

ТОМ 25, №4, 2025

eISSN 2687-1653

РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

# Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)

Механика / Mechanics

Машиностроение  
и машиноведение /  
Machine Buiding  
and Machine Science

Информатика,  
вычислительная  
техника и управление /  
Information Technology,  
Computer Science  
and Management



[www.vestnik-donstu.ru](http://www.vestnik-donstu.ru)

DOI 10.23947/2687-1653



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)

Рецензируемый научно-практический журнал

eISSN 2687–1653

Издается с 2000 года

Периодичность – 4 выпуска в год

DOI: 10.23947/2687–1653

Учредитель и издатель — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ), г. Ростов-на-Дону

Создан в целях информирования читательской аудитории о новейших достижениях и перспективах в области механики, машиностроения, информатики и вычислительной техники. Издание является форумом для сотрудничества российских и иностранных ученых, способствует сближению российского и мирового научно-информационного пространства.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий (К2), в котором должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (Перечень ВАК) по следующим научным специальностям:

- 1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин (технические науки)
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (технические, физико-математические науки)
- 1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)
- 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)
- 2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (технические науки)
- 2.3.3 – Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами (технические науки)
- 2.3.5 – Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей (технические науки)
- 2.3.7 – Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования (технические, физико-математические науки)
- 2.3.8 – Информатика и информационные процессы (технические науки)
- 2.5.2 – Машиноведение (технические науки)
- 2.5.3 – Трение и износ в машинах (технические науки)
- 2.5.5 – Технология и оборудование механической и физико-технической обработки (технические науки)
- 2.5.6 – Технология машиностроения (технические науки)
- 2.5.8 – Сварка, родственные процессы и технологии (технические науки)
- 2.5.9 – Методы и приборы контроля и диагностики материалов, изделий, веществ и природной среды (технические науки)
- 2.5.10 – Гидравлические машины, вакуумная, компрессорная техника, гидро- и пневмосистемы (технические науки)

---

*Регистрация* Выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 78854 от 07 августа 2020 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

*Индексация и архивация* Scopus, RSCI, РИНЦ (ядро), CyberLeninka, CrossRef, Dimensions, DOAJ, EBSCO, Index Copernicus, Internet Archive, Google Scholar

*Сайт* <https://vestnik-donstu.ru>

*Адрес редакции* 344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

*E-mail* [vestnik@donstu.ru](mailto:vestnik@donstu.ru)

*Телефон* +7 (863) 2-738-372

*Дата выхода №4, 2025 в свет* 30.12.2025





# Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)

Peer-reviewed scientific and practical journal

eISSN 2687–1653

Published since 2000

Periodicity – 4 issues per year

DOI: 10.23947/2687–1653

**Founder and Publisher — Don State Technical University (DSTU), Rostov-on-Don, Russian Federation**

The journal is aimed at informing the readership about the latest achievements and prospects in the field of mechanics, mechanical engineering, computer science and computer technology. The publication is a forum for cooperation between Russian and foreign scientists, it contributes to the convergence of the Russian and world scientific and information space.

**The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific publications (Higher Attestation Commission under the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation), where basic scientific results of dissertations for the degrees of Doctor and Candidate of Science in scientific specialties and their respective branches of science should be published.**

**The journal publishes articles in the following fields of science:**

- Theoretical Mechanics, Dynamics of Machines (Engineering Sciences)
- Deformable Solid Mechanics (Engineering, Physical and Mathematical Sciences)
- Mechanics of Liquid, Gas and Plasma (Engineering Sciences)
- Mathematical Simulation, Numerical Methods and Program Systems (Engineering Sciences)
- System Analysis, Information Management and Processing, Statistics (Engineering Sciences)
- Automation and Control of Technological Processes and Productions (Engineering Sciences)
- Software and Mathematical Support of Machines, Complexes and Computer Networks (Engineering Sciences)
- Computer Modeling and Design Automation (Engineering, Physical and Mathematical Sciences)
- Computer Science and Information Processes (Engineering Sciences)
- Machine Science (Engineering Sciences)
- Machine Friction and Wear (Engineering Sciences)
- Technology and Equipment of Mechanical and Physicotechnical Processing (Engineering Sciences)
- Engineering Technology (Engineering Sciences)
- Welding, Allied Processes and Technologies (Engineering Sciences)
- Methods and Devices for Monitoring and Diagnostics of Materials, Products, Substances and the Natural Environment (Engineering Sciences)
- Hydraulic Machines, Vacuum, Compressor Equipment, Hydraulic and Pneumatic Systems (Engineering Sciences)

---

*Registration*

Extract from the Register of Registered Mass Media ЭЛ № ФС 77 – 78854 dated August 07, 2020, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media

*Indexing  
and Archiving*

Scopus, RSCI, RISC (core), CyberLeninka, CrossRef, Dimensions, DOAJ, EBSCO, Index Copernicus, Internet Archive, Google Scholar

*Website*

<https://vestnik-donstu.ru>

*Address  
of the Editorial Office*

1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation

*E-mail*

[vestnik@donstu.ru](mailto:vestnik@donstu.ru)

*Telephone*

+7 (863) 2-738-372

*Date of Publication  
No.4,2025*

30.12.2025



**Редакционная коллегия**

**Главный редактор**

**Бескопыльный Алексей Николаевич**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Заместитель главного редактора**

**Сухинов Александр Иванович**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Ответственный редактор**

**Комахидзе Манана Гивиевна**, кандидат химических наук, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Ответственный секретарь**

**Шевченко Надежда Анатольевна**, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Айзикович Сергей Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Антибас Имад Ризакалла**, кандидат технических наук, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Ахилан Аппатурай**, младший научный сотрудник, Инженерно-технологический колледж PSN, Университет Анны Ченнаи (Индия)

**Ахвердиев Камил Самед Оглы**, доктор технических наук, профессор, Ростовский государственный университет путей сообщения (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Варавка Валерий Николаевич**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Вернер Игорь Михайлович**, доктор технических наук, профессор, Технологический институт в Израиле (Израиль)

**Воронов Сергей Александрович**, доктор технических наук, доцент, Российский фонд фундаментальных исследований (Москва, Российская Федерация)

**Галушкин Николай Ефимович**, доктор технических наук, профессор, Институт сферы обслуживания и предпринимательства, филиал ДГТУ (Шахты, Российская Федерация)

**Лару Гиллеспи**, доктор технических наук, профессор, Президент Общества машиностроителей (США)

**Аниш Губерт**, доктор наук, доцент, Варшавский технологический университет (Польша)

**Басмачи Гюльтекин**, доктор наук, профессор, Университет Бурдуря Мехмета Акифа Эрсоя (Турция)

**Дворников Олег Владимирович**, доктор технических наук, профессор, Белорусский государственный университет (Беларусь)

**Демехин Евгений Афанасьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Краснодарский филиал Финансового университета при Правительстве РФ (Краснодар, Российская Федерация)

**Хамид Абдулла Джалааб**, доктор наук (информатика и ИТ), университет Малайя (Малайзия)

**Егизаярин Карен Оникович**, доктор технических наук, профессор, Технологический университет Тампере (Финляндия)

**Еремеев Виктор Анатольевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Южный научный центр РАН (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Заковоротный Вилор Лаврентьевич**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Кавтарадзе Реваз Зурабович**, доктор технических наук, профессор, Институт механики машин им. Р. Двали (Грузия)

**Козубал Януш Виталис**, доктор технических наук, профессор, Вроцлавский технический университет (Польша)

**Хосе Карлос Куадрадо**, доктор наук (электротехника и компьютеры), Политехнический институт Порту (Португалия)

**Кудиш Илья Исidorович**, доктор физико-математических наук, Университет Кеттеринга (США)

**Кузнецов Геннадий Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, Томский политехнический университет (Томск, Российская Федерация)

**Курейчик Виктор Михайлович**, доктор технических наук, профессор, Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Лысак Владимир Ильич**, доктор технических наук, профессор, Волгоградский государственный технический университет (Волгоград, Российская Федерация)

**Марчук Владимир Иванович**, доктор технических наук, профессор, Институт сферы обслуживания и предпринимательства, филиал ДГТУ (Шахты, Российская Федерация)

**Владимир Младенович**, доктор технических наук, профессор, Крагуевацкий университет (Сербия)

**Мукутадзе Мурман Александрович**, доктор технических наук, доцент, Ростовский государственный университет путей сообщения (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Наседкин Андрей Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Натриашвили Тамаз Мамисевич**, академик, Институт механики машин им. Р. Двали (Грузия)

**Нгуен Донг Ань**, доктор физико-математических наук, профессор, Институт механики Академии наук и технологий Вьетнама (Вьетнам)

**Нгуен Суан Тьем**, доктор технических наук, Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куй Дона (Вьетнам)

**Паршин Сергей Георгиевич**, доктор технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет (Санкт-Петербург, Российская Федерация)

**Подмастерьев Константин Валентинович**, доктор технических наук, профессор, Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева (Орел, Российская Федерация)

**Поликов Роман Николаевич**, доктор технических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева (Орел, Российская Федерация)

**Попов Валентин Леонидович**, доктор физико-математических наук, профессор, Институт механики Берлинского технического университета (Германия)

**Прокопенко Николай Николаевич**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Рыбак Александр Тимофеевич**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Музафер Сарачевич**, доктор наук, профессор, Университет Нови-Пазара (Сербия)

**Саруханян Арестак Араманович**, доктор технических наук, профессор, Национальный университет архитектуры и строительства Армении (Армения)

**Сидоров Владимир Николаевич**, доктор технических наук, Российский университет транспорта (Москва, Российская Федерация)

**Соловьев Аркадий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова (Симферополь, Республика Крым)

**Сумбатян Межлум Альбертович**, доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Тамаркин Михаил Аркадьевич**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Мурат Тезер**, профессор, Ближневосточный университет (Турция)

**Бертрам Торстен**, доктор технических наук, профессор, Технический университет Дортмунда (Германия)

**Турдиалиев Умид Мухтаралиевич**, доктор технических наук, профессор, Андиканский машиностроительный институт (Узбекистан)

**Ахмет Уюмаз**, доктор технических наук, профессор, Университет Бурдуря Мехмета Акифа Эрсоя (Турция)

**Али Маджид Хасан Алвазли**, доктор наук (компьютерная инженерия), доцент, Университет Аль-Нахрэйн (Ирак)

**Цибулин Вячеслав Георгиевич**, доктор физико-математических наук, доцент, Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Чернышев Юрий Олегович**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Хучан Ляо**, профессор, научный сотрудник IAAM Старший член Школы бизнеса IEEE, Университет Сычуань (Китай)

**Языев Батыр Меретович**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

**Editorial Board**

**Editor-in-Chief**

**Alexey N. Beskopylny**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Deputy Chief Editor**

**Alexandr I. Sukhinov**, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Executive Editor**

**Manana G. Komakhidze**, Cand.Sci. (Chemistry), Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Executive Secretary**

**Nadezhda A. Shevchenko**, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Ahilan Appathurai**, National Junior Research Fellow, Anna University Chennai (India)

**Ahmet Uyumaz**, PhD (Eng.), Professor, Burdur Mehmet Akif Ersoy University (Turkey)

**Alexander T. Rybak**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Ali M. Hasan**, PhD (Computer Engineering), Al Nahrain University (Baghdad, Iraq)

**Andrey V. Nasedkin**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Southern Federal University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Arestak A. Sarukhanyan**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, National University of Architecture and Construction of Armenia (Armenia)

**Arkady N. Solovyev**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Crimean Engineering and Pedagogical University the name of Fevzi Yakubov (Simferopol, Republic of Crimea)

**Batyr M. Yazyev**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Bertram Torsten**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, TU Dortmund University (Germany)

**Evgenii A. Demekhin**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Financial University under the RF Government, Krasnodar branch (Krasnodar, Russian Federation)

**Geny V. Kuznetsov**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Tomsk Polytechnic University (Tomsk, Russian Federation)

**Gultekin Basmaci**, PhD (Eng.), Professor, Burdur Mehmet Akif Ersoy University (Turkey)

**Hamid A. Jalab**, PhD (Computer Science & IT), University of Malaya (Malaysia)

**Hubert Anysz**, PhD (Eng.), Assistant Professor, Warsaw University of Technology (Republic of Poland)

**Huchang Liao**, Professor, IAAM Fellow, IEEE Business School Senior Fellow, Sichuan University (China)

**Igor M. Verner**, PhD (Eng.), Professor, Technion — Israel Institute of Technology (Israel)

**Ilya I. Kudish**, PhD (Phys.-Math.), Kettering University (USA)

**Imad R. Antipas**, Cand.Sci. (Eng.), Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Janusz Witalis Kozubal**, Dr.Sci. (Eng.), Wroclaw Polytechnic University (Republic of Poland)

**José Carlos Quadrado**, PhD (Electrical Engineering and Computers), DSc Habil, Polytechnic Institute of Porto (Portugal)

**Kamil S. Akhverdiev**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Rostov State Transport University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Karen O. Egiazaryan**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Tampere University of Technology (Finland)

**Konstantin V. Podmaster'ev**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Orel State University named after I.S. Turgenev (Orel, Russian Federation)

**LaRoux K. Gillespie**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, President-Elect of the Society of Manufacturing Engineers (USA)

**Mezhlum A. Sumbatyan**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Southern Federal University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Mikhail A. Tamarkin**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Murat Tezer**, Professor, Near East University (Turkey)

**Murman A. Mukutadze**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Rostov State Transport University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Muzafer H. Saračević**, Full Professor, Novi Pazar International University (Serbia)

**Nguyen Dong Ahn**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Academy of Sciences and Technologies of Vietnam (Vietnam)

