного типа, у которых резонансная обмотка на одном сердечнике включена согласно с обмоткой накачки, а на другом встречно [1, 2, 10, 11]. Учитывая это, суммарная индуктивность $L(\tau, i(\tau))$ и величина $2m^2$ будут равны:

$$L(\tau, i(\tau)) = \frac{SW^2}{\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{[i_H + i(\tau)]^2 W^2 + l^2 \alpha^2}} + \frac{1}{\sqrt{[i_H - i(\tau)]^2 W^2 + l^2 \alpha^2}} \right); \quad (19) \\ 2m^2 = \frac{2W^2}{l^2 \alpha^2} \left(I_m^2 + \frac{d^2 A_1^2}{L_0^2} ch^2 \mu \tau \right).$$

Коэффициент d в (18) определяется в начале каждого периода из выражения $d = \sqrt{1 + [m(0)]^2}$, где $m(0)$ – величина m , вычисленная в точке, где $I_m = 0$. Такое вычисление коэффициента d вполне оправдано, так как этот коэффициент в течение полупериода изменения индуктивности изменяется медленно.

Вычисление $i(\tau)$ по выражению (17) с учётом влияния собственного тока резонансного контура системы производится до момента перехода решения уравнения (13) из области неустойчивости в область устойчивости. Дальнейшее вычисление $i(\tau)$ производится по устойчивому решению уравнения (13).

На рис.2 и рис.3 приведены расчетная и экспериментальная кривые нарастания и установления колебаний тока в резонансном контуре параметрического преобразователя индуктивного типа, имеющего следующие конструктивные характеристики: 30 витков в обмотках накачки и резонансных обмотках; сердечники К7 х 4 х 2 из феррита 1500 НМ и ёмкость конденсатора резонансного контура $C = 0,2$ мкФ.

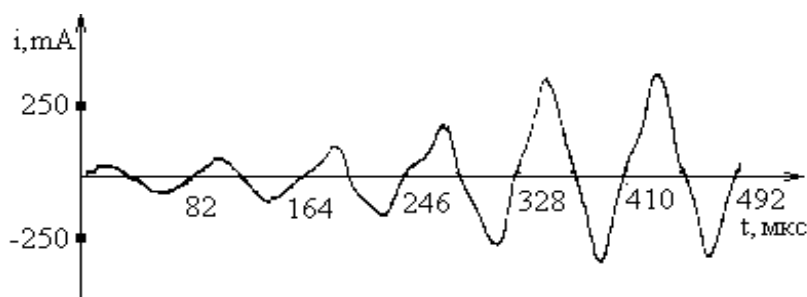


Рис. 2. Расчетная кривая нарастания тока в резонансном контуре

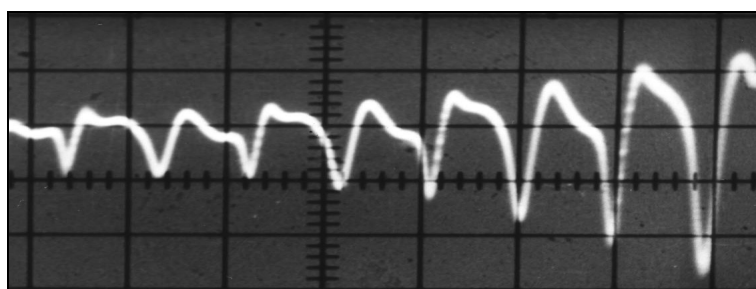


Рис. 3. Экспериментальная кривая нарастания тока в резонансном контуре

Установившееся значение тока резонансного контура для данного параметрического преобразователя рассчитывалось по выражению, являющемуся устойчивым решением уравнения (13) с учетом (19):

$$i(\tau) = \frac{I_0}{2L_0} (\sin(\tau) - 0,026\sin(3\tau)) \times (1 - 0,428\cos(2\tau)), \quad (20)$$

где I_0 – амплитудное значение тока собственных колебаний контура в момент перехода решения из области неустойчивости в область устойчивости.