**Nguyen Xuan Chiem**, Dr.Sci. (Eng.), Le Quy Don Technical University (Vietnam)

**Nikolay E. Galushkin**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Institute of Service and Business, DSTU branch (Shakhty, Russian Federation)

**Nikolay N. Prokopenko**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Oleg V. Dvornikov**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Belarusian State University (Belarus)

**Revaz Z. Kavtaradze**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Raphiel Dvali Institute of Machine Mechanics (Georgia)

**Roman N. Polyakov**, Dr.Sci. (Eng.), Associate Professor, Orel State University named after I.S. Turgenev (Orel, Russian Federation)

**Sergei A. Voronov**, Dr.Sci. (Eng.), Associate Professor, Russian Foundation of Fundamental Research (Moscow, Russian Federation)

**Sergey G. Parshin**, Dr.Sci. (Eng.), Associate Professor, St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russian Federation)

**Sergey M. Aizikovich**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Tamaz M. Natriashvili**, Academician, Raphiel Dvali Institute of Machine Mechanics (Georgia)

**Umid M. Turdaliev**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Andijan Machine-Building Institute (Uzbekistan)

**Valentin L. Popov**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Berlin University of Technology (Germany)

**Valery N. Varavka**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Victor A. Eremeev**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Southern Scientific Center of RAS (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Victor M. Kureychik**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Southern Federal University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Vilor L. Zakovorotny**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Vladimir I. Lysak**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Volgograd State Technical University (Volgograd, Russian Federation)

**Vladimir I. Marchuk**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Institute of Service and Business, DSTU branch (Shakhty, Russian Federation)

**Vladimir M. Mladenovic**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, University of Kragujevac (Serbia)

**Vladimir N. Sidorov**, Dr.Sci. (Eng.), Russian University of Transport (Moscow, Russian Federation)

**Vyacheslav G. Tsypulin**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Southern Federal University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

**Yuri O. Chernyshev**, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

## Содержание

### МЕХАНИКА

Точная и приближенная матрица жесткости и вектор узловых нагрузок балочного конечного элемента с линейным законом изменения жесткости по длине ..... <i>Н.Ю. Цыбин</i>	275
Итерационная модель упругого деформирования конгломерата частиц с учетом сжимаемости среды в процессе прессования ..... <i>И.К. Андрианов, С.Н. Иванов, Е.К. Чепурнова</i>	290
Исследование фактического значения времени вакуумирования мерной емкости эжектором ... <i>С.И. Савчук, Э.Д. Умеров</i>	300
Оптический метод идентификации несовершенств материала в заготовке резонатора волнового твердотельного гироскопа ..... <i>С.А. Шевченко, И.А. Попов, Б.Е. Мельников</i>	311
Анализ диссиpации энергии деформирования в дорожных одеждах с укрепленными слоями .... <i>А.Н. Тиратурян</i>	324

### ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

Наблюдательно-адаптивное управление скользящим режимом с конечным временем сходимости на основе усиленного супер-скручающего алгоритма для роботизированных манипуляторов..... <i>Хоанг Дык Лонг</i>	337
Сравнительный анализ нейросетевой и машинной моделей для краткосрочного прогнозирования транспортного потока на скоростной автомагистрали Мэйгуан Шэнъчжэня.. <i>И.В. Топилин, М. Хань, А.А. Феофилова, Н.А. Бескопыльный</i>	350
Идентификация функции активности пользователей социальной сети в линейной диффузионной модели ..... <i>М.А. Толстых, В.К. Толстых</i>	363
Концепция многоуровневой сетевой инфраструктуры мониторинга агропромышленных объектов на основе беспроводных сенсорных сетей ..... <i>В.В. Самойленко</i>	371

## Contents

### MECHANICS

Exact and Approximate Stiffness Matrix and Nodal Load Vector for a Beam Finite Element with Linearly Varying Stiffness along Its Length .....	275
<i>Nikita Yu. Tsybin</i>	
Iterative Model of Elastic Deformation of a Particle Conglomerate Taking into Account the Compressibility of the Medium during Pressing .....	290
<i>Ivan K. Andrianov, Sergey N. Ivanov, Elena K. Chepurnova</i>	
Investigation of the Actual Value of the Vacuum Time of a Measuring Vessel by Ejector .....	300
<i>Sergey I. Savchuk, Ervin D. Umerov</i>	
Optical Method for Material Imperfections Identification in the Resonator Workpiece of Hemispherical Vibratory Gyroscope .....	311
<i>Sergei A. Shevchenko, Ivan A. Popov, Boris E. Melnikov</i>	
Analysis of Deformation Energy Dissipation in Reinforced-Layer Pavement .....	324
<i>Artem N. Tiraturyan</i>	

### INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT

Observer-Based Finite-Time Adaptive Reinforced Super-Twisting Sliding Mode Control for Robotic Manipulators .....	337
<i>Hoang Duc Long</i>	
Comparative Analysis of Neural Network and Machine Learning Models for Short-Term Traffic Flow Prediction on Shenzhen Expressway .....	350
<i>Ivan V. Topilin, Mengyi Han, Anastasia A. Feofilova, Nikita A. Beskopylny</i>	
Identification of the Activity Function of Social Network Users in a Linear Diffusion Model .....	363
<i>Margarita A. Tolstykh, Victor K. Tolstykh</i>	
Concept of a Multilevel Network Infrastructure for Monitoring Agricultural Facilities Based on Wireless Sensor Networks .....	371
<i>Vladimir V. Samoylenko</i>	

# МЕХАНИКА MECHANICS



УДК 539.3; 624.072.2; 519.624.3

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2206>

Оригинальное теоретическое исследование

## Точная и приближенная матрица жесткости и вектор узловых нагрузок балочного конечного элемента с линейным законом изменения жесткости по длине



EDN: VHVNIF

Н.Ю. Цыбин

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,  
г. Москва, Российская Федерация

[science@nikitatsybin.ru](mailto:science@nikitatsybin.ru)

### Аннотация

**Введение.** Современные тенденции в строительстве, связанные с оптимизацией массы и материалов, требуют точных методов расчёта напряжённо-деформированного состояния, в частности для балок переменной жёсткости. Аналитический расчёт напряжённо-деформированного состояния таких балок сопряжён со значительными трудностями, что ограничивает его практическое применение. Для решения подобных задач широко используются численные методы, в частности метод конечных элементов (МКЭ), при этом закон изменения жёсткости обычно аппроксимируется ступенчатой (дискретной) функцией. Цель настоящей работы — разработать подход на основе кусочно-линейной аппроксимации жёсткости. Линейная аппроксимация жёсткости обеспечивает оптимальное соотношение точности, сложности и вычислительных ресурсов. Предлагаемый подход обеспечивает существенно более высокую точность по сравнению с традиционной дискретной аппроксимацией при сопоставимой вычислительной сложности — это позволяет адекватно моделировать как плавные градиенты жёсткости, так и резкие её изменения.

**Материалы и методы.** В первом приближении матрица жесткости одномерного балочного конечного элемента с линейно изменяющейся изгибной жесткостью получена на основе вариационной формулировки задачи. Точная матрица жесткости — методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изгиба балки. Точные решения в примерах расчета получены с применением программного комплекса Maple. Численное решение, с использованием метода конечных элементов, реализовано в разработанной автором программе на языке программирования Python.

**Результаты исследования.** В ходе исследования были получены приближенная и точная матрицы жесткости балочного конечного элемента, а также вектор узловых реакций (нагрузок) от распределенных нагрузок. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на примерах численного расчета. При этом результаты, полученные методом конечных элементов, верифицированы посредством аналитических вычислений. По итогам проведённых расчётов были выработаны рекомендации и критерии для использования точной или приближенной матрицы жесткости.

**Обсуждение.** Конечные элементы, учитывающие линейное изменение жесткости по длине, позволяют повысить точность получаемых результатов и снизить степень дискретизации расчетной схемы более чем в два раза. Приближенная матрица демонстрирует хорошую сходимость при плавном изменении жесткости по длине. В подобных случаях также допустимо применять дискретную аппроксимацию. Точная матрица позволяет с малой погрешностью рассчитывать ситуации, в которых жесткость в пределах балки изменяется на несколько порядков. Классическая дискретная аппроксимация в таких случаях не обеспечивает высокой точности результатов расчета.

**Заключение.** В данной работе были получены матрицы жесткости конечных элементов с учетом линейного изменения жесткости по длине. Их вывод осуществлен двумя методами: на основе вариационной постановки задачи и путём непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изгиба. Полученные матрицы позволяют выполнять более точный анализ напряжённо-деформированного состояния балок переменной жесткости. Они обладают аналитическим видом, что упрощает их внедрение в существующие программные комплексы. Дальнейшие исследования будут направлены на применение этих матриц к расчёту железобетонных балок с учётом физической нелинейности, а также на решение задач устойчивости и динамики балок переменной жесткости.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, матрица жесткости, балочный элемент, переменная жесткость

**Благодарность.** Автор выражает благодарность редакции и рецензентам за внимательное отношение к статье и указанные замечания, которые позволили повысить ее качество.

**Для цитирования.** Цыбин Н.Ю. Точная и приближенная матрица жесткости и вектор узловых нагрузок балочного конечного элемента с линейным законом изменения жесткости по длине. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):275–289. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2206>

Original Theoretical Research

## Exact and Approximate Stiffness Matrix and Nodal Load Vector for a Beam Finite Element with Linearly Varying Stiffness along Its Length

Nikita Yu. Tsybin 

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ [science@nikitatsybin.ru](mailto:science@nikitatsybin.ru)

### Abstract

**Introduction.** Modern trends in construction, related to the optimization of weight and materials, require accurate methods for calculating the stress-strain state, particularly of beams with variable stiffness. Analytical calculation of the stress-strain state for such beams is fraught with considerable difficulties, limiting its practical application. Numerical methods, specifically the Finite Element Method (FEM), are widely used to solve these problems, where the law of stiffness change is typically approximated by a piecewise (discrete) function. This study is aimed at the development of an approach based on piecewise-linear approximation of stiffness. Linear stiffness approximation suggests an optimal balance of accuracy and computational resources. This approach provides significantly higher accuracy compared to the traditional discrete approximation with similar computational complexity, allowing for adequate modeling of both smooth stiffness gradients and its violent changes.

**Materials and Methods.** A first-approximation stiffness matrix for a one-dimensional beam finite element with linearly varying flexural stiffness was derived on the basis of a variational formulation of the problem. An exact stiffness matrix was obtained by direct integration of the differential equation for beam bending. In the calculation examples, an exact solution was obtained using the Maple software package. The numerical solution using FEM was implemented in the author's program written in Python.

**Results.** During the study, approximate and exact stiffness matrices of the beam finite element were obtained, as well as the vector of nodal reactions (loads) from distributed loads. The efficiency of the proposed approach was demonstrated by numerical examples. The results obtained by the FEM were verified using analytical calculations. Based on the performed calculations, recommendations and criteria for using the exact or approximate stiffness matrix were developed.

**Discussion.** Finite elements that account for linear change of stiffness along the length make it possible to increase the accuracy of the results and reduce the degree of discretization of the computational scheme by more than two times. The approximate matrix shows good convergence with a smooth change in stiffness along the length. In such cases, discrete approximation is also acceptable. The exact matrix allows for calculating cases where the stiffness within the beam changes by orders of magnitude with low error. The classical discrete approximation in this case does not ensure high accuracy of the calculation results.

**Conclusion.** The paper presents stiffness matrices for finite elements that account for linear change of stiffness along the length. Their derivation is performed by two methods: on the basis of a variational formulation of the problem, and by direct integration of the differential equation of bending. The resulting matrices enable more accurate stress-strain analysis of beams with variable stiffness. They have an analytical format that simplifies their integration into existing software systems. Further research will be directed towards applying the obtained matrices to the calculation of reinforced concrete beams, considering physical nonlinearity, as well as to solving problems of stability and dynamics of beams with variable stiffness.

**Keywords:** finite element method, stiffness matrix, beam element, variable stiffness

**Acknowledgements.** The author would like to thank the Editorial board and the reviewers for their attentive attitude to the article and for the specified comments that improved the quality of the article.

**For Citation.** Tsybin NYu. Exact and Approximate Stiffness Matrix and Nodal Load Vector for a Beam Finite Element with Linearly Varying Stiffness along Its Length. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):275–289. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2206>

**Введение.** В современной инженерной практике, особенно в контексте устойчивого развития и оптимизации ресурсов, активно применяются конструкции с переменной жёсткостью — например, балки переменного сечения [1]. Такие решения позволяют существенно снизить материалоёмкость и собственный вес конструкций, что прямо повышает их экономическую эффективность и экологичность за счёт сокращения расхода материалов [2]. Кроме того, математическая модель балки переменной жёсткости служит инструментом для качественного описания напряжённо-деформированного состояния железобетонных элементов, в которых изменение жёсткости происходит вследствие нелинейной работы материала [3, 4] и образования трещин [5, 6].

В статически неопределенных балках, широко распространённых в строительной механике, распределение внутренних усилий зависит от соотношения жёсткостей элементов. Пренебрежение переменным характером жёсткости может привести к значительным ошибкам при определении внутренних усилий и, как следствие, к неверному подбору сечений, что ставит под угрозу как надёжность, так и экономическую целесообразность проекта. На рис. 1 приведён наглядный пример — учёт переменной жёсткости в балке (рис. 1 *б*) привёл к кардинальному изменению эпюры изгибающих моментов по сравнению с расчётной моделью постоянной жёсткости (рис. 1 *а*).

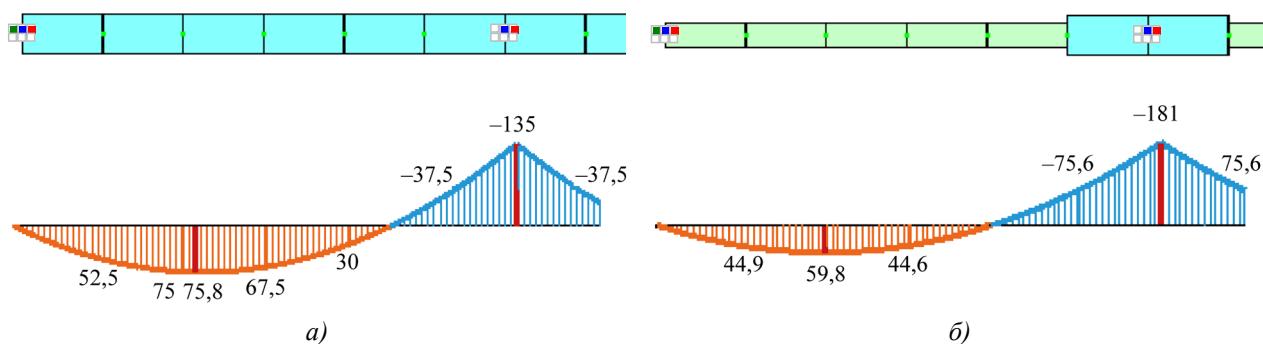


Рис. 1. Результаты расчета статически неопределенной балки:

*а* — фрагмент статически неопределенной балки постоянной жесткости и эпюра изгибающих моментов в ней;  
*б* — то же для балки переменной жесткости

Расчет балок переменного сечения традиционно осуществляется численными методами, в частности методом конечных элементов (МКЭ). Несмотря на существование аналитических решений [7], они часто представлены в виде сложных рядов [8] или специальных функций [9], что затрудняет их практическую реализацию в инженерном программном обеспечении. Кроме того, такие решения зачастую не обладают универсальностью для произвольных законов изменения жесткости и граничных условий [10, 11].

Напряженно-деформированное состояние балок переменного сечения изучается различными авторами уже давно. В рамках численного расчета с применением МКЭ можно отметить одни из первых работ [12, 13]. Наиболее распространённым подходом к учёту переменной жесткости является дискретная аппроксимация с использованием конечных элементов постоянной жесткости (рис. 1 *б*), значение которой принимается равным среднему на участке [14, 15]. Несмотря на простоту, такой подход не всегда обеспечивает требуемую точность расчетов.

Более точные результаты получаются при использовании линейной аппроксимации жесткости внутри конечного элемента. Такой подход применяется в рамках настоящей статьи. В то же время классические методы построения матриц жесткости для элементов с переменными параметрами [16], основанные на вариационных подходах [17] или аппроксимациях [18], могут не обеспечивать точного выполнения дифференциальных уравнений равновесия и граничных условий. Это приводит к погрешностям при существенном изменении жесткости по длине элемента или в предельных случаях — например, при моделировании зон с резким падением жесткости (образование трещин, пластического шарнира).

Таким образом, актуальность данного исследования обусловлена необходимостью разработки эффективного и более точного метода расчета балок переменной жесткости.

Цель настоящего исследования — получение и верификация матриц жесткости для конечного элемента балки с кусочно-линейным законом изменения жесткости.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. На основе вариационной постановки задачи и линейной аппроксимации жесткости внутри конечного элемента получить приближённую матрицу жесткости.
2. Путём аналитического решения дифференциального уравнения изгиба получить точную матрицу жесткости для конечного элемента балки с линейно изменяющейся жесткостью.
3. На серии тестовых примеров провести сравнительный анализ точности результатов расчёта с использованием предложенных матриц жесткости и классического подхода с дискретной аппроксимацией жесткости; точность определять путем сравнения с результатами аналитического решения.

## Материалы и методы

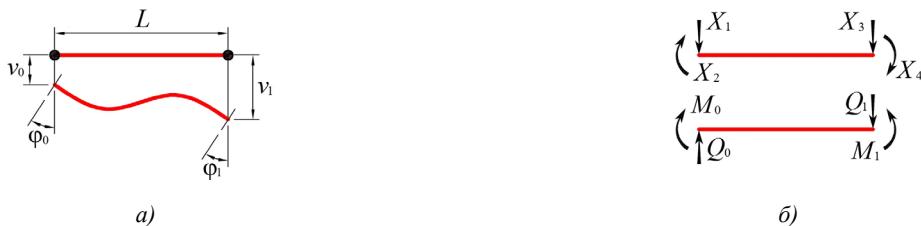
*Вариационный метод получения матрицы жесткости.* Вариационные методы [19] являются общепринятыми и наиболее универсальными способами получения матрицы жесткости конечного элемента. Точность полученной матрицы зависит от того, насколько корректно вводимая аппроксимация искомой функции отражает решение дифференциального уравнения.

Для рассматриваемой балки применяются классические гипотезы Эйлера-Бернулли. Изменение изгибной жесткости поперечного сечения  $D_z$  по длине конечного элемента принято в виде линейной функции:

$$D_z(x) = D_0 \left[ \psi_0 + \frac{x}{L} (\psi_1 - \psi_0) \right], \quad D_z(0) = \psi_0 D_0, \quad D_z(L) = \psi_1 D_0, \quad (1)$$

где  $D_0$  — начальная жесткость;  $L$  — длина конечного элемента;  $\psi_0$  и  $\psi_1$  — коэффициенты, учитывающие изменение начальной жесткости  $D_0$  в начале и конце элемента соответственно. При этом  $\psi_0 \geq 0$  и  $\psi_1 \geq 0$ .

Метод конечных элементов рассматривается в форме перемещений. В качестве неизвестных выступают прогиб и угол поворота сечения  $v_i$  и  $\varphi_i$  (рис. 2 а) в начале  $x = 0$  и конце  $x = L$  элемента.



Для аппроксимации функции перемещений  $v(x)$  приняты полиномы Эрмита [1, 4]:

$$v = v_0 N_1 + \varphi_0 N_2 + v_1 N_3 + \varphi_1 N_4, \quad (2)$$

где  $N_i$  — функции формы (полиномы Эрмита), записанные ниже:

$$N_1 = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1; \quad N_2 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x; \quad N_3 = -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2}; \quad N_4 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}. \quad (3)$$

Аппроксимация (2) соответствует следующим граничным условиям:

$$v(0) = v_0; \quad v'(0) = \varphi_0; \quad v(L) = v_1; \quad v'(L) = \varphi_1. \quad (4)$$

Штрихом в (4) обозначена производная функции  $v(x)$  по  $x$ .

Из формул (3) следует, что классические функции формы не учитывают закон распределения изгибной жесткости по длине элемента, что, в свою очередь, негативно сказывается на точности получаемых результатов расчета. Для повышения точности расчетов, при использовании вариационной постановки задачи, может быть применен метод двойной аппроксимации [20].

Изгибающий момент связан с кривизной соотношением:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_z}{D_z}. \quad (5)$$

Здесь  $D_z$  — изгибная жесткость поперечного сечения балки согласно (1).

С учетом (2) и (3):

$$-\frac{M_z}{D_z} = v_0 \left( \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) + \varphi_0 \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) + v_1 \left( -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \right) + \varphi_1 \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right). \quad (6)$$

Потенциальная энергия деформации изгиба определяется формулой:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L D_z \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (7)$$

С учетом (6) и (1) формула (7) примет вид:

$$U \cdot 2L^3 / D_0 = 6(\psi_0 + \psi_1)f_{11} + 4L(2\psi_0 + \psi_1)f_{12} - 12(\psi_0 + \psi_1)f_{13} + 4L(\psi_0 + 2\psi_1)f_{14} + \\ + L^2(3\psi_0 + \psi_1)f_{22} - 4L(2\psi_0 + \psi_1)f_{23} + 2L^2(\psi_0 + \psi_1)f_{24} + \\ + 6(\psi_0 + \psi_1)f_{33} - 4L(\psi_0 + 2\psi_1)f_{34} + L^2(\psi_0 + 3\psi_1)f_{44}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} f_{11} &= v_0 v_0; \quad f_{12} = v_0 \varphi_0; \quad f_{13} = v_0 v_1; \quad f_{14} = v_0 \varphi_1; \\ f_{22} &= \varphi_0 \varphi_0; \quad f_{23} = \varphi_0 v_1; \quad f_{24} = \varphi_0 \varphi_1; \quad f_{33} = v_1 v_1; \quad f_{34} = v_1 \varphi_1; \quad f_{44} = \varphi_1 \varphi_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Если ввести вектор неизвестных  $\bar{u} = [v_0, \varphi_0, v_1, \varphi_1]^T$ , то (8) можно переписать в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} \bar{u}^T \cdot [K] \cdot \bar{u}. \quad (10)$$

Здесь  $[K]$  — матрица жесткости элемента, определенная с учетом (8) и (9):

$$[K] = \frac{D_0}{L^3} \begin{bmatrix} 6(\psi_0 + \psi_1) & 2L(2\psi_0 + \psi_1) & -6(\psi_0 + \psi_1) & 2L(\psi_0 + 2\psi_1) \\ 2L(2\psi_0 + \psi_1) & L^2(3\psi_0 + \psi_1) & -2L(2\psi_0 + \psi_1) & L^2(\psi_0 + \psi_1) \\ -6(\psi_0 + \psi_1) & -2L(2\psi_0 + \psi_1) & 6(\psi_0 + \psi_1) & -2L(\psi_0 + 2\psi_1) \\ 2L(\psi_0 + 2\psi_1) & L^2(\psi_0 + \psi_1) & -2L(\psi_0 + 2\psi_1) & L^2(\psi_0 + 3\psi_1) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Случай  $\psi_0 = \psi_1 = 1$  соответствует классической матрице жесткости балки.

Положительные направления узловых нагрузок  $X_i$  и внутренних усилий приведены на рис. 2 б, из которого следует:

$$Q_0 = -X_1; \quad M_0 = X_2; \quad Q_1 = X_3; \quad M_1 = -X_4. \quad (12)$$

Вычислим работу внешних сил.

$$\begin{aligned} W &= X_1 v_0 + X_2 \varphi_0 + X_3 v_1 + X_4 \varphi_1 + \int_0^L (qv) dx = \\ &= \left( X_1 + \frac{qL}{2} \right) v_0 + \left( X_2 + \frac{qL^2}{12} \right) \varphi_0 + \left( X_3 + \frac{qL}{2} \right) v_1 + \left( X_4 - \frac{qL^2}{12} \right) \varphi_1. \end{aligned} \quad (13)$$

В матричной форме:

$$W = \bar{u}^T \cdot (\bar{F} + \bar{F}_q), \quad (14)$$

где  $\bar{F}$  — вектор сосредоточенных узловых нагрузок;  $\bar{F}_q$  — вектор узловых нагрузок от распределенных. Компоненты данных векторов имеют вид (15):

$$\bar{F} = [X_1, X_2, X_3, X_4]^T; \quad \bar{F}_q = [qL/2, qL^2/12, qL/2, -qL^2/12]^T. \quad (15)$$

Как видим, полученный в (15) вектор узловых усилий от распределенных нагрузок не учитывает изменение жесткости по длине. Это является недостатком вариационного подхода в контексте рассматриваемой задачи.

Полная энергия системы с учетом (10) и (14) определяется выражением:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \bar{u}^T \cdot [K] \cdot \bar{u} - \bar{u}^T \cdot (\bar{F} + \bar{F}_q). \quad (16)$$

Применяя принцип минимума потенциальной энергии, получим условие стационарности функционала (16):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left\{ \frac{1}{2} \bar{u}^T \cdot [K] \cdot \bar{u} - \bar{u}^T \cdot (\bar{F} + \bar{F}_q) \right\} = [K] \cdot \bar{u} - (\bar{F} + \bar{F}_q) = 0. \quad (17)$$

Из (17) следует основное уравнение метода конечных элементов:

$$[K] \cdot \bar{u} = \bar{F} + \bar{F}_q. \quad (18)$$

*Прямой метод получения матрицы жесткости.* Полученная матрица жесткости (11) обладает существенным недостатком. Если принять  $v_0 = \varphi_0 = 0$ , а также  $\psi_0 = 0$  и  $\psi_1 = 1$  (что соответствует нулевой жесткости на левом защемленном краю), момент на левом краю будет определяться формулой:

$$M_0 = X_2 = K_{2,1} v_0 + K_{2,2} \varphi_0 + K_{2,3} v_1 + K_{2,4} \varphi_1 = \frac{D_0}{L^2} (-2v_1 + \varphi_1 L). \quad (19)$$

Отметим, что в (19) рассматривается предельный случай — математическая идеализация, когда жесткость на опоре не просто мала, а асимптотически стремится к нулю. Таким образом, в соответствии с (19), момент на левом краю не обращается в ноль, что противоречит формуле (5). Причина заключается в неточной аппроксимации функции прогибов формулой (2). Чтобы устранить это несоответствие, была найдена точная матрица жесткости путем непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изгиба балки с учетом изменения жесткости по длине по формуле (1).

Аналогичный подход применяли и другие авторы. В работе [21] решение получено в форме степенных рядов, поэтому его нельзя считать замкнутым. В работе [22] методом непосредственного интегрирования получена матрица жесткости элемента со степенным законом изменения жесткости для задач устойчивости. В работе [23] рассматривался произвольный закон изменения жесткости по длине, однако для практического использования представленных результатов требуется выполнить интегрирование. Работы [24, 25] посвящены решению задач устойчивости. В этих работах закон изменения жесткости по длине задан в виде полинома второй и четвертой степени, при этом не приведён вектор узловых сил от распределённых нагрузок. Общим недостатком работ, учитывающих полиномы второй и более высокого порядков в функции изменения жесткости по длине, является сложность вычисления матрицы жесткости. Так, например, для получения коэффициентов матрицы жесткости согласно [26] необходимо вычислять выражения вида  $\sin [\varepsilon \ln(\lambda)]$  (сохранены исходные обозначения), что затрудняет анализ предельных случаев и внедрение решений в коммерческие программные комплексы.