Аналогично рассмотренному выводу выражения (17) при питании параметрического преобразователя от генератора тока для случая его питания от генератора напряжения такое решение имеет вид:

$$i(\tau) = \frac{1}{L_0} \left\{ e^{0,055\tau} [\sin(\tau + 0,898) - 0,014\sin(3\tau + 0,898)] + e^{-0,055\tau} [\sin(\tau - 0,898) - 0,014\sin(3\tau - 0,898)] \right\} \times (1,26 - 0,28\cos(2\tau)) \times 10^{-3}. \quad (21)$$

Выводы. Таким образом, при нахождении только устойчивого решения уравнения Матье–Хилла методом Уиттекера амплитуду колебаний в резонансном контуре НПС индуктивного типа определить не представляется возможным. Для её определения необходимо найти и учесть неустойчивое решение уравнения. Сопоставляя выражения (17) и (19) для тока при питании параметрического преобразователя от *генератора тока* и *генератора напряжения*, следует отметить, что ток в резонансном контуре нелинейно-параметрической зонной системы нарастает быстрее в случае её питания от генератора тока. Выражения (20) и (21) определяют решение нелинейного дифференциального уравнения Матье–Хилла с учётом установившегося значения собственного тока резонансного контура для изучаемого параметрического преобразователя.

Результаты работы представляют значительный теоретический и практический интерес для проектирования радиоэлектронных систем.

Библиографический список

1. Черкесова Л.В. Моделирование нелинейно-параметрических систем: моногр. / Л.В. Черкесова, О.И. Подгайко. – Новочеркасск, 2006. – 244 с.
2. Чередников П.И. Расчёт и проектирование параметрических систем на высших гармониках. / П.И. Чередников. – Харьков: ХПИ, 1980. – 98 с.
3. Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа. / Э.Т. Уиттекер, Д.Н. Ватсон. – М.: Физматгиз, 1963. – 460 с.
4. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. / И.М. Рыжик, И.С. Градштейн. – М.: Наука, 1971. – 108 с.
5. Мигулин В.В. Основы теории колебаний. / В.В. Мигулин. – М.: Наука, 1988. – 392 с.
6. Якубович А.А. Параметрический резонанс в линейных системах. / А.А. Якубович, В.М. Старжинский. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
7. Никитин Ю.П. Параметрическая линия с полигонально изменяющейся распределённой ёмкостью / Ю.П. Никитин, Г.А. Чумаков // Электронное моделирование. – 1992. – №1. – С.106–108.
8. Бабицкий В.И. Колебания в сильно нелинейных системах. / В.И. Бабицкий, В.П. Крупенин. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
9. Андронов А.А. Теория колебаний. / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
10. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. / О. Блэкьер. – М.: Мир, 1969. – 400 с.
11. Бессонов Л.А. Нелинейные электрические цепи. / Л.А. Бессонов. – М.: Высшая школа, 1977. – 346 с.

Материал поступил в редакцию 18.01.10.

L.V. CHERKESSOVA

**ANALYSIS OF MATIER-HILL NONLINEAR EQUATION SOLUTION
TAKING INTO ACCOUNT RESONANCE CONTOUR OWN CURRENT**

The analysis of Matier-Hill nonlinear differential equation solutions that describe nonlinear resonator functioning in the highest zones of oscillation instability on the highest harmonics is given. Stable and unstable solutions of this equation taking into account the resonance contour own current of the nonlinear parametric zone system influence on the modulation of its inductance are derived.

Key words: parametric transformer, parametric generator of inductive type, resonant contour, nonlinear resonator.

ЧЕРКЕСОВА Лариса Владимировна, доцент (2001) кафедры информатики Южно-Российского государственного технического университета, кандидат технических наук (1996). Окончила Харьковский институт радиоэлектроники имени академика М.К. Янгеля (1986).

Область научных интересов: радиоэлектроника, математическое моделирование радиосистем, синергетика, информационные технологии.

Имеет более 150 научных публикаций.

chia2002@inbox.ru