Для получения точной матрицы жесткости рассматривается известное из курса сопротивления материалов дифференциальное уравнение плоского поперечного изгиба балки с переменной жесткостью:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( D_x \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = q. \quad (20)$$

Учитывая вид (1), общее решение однородного уравнения (20) будет содержать логарифм. Исключим размерные величины под знаком логарифма путем замены переменной по формуле:

$$x = \rho L, \quad 0 \geq \rho \geq 1. \quad (21)$$

Учитывая (21):

$$\varphi = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{L} \frac{dv}{d\rho}. \quad (22)$$

В результате общее решение уравнения (20) примет вид [27]:

$$v(\rho) = C_1 + C_2 (\rho - \alpha)^2 + C_3 (\rho - \alpha) + C_4 (\rho - \alpha) \ln |\rho - \alpha| + v^*, \quad (23)$$

где  $\alpha = \psi_0 / (\psi_0 - \psi_1)$ ;  $v^*$  — частное решение неоднородного уравнения. Ввиду громоздкости частное решение не приведено.

Решение (23) справедливо для случаев  $\psi_0 \neq \psi_1$ ,  $\rho \neq \alpha$ , так как эти случаи порождают неопределенности, которые будут раскрыты предельным переходом в формулах (31), (32) и (33).

Неизвестные константы интегрирования определяются из граничных условий:

$$v(0) = v_0; \quad v'(0) = \varphi_0 L; \quad v(1) = v_1; \quad v'(1) = \varphi_1 L. \quad (24)$$

В (24) штрихом обозначена производная по  $\rho$ . Множитель  $L$  у углов поворота в граничных условия (24) присутствует из-за введенной замены переменной (21), что отражено в (22). После определения констант интегрирования из (24), момент и поперечная сила в балке, с учетом введенной замены переменных, вычисляются по формулам:

$$M = -\frac{D_0 [\psi_0 + \rho(\psi_1 - \psi_0)]}{L^2} \frac{d^2 v(\rho)}{d\rho^2}; \quad Q = -\frac{1}{L^3} \frac{d}{d\rho} \left( D_0 [\psi_0 + \rho(\psi_1 - \psi_0)] \frac{d^2 v(\rho)}{d\rho^2} \right). \quad (25)$$

Коэффициенты матрицы жесткости с учетом (25) и (12) могут быть найдены из выражений:

$$\begin{aligned} X_1 &= -Q(0) = k_{11}v_0 + k_{12}\varphi_0 + k_{13}v_1 + k_{14}\varphi_1 - F_{q,1}; \\ X_2 &= M(0) = k_{21}v_0 + k_{22}\varphi_0 + k_{23}v_1 + k_{24}\varphi_1 - F_{q,2}; \\ X_3 &= Q(1) = k_{31}v_0 + k_{32}\varphi_0 + k_{33}v_1 + k_{34}\varphi_1 - F_{q,3}; \\ X_4 &= -M(1) = k_{41}v_0 + k_{42}\varphi_0 + k_{43}v_1 + k_{44}\varphi_1 - F_{q,4}. \end{aligned} \quad (26)$$

Матричная форма (26) эквивалентна полученной ранее (18). Матрица жесткости в рассматриваемом случае примет вид:

$$[K] = \frac{D_0}{\beta L^3} \begin{bmatrix} 2\xi^2\lambda & 2L\xi\omega_0 & -2\xi^2\lambda & -2L\xi\omega_1 \\ 2L\xi\omega_0 & L^2(2\psi_0\omega_0 - \xi^2) & -2L\xi\omega_0 & -L^2(2\psi_0\omega_1 + \xi^2) \\ -2\xi^2\lambda & -2L\xi\omega_0 & 2\xi^2\lambda & 2L\xi\omega_1 \\ -2L\xi\omega_1 & -L^2(2\psi_0\omega_1 + \xi^2) & 2L\xi\omega_1 & L^2(2\psi_1\omega_1 + \xi^2) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

В (27) для компактности введены следующие обозначения:

$$\lambda = \ln(\psi_0 / \psi_1); \quad \xi = \psi_0 - \psi_1; \quad \beta = \lambda(\psi_0 + \psi_1) - 2\xi; \quad \omega_0 = \psi_0\lambda - \xi; \quad \omega_1 = \psi_1\lambda - \xi. \quad (28)$$

Для реализации предлагаемой матрицы жесткости в программном обеспечении критически важно иметь возможность преобразования распределенных нагрузок в вектор узловых сил. Ниже записаны точные выражения вектора  $\bar{F}_q$ .

$$\bar{F}_q = \begin{bmatrix} \frac{qL[2\lambda(2\psi_0^2 + 2\psi_0\psi_1 - \psi_1^2) - 3\xi(3\psi_0 - \psi_1)]}{6\beta\xi} \\ \frac{qL^2[2\lambda\psi_0(\psi_0 + 2\psi_1) - \xi(5\psi_0 + \psi_1)]}{12\beta\xi} \\ \frac{qL[2\lambda(\psi_0^2 - 2\psi_0\psi_1 - 2\psi_1^2) - 3\xi(\psi_0 - 3\psi_1)]}{6\beta\xi} \\ \frac{qL^2[2\lambda\psi_1(2\psi_0 + \psi_1) - \xi(\psi_0 + 5\psi_1)]}{12\beta\xi} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Основным достоинством полученных матрицы (27) и вектора (29) является простота реализации, а также отсутствие в вычислениях рядов и специальных функций.

При решении некоторых задач коэффициенты жесткости сечения  $\psi_0$  и  $\psi_1$  удобнее связывать с кривизной. В этом случае необходимо знать, каким образом кривизна связана с перемещениями и углами поворота узлов элемента. Для этого можно воспользоваться формулой (5). Зная, каким образом момент выражается в начале и конце элемента согласно формулам (26), получим:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2\nu}{dx^2} \Big|_{x=0} = -\frac{M(0)}{D_z(0)} = -\frac{1}{D_0\psi_0}(k_{21}\nu_0 + k_{22}\varphi_0 + k_{23}\nu_1 + k_{24}\varphi_1 - F_{q,2}); \\ \frac{d^2\nu}{dx^2} \Big|_{x=L} = -\frac{M(\rho=1)}{D_z(x=L)} = \frac{1}{D_0\psi_1}(k_{41}\nu_0 + k_{42}\varphi_0 + k_{43}\nu_1 + k_{44}\varphi_1 - F_{q,4}). \end{array} \right\} \quad (30)$$

Случай  $\psi_0 = 0$ ,  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_0 = \psi_1 = \psi$  порождают неопределенности различного вида в матрице (27) и векторе (29). Раскроем их.

Случай  $\psi_0 = 0$ .

$$[K] = \frac{2D_0\psi_1}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -L \\ L & 0 & -L & L^2 \end{bmatrix}; \quad \bar{F}_q = \begin{bmatrix} qL/3 \\ 0 \\ 2qL/3 \\ -qL^2/6 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Случай  $\psi_1 = 0$ .

$$[K] = \frac{2D_0\psi_0}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 & 0 \\ L & L^2 & -L & 0 \\ -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{F}_q = \begin{bmatrix} 2qL/3 \\ qL^2/6 \\ qL/3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Из (31) и (32) видно, что столбцы и строки матрицы жесткости, а также компоненты вектора узловых сил от распределенных нагрузок, связанные с изгибающими моментами на левом и правом концах конечного элемента соответственно, обратились в ноль — что соответствует уравнению (5). Обращение в ноль изгибной жесткости может возникать, например, при обрыве растянутой арматуры или разрушении сжатой зоны железобетонной балки в каком-либо сечении. В случае статически неопределенной балки при подобных разрушениях конструкция может продолжить работу. В коммерческих программных комплексах при возникновении подобных ситуаций, как правило, в расчётной схеме активируются шарниры.

Случай  $\psi_0 = \psi_1 = \psi$ . Данный случай соответствует классической матрице жесткости.

$$[K] = \frac{D_0\psi}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}; \quad \bar{F}_q = \begin{bmatrix} qL/2 \\ qL^2/12 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

В практических расчетах для снижения вычислительных погрешностей, которые могут накапливаться в процессе вычисления компонентов матрицы жесткости и множителей (28), рекомендуется принимать формулы (31), (32) и (33) не при строгом достижении предельного случая, а при приближении к нему. Например, установить пороговые условия для использования (27) и (29) в виде  $\psi_i > 10^{-4}$  и  $|1 - \psi_0 / \psi_1| > 10^{-3}$ . Указанные значения ориентировочные и зависят от особенностей конкретной реализации.

На рис. 3 приведены графики трех элементов матрицы жесткости, рассчитанные по формулам (11) и (27) при  $\psi_1 = D_0 = L = 1$ .

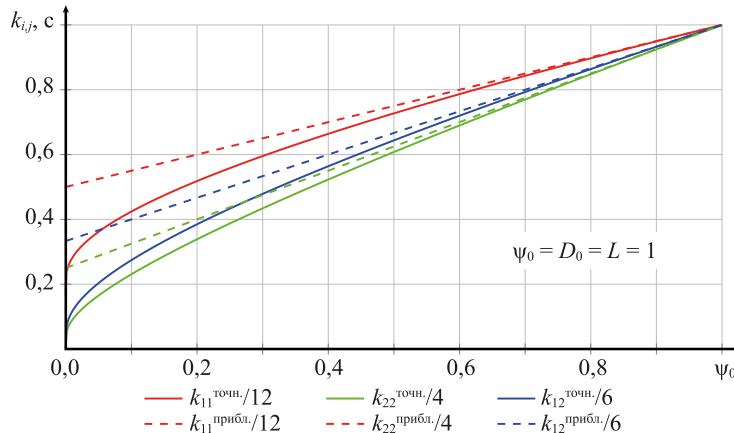


Рис. 3. Зависимости  $k_{11}$ ,  $k_{22}$  и  $k_{12}$  от  $\psi_0$ . Сплошные линии — на основе точной матрицы жесткости (27); пунктирные — на основе приближенной матрицы (11)

Из представленных на рис. 3 результатов видно, что при  $\psi_0 = 0$  и соответствующих граничных условиях коэффициенты матрицы жёсткости, связанные с моментом на левом краю, в точной матрице (27) обращаются в ноль — это соответствует физическому смыслу. Приближённая матрица жёсткости (11) таким свойством не обладает. При существенной разнице жёсткости в начале и конце элемента ( $\psi_0 / \psi_1 < 0,2$ ) значения коэффициентов точной и приближённой матриц могут различаться до 100 % (исключая из рассмотрения предельный случай  $\psi_0 \rightarrow 0$ ). В подобных ситуациях рекомендуется использовать точную матрицу жёсткости (27). Для правого края конечного элемента могут быть сделаны аналогичные выводы.

**Результаты исследования.** Для демонстрации результатов, полученных с использованием предложенных матриц жесткости, выполнены примеры расчета для балок длиной  $2L$ , изображенных на рис. 4.



Рис. 4. Эскизы схем для примеров расчета:  
а — защемленная балка длиной  $2L$ , нагруженная сосредоточенной силой;  
б — то же при действии равномерно-распределенной нагрузки

Ввиду симметрии относительно  $x = L$ , в решении рассматривается половина балки. Граничные условия при действии сосредоточенной силы (схема на рис. 4 а) приняты следующие:

$$v(0) = 0; v'(0) = 0; v'(L) = 0; (D_z v'')' \Big|_{x=L} = -P/2. \quad (34)$$

Аналогично для случая распределенной нагрузки (схема на рис. 4 б):

$$v(0) = 0; v'(0) = 0; v'(L) = 0; (D_z v'')' \Big|_{x=L} = 0. \quad (35)$$

Будет рассмотрена следующая функция распределения жесткости по длине балки:

$$D_z(x) = D_0 \left[ s_0 - \frac{x}{L} (3s_0 + s_1 - 4) + \frac{2x^2}{L^2} (s_0 + s_1 - 2) \right]. \quad (36)$$

$s_0$  и  $s_1$  — коэффициенты к жесткости балки в начале и середине пролета, т.е.  $D_z(0) = D_0 s_0$  и  $D_z(L) = D_0 s_1$ .

При этом  $D_z(L/2) = D_0$ . Важно отметить, что (36) определяет закон изменения жесткости по длине балки в целом, в то время как (1) — по длине конечного элемента.

Функция (36) выбрана исходя из способа приложения нагрузки и граничных условий. Для балки постоянной жесткости в этом случае моменты на опоре и в середине балки будут достигать максимальных значений. В случае, если материал балки железобетон, в этих точках стоит ожидать образование трещин снижение изгибной жесткости [27]. В четверти пролета моменты близки к нулевым и, следовательно, жесткость близка к начальной  $D_z(L/2) = D_0$ .

На рис. 5 представлены графики распределения жесткости по длине балки, а также рассматриваемые методы аппроксимации для двух вариантов: вариант 1 —  $s_0 = 0,001$ ;  $s_1 = 1,0$ ; вариант 2 —  $s_0 = 0,6$ ;  $s_1 = 0,2$ .

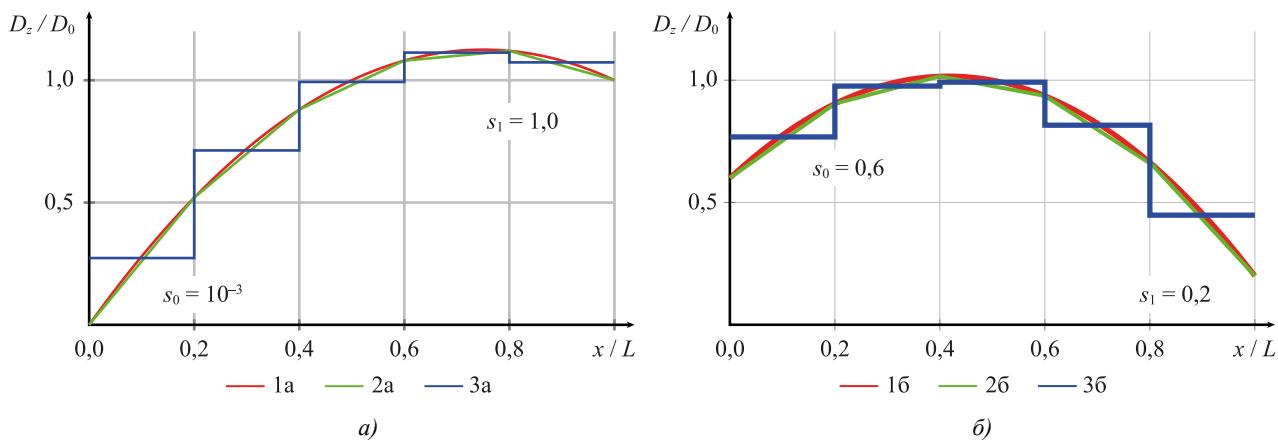


Рис. 5. Распределение жесткости  $D_z(x)/D_0$  по длине балки:

*a* — вариант 1 —  $s_0 = 0,001$  и  $s_1 = 1,0$ ; *б* — вариант 2 —  $s_0 = 0,6$  и  $s_1 = 0,2$ .

Кривые 1 *а* и 1 *б* — исходная функция; 2 *а* и 2 *б* — кусочно-линейная аппроксимация;  
3 *а* и 3 *б* — дискретная аппроксимация

Из представленных на рис. 5 результатов видно, что линейная аппроксимация даже при пяти конечных элементах дает удовлетворительное совпадение (отклонение не превышает 5 %) с исходной функцией изменения жесткости по длине для рассматриваемых примеров. Высокая точность сохраняется при аппроксимации жесткости кусочно-линейной функцией для переменных сечений сложной формы [28]. Значение средней жесткости при дискретной аппроксимации вычислялось по формуле:

$$D_{z,i} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} D_z(x) dx. \quad (37)$$

Результаты вычисления коэффициентов  $\psi$  для матриц жесткости конечных элементов приведены в таблице 1. Для дискретной аппроксимации  $\psi_0 = \psi_1 = \psi$ .

Таблица 1  
Коэффициенты матриц жесткости элементов

Элемент		1		2		3		4		5	
$x_i$	$x_{i+1}$	0,0	0,6	0,6	1,2	1,2	1,8	1,8	2,4	2,4	3,0
Вариант 1: $s_0 = 0,001$ и $s_1 = 1,0$											
Коэф. $\psi_{0,1}$	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_0$	$\psi_1$	
Линейная	0,001	0,52	0,52	0,88	0,88	1,08	1,08	1,12	1,12	1,0	
Дискретная	0,274		0,714		0,993		1,113		1,073		
Вариант 2: $s_0 = 0,6$ и $s_1 = 0,2$											
Коэф. $\psi_{0,1}$	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_0$	$\psi_1$	
Линейная	0,6	0,904	0,904	1,016	1,016	0,936	0,936	0,664	0,664	0,2	
Дискретная	0,768		0,976		0,992		0,816		0,448		

Так как решается упругая задача, результаты расчета компонентов напряженно-деформированного состояния линейно зависят от величины нагрузки и начальной жесткости  $D_0$ . Ввиду этого в расчете данные величины прияты равными единице.

Решение уравнения (20) с граничными условиями (34) и законом изменения жесткости (36) найдено аналитически для рассматриваемых значений  $s_0$  и  $s_1$ . Ввиду громоздкости данное решение здесь не приведено. Для произвольных значений  $s_0$  и  $s_1$  аналитическое решение получить не удалось.

Результаты из полученного аналитического решения далее сравнивались с результатами расчета методом конечных элементов. В основном расчете балка была разбита на 5 конечных элементов. Для исследования влияния числа конечных элементов на точность результатов была выполнена серия расчетов, в которых варьировалось их количество.

По результатам проведённых расчётов определялась величина погрешности по сравнению с аналитическим решением. Для формулирования выводов о необходимом числе элементов принята пороговая погрешность 5 %. Выводы о возможности применения подхода в практических расчётах формировались из условия, что пороговая точность достигается при числе элементов меньше 60 — в этом случае длина конечного элемента составляет 50 мм. Применение более мелкого разбиения нецелесообразно для расчёта балок в строительных конструкциях — оно приводит к существенному увеличению вычислительных затрат и времени расчёта. Максимальное число элементов в примерах расчёта принималось равным 400 (длина конечного элемента при этом составляет 7,5 мм). При большем числе конечных элементов в реализованном автором решателе начинали накапливаться вычислительные ошибки.

*Пример 1.* Решение задачи изгиба защемленной балки, нагруженной в центре сосредоточенной силой. Эскиз расчетной схемы приведен на рис. 4 а. Распределение жесткости принято по варианту 1:  $s_0 = 0,001$  и  $s_1 = 1$ . График функции жесткости для данного варианта приведен на рис. 5 а. На рис. 6, 7 приведены результаты вычисления прогибов и изгибающих моментов, а также погрешность вычислений.

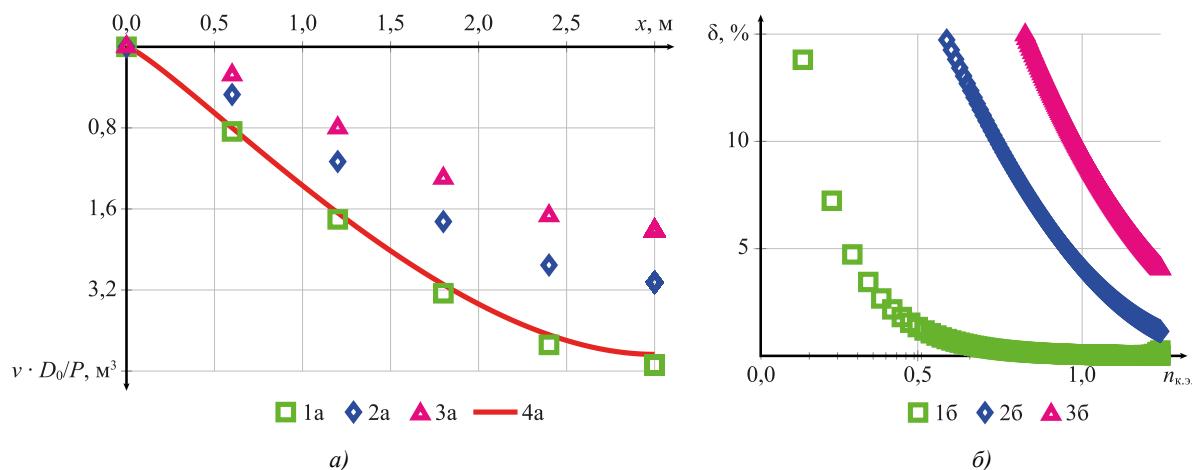


Рис. 6. Результаты вычисления прогибов для примера: а — результаты вычисления прогибов  $v$  в зависимости от  $x$ ; б — погрешность вычисления в зависимости от числа конечных элементов.  
 1 а, 1 б — линейная аппроксимация и точная матрица жесткости (27);  
 2 а, 2 б — линейная аппроксимация и приближенная матрица жесткости (11);  
 3 а, 3 б — дискретная аппроксимация; 4 а — результаты аналитического расчета

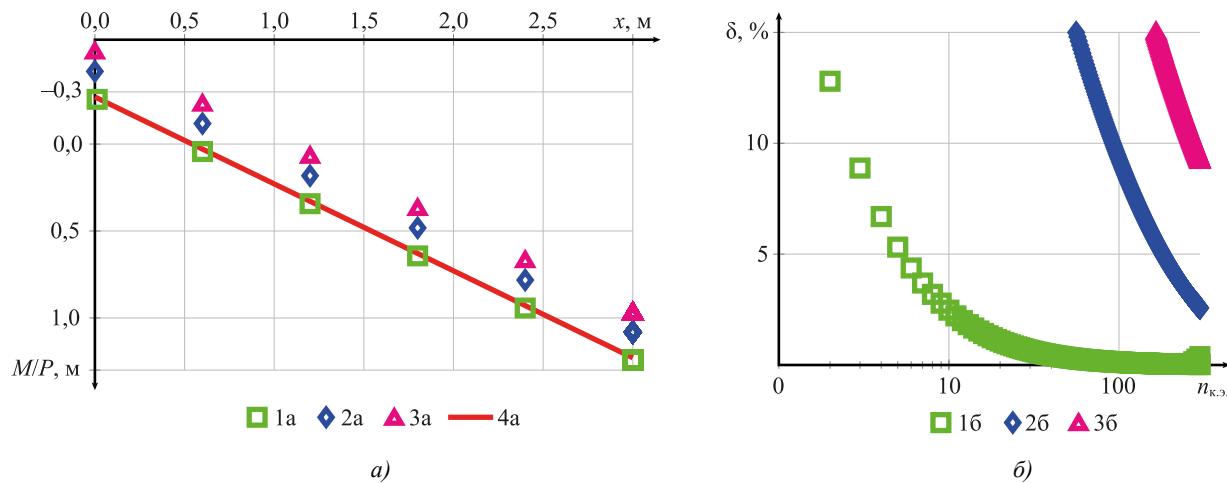


Рис. 7. Результаты вычисления моментов для примера 1:  
 а — результаты вычисления изгибающих моментов  $M$  в зависимости от  $x$ ; б — погрешность вычисления в зависимости от числа конечных элементов; 1 а, 1 б — линейная аппроксимация и точная матрица жесткости (27);  
 2 а, 2 б — линейная аппроксимация и приближенная матрица жесткости (11); 3 а, 3 б — дискретная аппроксимация;  
 4 а — результаты аналитического расчета

*Пример 2.* Рассмотренный ранее пример 1 представляет собой случай, близкий к предельному, так как жесткость на левом краю балки стремится к нулю. Для более объективной оценки точности рассматриваемых подходов выполнена аналогичная серия расчетов для случая плавного изменения жесткости. На рис. 8, 9 представлены результаты для варианта 2 изменения жесткости, а именно для  $s_0 = 0,6$  и  $s_1 = 0,2$ . График функции жесткости для данного варианта приведен на рис. 5 б.

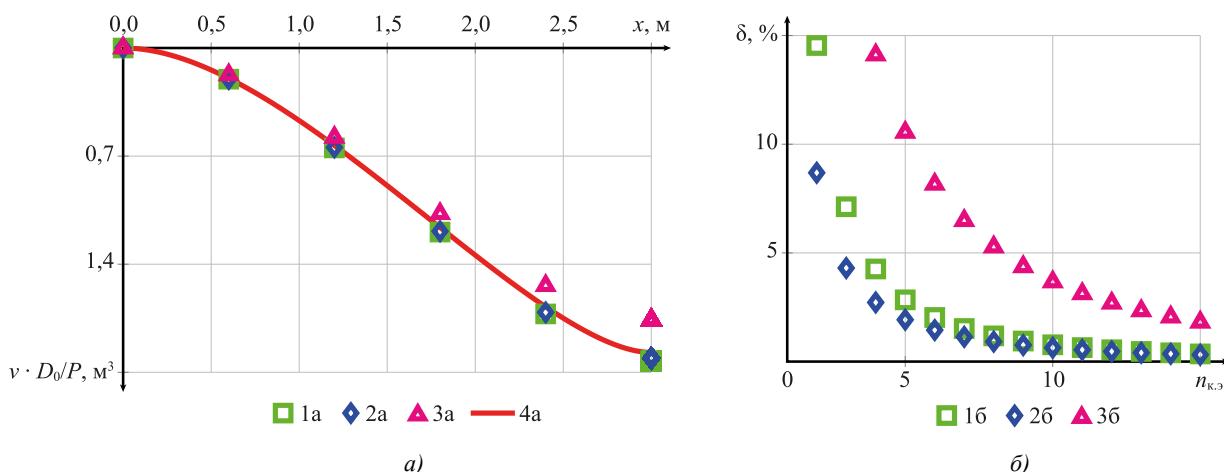


Рис. 8. Результаты вычисления прогибов для примера 2: *a* — результаты вычисления прогибов  $v$  в зависимости от  $x$ ; *б* — погрешность вычисления в зависимости от числа конечных элементов. 1 *a*, 1 *б* — линейная аппроксимация и точная матрица жесткости (27); 2 *a*, 2 *б* — линейная аппроксимация и приближенная матрица жесткости (11); 3 *a*, 3 *б* — дискретная аппроксимация; 4 *a* — результаты аналитического расчета

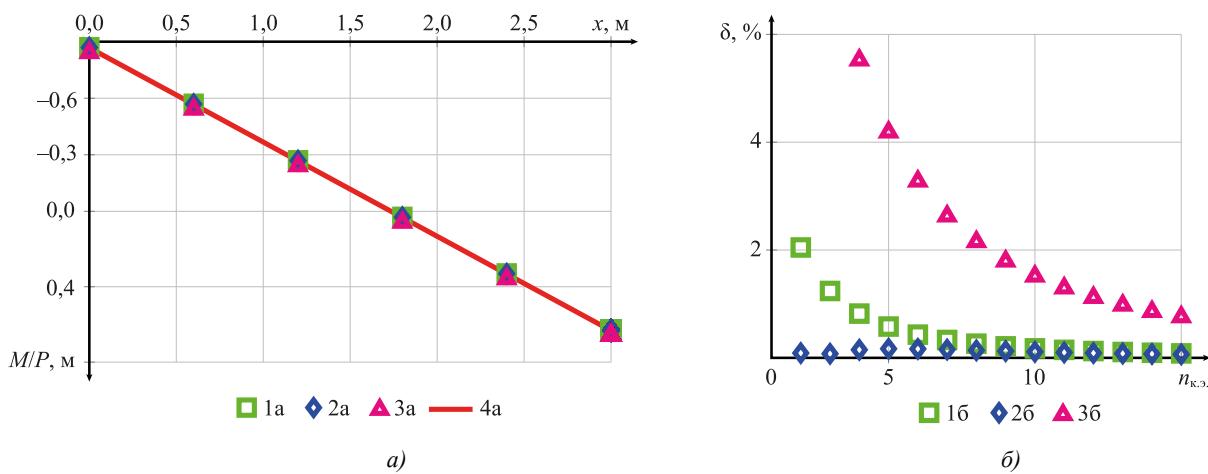


Рис. 9. Результаты вычисления моментов для примера 2: *a* — результаты вычисления изгибающих моментов  $M$  в зависимости от  $x$ ; *б* — погрешность вычисления в зависимости от числа конечных элементов; 1 *a*, 1 *б* — линейная аппроксимация и точная матрица жесткости (27); 2 *a*, 2 *б* — линейная аппроксимация и приближенная матрица жесткости (11); 3 *a*, 3 *б* — дискретная аппроксимация; 4 *a* — результаты аналитического расчета

*Пример 3.* Задача изгиба защемленной балки, находящейся под действием распределенной нагрузки. Эскиз приведен на рис. 4 *б*. Результаты расчета на рис. 10, 11 получены для варианта 1 распределения жесткости, т.е. для  $s_0 = 0,001$  и  $s_1 = 1$ .

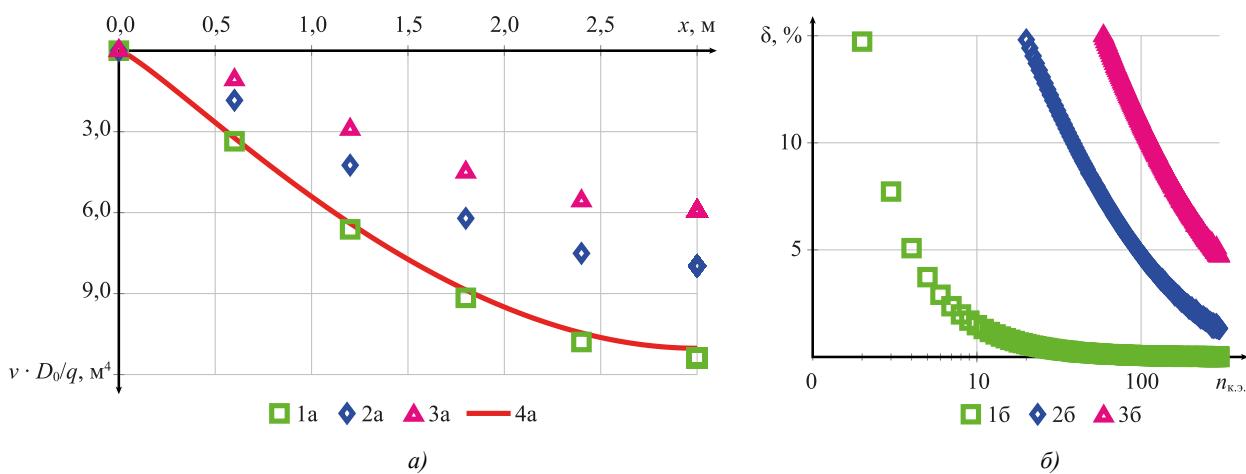


Рис. 10. Результаты вычисления прогибов для примера 3: *a* — результаты вычисления прогибов  $v$  в зависимости от  $x$ ; *б* — погрешность вычисления в зависимости от числа конечных элементов; 1 *a*, 1 *б* — линейная аппроксимация и точная матрица жесткости (27); 2 *a*, 2 *б* — линейная аппроксимация и приближенная матрица жесткости (11); 3 *a*, 3 *б* — дискретная аппроксимация; 4 *a* — результаты аналитического расчета

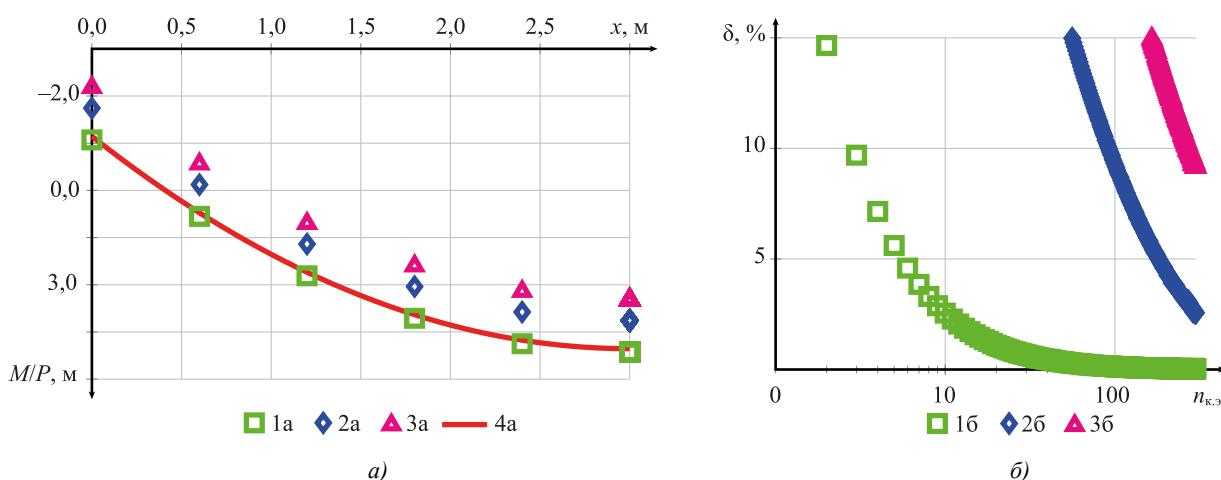


Рис. 11. Результаты вычисления моментов для примера 3: *a* — результаты вычисления изгибающих моментов  $M$  в зависимости от  $x$ ; *б* — погрешность вычисления в зависимости от числа конечных элементов; 1 *а*, 1 *б* — линейная аппроксимация и точная матрица жесткости (27); 2 *а*, 2 *б* — линейная аппроксимация и приближенная матрица жесткости (11); 3 *а*, 3 *б* — дискретная аппроксимация; 4 *а* — результаты аналитического расчета

**Обсуждение.** На основе анализа результатов, приведённых на рис. 6 и 7, сформулированы следующие заключения. В случаях существенного изменения жёсткости, как в рассмотренном примере 1, только точная матрица жёсткости (27) позволяет получить результаты, сопоставимые с аналитическим расчётом. Пороговая точность в 5 % в этом случае достигается при 5 конечных элементах для перемещений (рис. 6 *б*) и при 6 конечных элементах (рис. 7 *б*) для изгибающих моментов. При использовании приближённой матрицы жёсткости (11) аналогичная точность достигается только при 90 и 180 конечных элементах для прогибов и моментов соответственно. Дискретная аппроксимация позволила достичь пороговой точности по прогибам при 220 конечных элементах. По моментам требуемая точность при дискретной аппроксимации не была достигнута даже при 400 элементах.

Результаты расчёта при действии распределённой нагрузки, приведённые на рис. 10 и 11 для примера 3, аналогичны приведённым на рис. 6 и 7 для примера 1. Основным отличием является то, что точность результатов при использовании приближённой матрицы (11) и при дискретной аппроксимации уменьшилась. Таким образом, можно сделать вывод, что на результаты расчёта влияет не только матрица жёсткости — точная или приближённая — но и вектор узловых сил от распределённых нагрузок.

По результатам расчёта при плавном изменении жёсткости, приведённым на рис. 8 и 9 для примера 2, сформулированы следующие выводы. Приближённая (11) и точная матрица жёсткости (27) конечного элемента в случае плавного изменения жёсткости балки по длине позволяют получить сопоставимые по точности результаты при меньшем числе элементов. Например, для достижения погрешности в 5 % при вычислении прогибов при использовании предложенных матриц требуется не более 4 конечных элементов против 8 при дискретной аппроксимации. Таким образом, даже в случае плавного изменения жёсткости линейная аппроксимация в пределах конечного элемента позволяет снизить степень дискретизации расчётной схемы в два раза, сохраняя сопоставимую точность расчёта.

Представленные на рис. 8 *б* и рис. 9 *б* результаты имеют особенность. Результаты, полученные с использованием приближённой матрицы жёсткости (11) при одинаковом числе элементов, показывают меньшее отклонение от аналитического решения, чем результаты, полученные с использованием точной матрицы (27). Причиной этого является выпуклость (рис. 5) функции изменения жёсткости по длине. В этом случае площадь фигуры, ограниченная сверху аппроксимацией, меньше, чем исходная. Следовательно, величина прогибов, полученная с использованием линейной аппроксимации, оказывается больше (0 а). Из результатов расчета коэффициентов приближённой (11) и точной матрицы (27), приведенных на рис. 3, видно, что приближенная матрица (11) обладает большей жесткостью, что частично компенсирует данный эффект и снижает общую погрешность. Ниже приведена матрица  $[\Delta K]$ , коэффициенты которой вычислены по формуле  $\Delta K_{i,j} = K_{i,j}^{\text{приб.}} / K_{i,j}^{\text{точн.}}$ , где  $K_{i,j}^{\text{приб.}}$  — коэффициенты матрицы (11);  $K_{i,j}^{\text{точн.}}$  — коэффициенты матрицы (27). Вычисления выполнены для параметров  $\psi_0 = 0,664$ ,  $\psi_1 = 0,2$ ,  $D_0 = 1,0$  и  $L = 0,6$ , что соответствует пятому конечному элементу для варианта 2 распределения жесткости.

$$[\Delta K] = \begin{bmatrix} 1,09 & 1,08 & 1,09 & 1,11 \\ 1,08 & 1,06 & 1,08 & 1,14 \\ 1,09 & 1,08 & 1,09 & 1,11 \\ 1,11 & 1,14 & 1,11 & 1,09 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Среднее значение коэффициентов матрицы (38) составляет 1,098. Следовательно, жесткость конечного элемента 5 будет ориентировочно на 10 % выше, если используется приближенная матрица жесткости (11).

**Заключение.** В работе предложен и верифицирован подход к построению матриц жесткости для балочных конечных элементов с линейным изменением жесткости по длине. Получены как приближённая (на основе вариационного решения задачи), так и точная (путём аналитического интегрирования дифференциального уравнения) матрицы жесткости и соответствующие векторы узловых нагрузок. Ключевыми преимуществами полученных матриц являются следующие:

1. Аналитический вид приближённой (11) и точной (27) матриц жесткости, а также приближённого (15) и точного (29) вектора узловых сил от распределённых нагрузок, что делает их легко внедряемыми в существующие МКЭ-программы — как в авторской реализации на Python, так и в коммерческих пакетах.

2. Представленные примеры верификации (рис. 6–11) позволяют утверждать, что даже при сравнительно грубой дискретизации (небольшое число элементов) линейная аппроксимация адекватно описывает напряженно-деформированное состояние балок как при плавном, так и при резком изменении жесткости (включая моделирование зон существенного падения жесткости).

Линейная аппроксимация жёсткости обеспечивает оптимальное соотношение точность – сложность – вычислительные ресурсы, делая предложенный метод практическим инструментом для анализа реальных конструкций переменной жёсткости. Сравнение результатов расчёта с использованием приближённой и точной матрицы жесткости показывает, что приближённая матрица позволяет с высокой точностью и при меньших вычислительных затратах обеспечить требуемую точность для балок с плавным изменением жесткости по длине. При быстром изменении жесткости по длине, а также в предельных случаях для достижения существенно более высокой точности при сохранении числа элементов рекомендуется использовать точную (27) матрицу жесткости. Дискретная аппроксимация применима лишь в случаях плавного изменения жесткости по длине.

Полученные матрицы жесткости открывают возможности для более точного и эффективного анализа реальных конструкций, в том числе железобетонных элементов с учётом физической нелинейности — это определяет направление дальнейших исследований. Также предполагается получение геометрической матрицы жесткости для решения задач устойчивости и матрицы масс для динамического анализа.

### Список литературы / References

1. Chepurnenko AS, Turina VS, Akopyan VF. Optimization of Rectangular and Box Sections in Oblique Bending and Eccentric Compression. *Construction Materials and Products*. 2023;6(5):1–14. <https://doi.org/10.58224/2618-7183-2023-6-5-2>
2. Свентиков А.А., Кузнецов Д.Н. Прочность и деформативность стальных балок со ступенчатым изменением толщины стенки. *Научный журнал строительства и архитектуры*. 2025;1(77):14–23. <https://doi.org/10.36622/2541-7592.2025.77.1.002>
3. Sventikov AA, Kuznetsov DN. Strength and Deformability of Steel Beams with a Step-by-Step Change in Wall Thickness. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2025;1(77):14–23. <https://doi.org/10.36622/2541-7592.2025.77.1.002>
4. Godínez-Domínguez E, Tena-Colunga A, Velázquez-Gutiérrez I, Silvestre-Pascacio R. Parametric Study of the Bending Stiffness of RC Cracked Building Beams. *Engineering Structures*. 2021;243:112695. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112695>
5. Abuizeih YQY, Tamov MM, Leonova AN, Mailyan DR, Nikora NI. Numerical Simulation of Nonlinear Bending Behaviour of UHPC Beams. *Construction Materials and Products*. 2025;8(4):6. <https://doi.org/10.58224/2618-7183-2025-8-4-6>
6. Jun Zhao, Yibo Jiang, Gaochuang Cai, Xiangsheng Deng, Amir Si Larbi. Flexural Stiffness of RC Beams with High-Strength Steel Bars after Exposure to Elevated Temperatures. *Structural Concrete*. 2024;25(5):3081–3102. <https://doi.org/10.1002/suco.202300934>
7. Imamović D, Skrinar M. Static Bending Analysis of a Transversely Cracked Strip Tapered Footing on a Two-Parameter Soil Using a New Beam Finite Element. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2024;36:571–584. <https://doi.org/10.1007/s00161-024-01283-7>
8. Волков А.В., Голубкин К.С. Исследование распределения касательных напряжений в стержне переменного сечения в рамках градиентной теории упругости. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2025;31(1):40–56. <https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2025.31.01.04>
9. Volkov AV, Golubkin KS. Analysis of Shear Stress Distribution in a Rod with Tapered Cross-Section in Gradient Elasticity Theory. *Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2025;31(1):40–56. <https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2025.31.01.04>
10. Rao Hota VS Ganga, Spyros CC. Closed Form Series Solutions of Boundary Value Problems with Variable Properties. *Computers & Structures*. 1986;23(2):211–215. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(86\)90213-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(86)90213-0)

9. Banerjee JR, Williams FW. Exact Bernoulli–Euler Static Stiffness Matrix for a Range of Tapered Beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 1986;23(9):1707–1719. <https://doi.org/10.1002/nme.1620230904>
10. Ягофаров А.Х. Расчет двухпролетной неразрезной балки переменной жесткости с равными пролетами. *Известия высших учебных заведений. Строительство.* 2021;(754(10)):55–65. <https://doi.org/10.32683/0536-1052-2021-754-10-55-65>
- Yagofarov AKh. Calculation of a Two-Span Uncut Beam of Variable Rigidity with Equal Spans. *News of Higher Educational Institutions. Construction.* 2021;(754(10)):55–65. <https://doi.org/10.32683/0536-1052-2021-754-10-55-65>
11. Карамышева А.А., Языева С.Б., Чепурненко А.С. Расчет на устойчивость плоской формы изгиба балок переменной жесткости. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки.* 2016;(1(186)):95–98. <https://doi.org/10.17213/0321-2653-2016-1-95-98>
- Karamysheva AA, Yazyeva SB, Chepurnenko AS. Calculation of Plane Bending Stability of Beams with Variable Stiffness. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus region. Technical Sciences.* 2016;(186(1)):95–98. <https://doi.org/10.17213/0321-2653-2016-1-95-98>
12. Just DJ. Plane Frameworks of Tapering Box and I-Section. *Journal of the Structural Division.* 1977;103(1):71–86. <https://doi.org/10.1061/jsdeag.0004549>
13. Brown CJ. Approximate Stiffness Matrix for Tapered Beams. *Journal of Structural Engineering (ASCE).* 1984;110(12):3050–3055. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1984\)110:12\(3050\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1984)110:12(3050))
14. Чередниченко А.П., Потележко Е.А., Тюфанов В.А. Методы расчета балок переменной жесткости. В: *Сборник статей международного студенческого строительного форума-2017.* Т. 1. Белгород: Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова; 2017. С. 249–252.
- Cherednichenko AP, Potelzheko EA, Tyufanov VA. Methods for Calculating Beams with Variable Stiffness. In: *Proc. International Student Construction Forum-2017.* Vol. 1. Belgorod: Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov; 2017. P. 249–252.
15. Ziou H, Guenfoud M. Simple Incremental Approach for Analysing Optimal Non-Prismatic Functionally Graded Beams. *Advances in Civil and Architectural Engineering.* 2023;14(26):118–137. <https://doi.org/10.13167/2023.26.8>
16. Bui Thi Thu Hoai, Le Cong Ich, Nguyen Dinh Kien. Size-Dependent Nonlinear Bending of Tapered Cantilever Microbeam Based on Modified Couple Stress Theory. *Vietnam Journal of Science and Technology.* 2024;62(6):1196–1209. <https://doi.org/10.15625/2525-2518/19281>
17. Haskul M, Kisa M. Free Vibration of the Double Tapered Cracked Beam. *Inverse Problems in Science and Engineering.* 2021;29(11):1537–1564. <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1870971>
18. Hosseini N, Attarnejad R. A Novel Finite Element for the Vibration Analysis of Tapered Laminated Plates. *Polymer Composites.* 2024;45(10):8732–8743. <https://doi.org/10.1002/pc.28372>
19. Нестеров В.А. Матрица жесткости конечного элемента пространственной балки с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью. *Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. Академика М.Ф. Решетнева.* 2010;29(3):71–75.
- Nesterov VA. Stiffness Matrix of the Tridimensional Beam Finite Element with Low Transverse Shear Stiffness. *Siberian Aerospace Journal.* 2010;29(3):71–75.
20. Gaidzhuров PP, Saveleva NA. Application of the Double Approximation Method for Constructing Stiffness Matrices of Volumetric Finite Elements. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2023;23(4):365–375. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-4-365-375>
21. Zeinali Y, Jamali M, Musician S. General Form of the Stiffness Matrix of a Tapered Beam-column. *International Journal of Mining, Metallurgy & Mechanical Engineering (IJMMME).* 2013;1(3):149–153.
22. Peng He, Zhansheng Liu, Chun Li. An Improved Beam Element for Beams with Variable Axial Parameters. *Shock and Vibration.* 2013;20(4):601–617. <https://doi.org/10.3233/SAV-130771>
23. Ceba AI. Stiffness Matrix for Bars with Variable Section or Inertia. *International Journal of Materials Science and Applications.* 2025;14(1):13–28. <https://doi.org/10.11648/j.ijmsa.20251401.12>
24. Rezaiee-Pajand M, Masoodi AR, Bambaechee MT. Tapered Beam–Column Analysis by Analytical Solution. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers — Structures and Buildings.* 2019;172(11):789–804. <https://doi.org/10.1680/jstbu.18.00062>
25. Li Xia Meng, Nian Li Lu, Shi Ming Liu. Exact Expression of Element Stiffness Matrix for a Tapered Beam and Its Application in Stability Analysis. *Advanced Materials Research.* 2011;255–260:1968–1973. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.255-260.1968>

26. Федоринин Н.И., Соломонов К.Н., Тищук Л.И. Универсальное уравнение упругой линии балки линейной жесткости. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки.* 2022;(9):517–521. <https://doi.org/10.24412/2071-6168-2022-9-517-521>

Fedorinini NI, Solomonov KN, Tishchuk LI. Universal Equation of Elastic Line of a Beam of Linear Rigidity. News of Tula State University. Technical Sciences. 2022;(9):517–521. <https://doi.org/10.24412/2071-6168-2022-9-517-521>

27. Ksenofontova TK, Mareeva OV, Verkhoglyadova AS. Calculation of Monolithic Buildings Structures Taking into Account the Nonlinear Operation of Reinforced Concrete. *Construction Materials and Products.* 2024;7(1):1–8. <https://doi.org/10.58224/2618-7183-2024-7-1-4>

28. Deryugin EE. Simplified Calculation of the Inertia Moment of the Cross Section of the Console under Loading. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(2):159–169. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-159-169>

**Об авторе:**

**Никита Юрьевич Цыбин**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Сопротивление материалов» Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (129337, Российская Федерация, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ResearchGate](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [science@nikitatsybin.ru](mailto:science@nikitatsybin.ru)

**Конфликт интересов:** автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.**

**About the Author:**

**Nikita Yu. Tsybin**, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (26, Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ResearchGate](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [science@nikitatsybin.ru](mailto:science@nikitatsybin.ru)

**Conflict of Interest Statement:** the author declares no conflict of interest.

**The author has read and approved the final version of manuscript.**

**Поступила в редакцию / Received** 02.09.2025

**Поступила после рецензирования / Reviewed** 22.09.2025

**Принята к публикации / Accepted** 06.10.2025

# МЕХАНИКА MECHANICS



УДК 539.3

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2218>

## Итерационная модель упругого деформирования конгломерата частиц с учетом сжимаемости среды в процессе прессования

И.К. Андрианов , С.Н. Иванов , Е.К. Чепурнова

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре,  
Российская Федерация

[ivan\\_andrianov\\_90@mail.ru](mailto:ivan_andrianov_90@mail.ru)



EDN: XHHEDX

### Аннотация

**Введение.** Процессы брикетирования и прессования древесных и других порошкообразных материалов становятся ключевыми в круговой экономике и утилизации отходов деревообработки. Точный расчет давления прессования необходим для выбора оборудования и оптимизации режимов, что делает задачу моделирования деформирования конгломератов практически и экономически значимой. В литературе рассматриваются механика порошковых сред, пористых материалов и моделирование упругопластических деформаций грануллярных конгломератов; однако большинство моделей предполагает фиксированные механические характеристики или аппроксимации, не учитывающие зависимость прочности и упругих свойств от изменяющейся плотности при сжатии. Это оставляет пробел в теоретических и прикладных подходах к адекватному расчету давления для материалов с переменной плотностью. Поэтому целью данной работы является разработка подхода для расчета давления прессования конгломерата частиц как функцию степени упругого сжатия с учетом изменения механических характеристик среды.

**Материалы и методы.** При математическом описании исследуемой задачи использовались положения теории упругости. На основании принципа суперпозиции процесс деформирования среды разбивался на несколько этапов, в каждом из которых среда получала малое приращение по высоте, а механические характеристики оставались постоянными. Предложенный метод определения давления прессования опирался на решение серии обратных упругих задач, в которых задавалось перемещение верхней границы конгломерата прямоугольных частиц и искалось нормальное напряжение, вызвавшее это приращение. Для учёта изменения плотности среды в процессе деформирования применялся метод последовательных нагрузений — в пределах каждого из них плотность принималась постоянной и определялась в зависимости от величины суммарной деформации сжатия. В качестве меры деформации использовалась деформация Генки, обладающая свойством аддитивности.

**Результаты исследования.** В рамках исследования построена итерационная модель расчёта давления прессования конгломерата частиц при изменении механических характеристик в зависимости от степени упругого сжатия. Проведены серии тестовых расчётов на примере конгломерата древесных частиц, у которых модуль Юнга описывается степенной функцией плотности. На каждом этапе деформирования упругие константы материала принимались постоянными в зависимости от плотности среды. С использованием уравнения равновесия и принципа суперпозиции по результатам решения задач упругого деформирования было вычислено давление прессования на каждом этапе нагружения, а также построена зависимость давления прессования от величины деформации сжатия и степени уплотнения.

**Обсуждение.** Полученные результаты деформирования среды с учётом изменения механических характеристик в зависимости от степени сжатия показали явно выраженную нелинейность кривой зависимости давления прессования от деформации сжатия — при возрастании давления увеличиваются как степень уплотнения среды, так и деформация сжатия. Сравнительный анализ расчётов на примере конгломерата древесных частиц при условии постоянной плотности среды и с учётом изменения плотности в процессе деформирования выявил значительную погрешность оценки давления прессования при усреднении плотности либо при использовании постоянных значений плотности, соответствующих начальному (недеформированному) или конечному состоянию.

**Заключение.** Построенная итерационная модель позволяет рассчитать давление прессования конгломерата частиц с учётом изменения механических характеристик при упругом сжатии. Предложенный подход учитывает нелинейность зависимости давления прессования от степени уплотнения среды и может быть применён в процессах брикетирования отходов деревообработки.

**Ключевые слова:** прессование, сжимаемость, плотность, конгломерат частиц, последовательное нагружение, напряженно-деформированное состояние

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность редакционной коллегии журнала и рецензенту за профессиональный анализ статьи и рекомендации для ее корректировки.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00089 <https://rscf.ru/project/24-29-00089/>

**Для цитирования.** Андианов И.К., Иванов С.Н., Чепурнова Е.К. Итерационная модель упругого деформирования конгломерата частиц с учетом сжимаемости среды в процессе прессования. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):290–299. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2218>

Original Theoretical Research

## Iterative Model of Elastic Deformation of a Particle Conglomerate Taking into Account the Compressibility of the Medium during Pressing

Ivan K. Andrianov  , Sergey N. Ivanov  , Elena K. Chepurnova 

Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation

✉ [ivan\\_andrianov\\_90@mail.ru](mailto:ivan_andrianov_90@mail.ru)

### Abstract

**Introduction.** Briquetting and pressing of wood and other powdered materials are becoming key processes in the circular economy and recycling of wood processing waste. Accurate calculation of compaction pressure is essential for equipment selection and optimization, making the task of modeling the deformation of conglomerates both practical and economically significant. The literature addresses the mechanics of powder media, porous materials, and the modeling of elastic-plastic deformations of granular conglomerates. However, most models assume fixed mechanical characteristics or approximations that do not account for the dependence of strength and elastic properties on changing density under compression. This leaves a gap in theoretical and applied approaches to adequately calculating pressure for materials with variable density. Therefore, the objective of this work is to develop an approach for calculating the compaction pressure of a particle conglomerate as a function of the degree of elastic compression, taking into account changes in the mechanical characteristics of the medium.

**Materials and Methods.** In the mathematical description of the research problem, the provisions of the theory of elasticity were used. Based on the principle of superposition, the process of medium deformation was divided into a number of stages, within which the particle conglomerate received a small increment in height, and the mechanical characteristics assumed a constant value. The proposed approach for determining the compaction pressure was based on the solution to a series of inverse elastic problems in which the displacement of the upper boundary of a conglomerate of rectangular particles was specified, and the normal stress that caused this increment was sought. To account for changes in the density of the medium during deformation, the method of sequential loads was used, within each of them, the density was taken to be constant and was determined depending on the magnitude of the total compressive deformation. The Hencky strain, which has the property of additivity, was used as a measure of deformation.

**Results.** As part of the study, an iterative model was constructed for calculating the compaction pressure of a particle conglomerate when the mechanical characteristics change depending on the degree of elastic compression. Series of test calculations were conducted using a conglomerate of wood particles, whose Young's modulus is described by a power-law density function. At each stage of deformation, the elastic constants of the material were assumed to be constant, depending on the density of the medium. Using the equilibrium equation and the superposition principle, based on the results of solving elastic deformation problems, the compaction pressure was calculated at each loading stage, and the dependence of the compaction pressure on the magnitude of the compressive deformation and the degree of compaction was constructed.

**Discussion.** The obtained results of deformation of the medium taking into account the change in mechanical characteristics depending on the degree of compression showed a clearly expressed nonlinearity of the curve of dependence of the compaction pressure on the compression deformation — with an increase in pressure, both the degree of compaction of the medium and the compression deformation increase. A comparative analysis of calculations using the example of a conglomerate of wood particles under the condition of a constant density of the medium and taking into account the change in density during the deformation process revealed a significant error in estimating the compaction pressure when averaging the density or when using constant density values corresponding to the initial (undeformed) or final state.

**Conclusion.** The constructed iterative model allows for calculating the compaction pressure of a particle conglomerate, taking into account changes in mechanical properties under elastic compression. The proposed approach accounts for the nonlinearity of the compaction pressure dependence on the degree of compaction of the medium and can be applied to briquetting processes for wood waste.

**Keywords:** pressing, compressibility, density, particle conglomerate, sequential loading, stress-strain state

**Acknowledgements.** The authors would like to thank the Editorial board of the Journal and the reviewer for their professional analysis of the article and recommendations for its correction.

**Funding Information.** The research is done with the financial support from the Russian Science Foundation (grant no. 24-29-00089), <https://rscf.ru/project/24-29-00089/>

**For Citation.** Andrianov IK, Ivanov SN, Chepurnova EK. Iterative Model of Elastic Deformation of a Particle Conglomerate Taking into Account the Compressibility of the Medium during Pressing. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):290–299. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2218>

**Введение.** В различных производственных областях встречаются материалы с механическими характеристиками, зависящими от плотности. В частности, это гранулированные среды, конгломераты древесных частиц, композиционные материалы и др. Поведение таких материалов может существенно отличаться от классического, когда свойства остаются постоянными и не зависят от плотности. Часть вопросов оценки прочности и жёсткости для гранулированных сред рассмотрена в работе [1], для песчаных форм — в работе [2].

В настоящее время широко применяются процессы брикетирования конгломерата древесных частиц при вторичной переработке отходов деревообрабатывающей промышленности [3], поэтому важно описать поведение частиц в процессе прессования. Вопросы оценки давления прессования обсуждались в работе [4]; механический и термический анализ характеристик прессованных блоков с древесными включениями — в труде [5]; оценка прочности древесного конгломерата — в работе [6]. Древесные опилки находят широкое применение при производстве строительных материалов, переработке в топливо и брикетировании. На процесс прессования влияют различные факторы [7]: так, влажность хранения отражена в работе [8], влияние температуры — в труде [9]. Кроме того, древесные частицы используются в составе композиционных материалов, в частности при производстве биокомпозитов [10], полимерных материалов [11] и многослойных композитов [12].

Одной из ключевых задач моделирования деформирования частиц является выбор пресс-оборудования. Исследование [13] посвящено подбору прессовочных машин для получения твердого биотоплива путём гранулирования, брикетирования и механической обработки биомассы. При применении процедуры прессования конгломерата важным представляется моделирование напряжённо-деформированного состояния в процессе сжатия с учётом уплотнения среды. Изменение плотности влечёт за собой изменение механических характеристик среды, что влияет на точность расчёта требуемого деформирующего усилия и на выбор оборудования. Разработка более точных методик расчёта давления прессования с учётом сжимаемости среды важна для создания новых эффективных технологий и совершенствования существующих. Некоторые аспекты математического описания упруго-пластической задачи при сжатии для случая постоянных механических характеристик рассмотрены в работе [14].

Анализ современного состояния вопроса показывает, что далеко не все программные пакеты способны учитывать изменение плотности и механических характеристик в процессе деформирования. Большинство систем САЕ-анализа выполняют инженерные расчёты при заданных постоянных значениях физических и механических свойств. Поэтому актуальна разработка эффективных моделей и методик для оценки напряжённо-деформированного состояния сред при прессовании с учётом сжимаемости и изменения характеристик.

Цель исследования — разработать подход для расчёта давления прессования, необходимого для сжатия конгломерата частиц до заданной геометрии, с учётом влияния степени уплотнения на механические характеристики среды. В соответствии с этой целью поставлены следующие задачи:

- провести математическую постановку задачи упругого сжатия конгломерата частиц с учётом сжимаемости среды;
- построить итерационную модель расчёта напряжённо-деформированного состояния среды на основании решения серий обратных задач путём последовательных нагрузений;
- провести тестовые расчёты напряжённо-деформированного состояния конгломерата частиц и построить зависимость давления прессования от деформации сжатия среды;
- оценить погрешность расчёта давления прессования при неучёте изменения плотности среды в процессе деформирования.

**Методы исследования.** Построение методики расчёта процесса деформирования конгломерата частиц с учётом сжимаемости среды будем проводить при следующих допущениях:

- поскольку в исследовании рассматривается сжатие среды, принимается условие сплошности, то есть конгломерат частиц равномерно заполняет исследуемый объём;
- масса среды остаётся неизменной в течение всего процесса прессования;
- процесс сжатия среды рассматривается в пределах упругого деформирования;
- выполняется принцип суперпозиции — независимо накопленные деформации на каждом этапе нагружения;
- прессование производится в абсолютно жёсткой матрице с помощью абсолютно жёсткого пуансона без трения, слои перемещаются равномерно по высоте, сдвиг исключён;
- вязкостью среды пренебрегаем, температура прессования остаётся постоянной;
- переменными механическими характеристиками, зависящими от плотности среды, являются модуль Юнга и коэффициент Пуассона;
- плотность среды является функцией деформации сжатия.

Геометрическая модель конгломерата частиц (рис. 1) имеет форму параллелепипеда с высотой  $h$  и постоянным основанием квадратной формы площадью  $S$ . В связи с прямоугольной формой конгломерата частиц модель будем рассматривать в декартовой системе координат, где ось  $0x_3$  направлена вдоль высоты параллелепипеда, а оси  $0x_1$  и  $0x_2$  лежат в плоскости основания параллелепипеда.

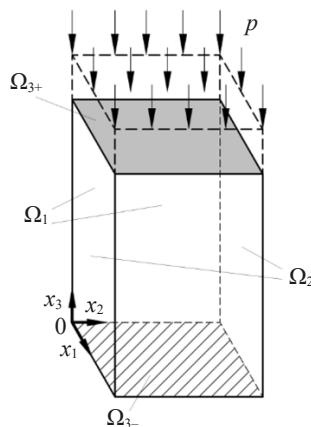


Рис. 1. Схема деформирования конгломерата частиц

Поскольку в процессе прессования давлением  $p$  осевая деформация сжатия по высоте возрастает по абсолютной величине, соответственно, изменяются плотность среды и, как следствие, ее упругие константы. Соответственно, модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\mu$  являются функциями плотности  $\rho$ :  $E = E(\rho)$ ,  $\mu = \mu(\rho)$ . В качестве меры деформации будем использовать деформацию Генки.

Разобъем весь процесс деформирования среды на ряд этапов нагружения, в пределах каждого из которых будем задавать кинематическое условие в виде малого приращения верхней границы среды  $\Delta h = \Delta h^*$  по высоте. На каждом этапе нагружения будем считать, что плотность среды остается постоянной и механические характеристики — модуль Юнга и коэффициент Пуассона не изменяются. На последующих этапах нагружения плотность среды и механические характеристики также остаются постоянными в пределах каждого этапа, но меняются в зависимости от величины суммарной деформации за все предыдущие этапы нагружения.

Будем рассматривать решение обратной задачи, принимая неизвестной величиной приращение давления на каждом этапе нагружения  $\Delta p$ , тогда математическая постановка задачи исследования в соответствии с принятыми допущениями, будет включать в себя следующую систему уравнений:

– статические уравнения:

$$\partial \Delta \sigma_{11} / \partial x_1 = 0, \partial \Delta \sigma_{22} / \partial x_2 = 0, \partial \Delta \sigma_{33} / \partial x_3 = 0, \quad (1)$$

– физические уравнения:

$$\Delta e_{11} = \frac{1}{E(\rho)} \Delta \sigma_{11} - \frac{\mu(\rho)}{E(\rho)} (\Delta \sigma_{22} + \Delta \sigma_{33}), \quad (2)$$

$$\Delta e_{22} = \frac{1}{E(\rho)} \Delta \sigma_{22} - \frac{\mu(\rho)}{E(\rho)} (\Delta \sigma_{33} + \Delta \sigma_{11}), \quad (3)$$

$$\Delta e_{33} = \frac{1}{E(\rho)} \Delta \sigma_{33} - \frac{\mu(\rho)}{E(\rho)} (\Delta \sigma_{11} + \Delta \sigma_{22}), \quad (4)$$

– геометрические соотношения:

$$\Delta e_{11} = \Delta e_{22} = 0, \Delta e_{33} = \ln(1 + \Delta h / h), \quad (5)$$

– граничные условия:

$$\begin{aligned} u_1|_{\Omega_1, \Omega_2} &= u_2|_{\Omega_1, \Omega_2} = 0, \\ u_1|_{\Omega_{3-}} &= u_2|_{\Omega_{3-}} = u_3|_{\Omega_{3-}} = 0, \\ u_3|_{\Omega_{3+}} &= -\Delta h, \\ \Delta \sigma_{33}|_{\Omega_{3+}} &= -\Delta p. \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\Delta \sigma_{11}$ ,  $\Delta \sigma_{22}$ ,  $\Delta \sigma_{33}$  — приращения напряжений;  $\Delta e_{11}$ ,  $\Delta e_{22}$ ,  $\Delta e_{33}$  — приращения упругих деформаций;  $u_i, i = \overline{1, 3}$  — компоненты перемещений.

На основании дифференциальных уравнений (1) и условие (6) приходим к соотношениям:  $\Delta \sigma_{11} = const$ ,  $\Delta \sigma_{22} = const$ ,  $\Delta \sigma_{33} = -\Delta p$ .

Учитывая, что в плоскости  $0x_1x_2$  отсутствуют перемещения, согласно соотношениям (3), (5) приведем систему уравнений (2), (3) к виду:

$$\Delta \sigma_{11} = \Delta \sigma_{22} = -\frac{\mu(\rho)}{1-\mu(\rho)} \Delta p. \quad (7)$$

Подставляя соотношения (5) и (7) в уравнение (4), выразим приращение давления в следующем виде:

$$\Delta p = -\frac{E(\rho)(1-\mu(\rho))}{(1+\mu(\rho))(1-2\mu(\rho))} \ln\left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right).$$

Таким образом, при построении алгоритма расчета зададим дискретное изменение высоты конгломерата в зависимости от этапа нагружения:

$$h = \left\{ h^{(0)} = h_0, \dots, h^{(j)} = h_0 - j\Delta h, j = \overline{1, n}, \dots, h^{(n)} = h_{end} \right\},$$

где  $h_0$  — начальная высота, соответствующая недеформированному состоянию конгломерата;  $h_{end}$  — конечная высота конгломерата после всех этапов нагружения;  $j$  — этап нагружения.

Поскольку изменение высоты конгломерата известно, можно определить приращение деформации по высоте в пределах каждого этапа нагружения:

$$\Delta e_{33}^{(j)} = \ln\left(\frac{h^{(j)}}{h^{(j-1)}}\right), \quad j = \overline{1, n}.$$

Полная деформация на текущем этапе нагружения будет определяться согласно принципу суперпозиции:

$$e_{33}^{(j)} = \sum_{i=1}^j \Delta e_{33}^{(i)}.$$

Следует отметить, что выбор деформации Генки в качестве меры деформации обусловлен тем, что она обладает свойством аддитивности в отличие от относительной деформации, что позволяет суммировать деформации на отдельных этапах нагружения. При этом деформация Генки позволяет проводить расчет при больших деформациях.

Учитывая, что масса конгломерата и площадь основания остаются неизменными:  $m = const$ ,  $S = const$ , перейдем к условию неразрывности в виде:  $\rho_0 h_0 = \rho h$ , откуда плотность среды будет определяться в зависимости от величины деформации сжатия  $\Delta e_{33}^{(j)}$  данного этапа нагружения согласно соотношению:

$$\rho^{(j)} = \rho^{(j-1)} / \exp \Delta e_{33}^{(j)}.$$

Зная плотность среды на текущем этапе нагружения, модуль Юнга и коэффициент Пуассона на каждом этапе нагружения определяются в соответствии со степенью уплотнения некоторой функцией:

$$E^{(j)} = E(\rho)|_{\rho=\rho^{(j)}}, \quad \mu^{(j)} = \mu(\rho)|_{\rho=\rho^{(j)}}.$$

Тогда приращение давления прессования будет определяться в виде:

$$\Delta p^{(j)} = -\frac{E(\rho^{(j)})(1-\mu(\rho^{(j)}))}{(1+\mu(\rho^{(j)}))(1-2\mu(\rho^{(j)}))} \ln\left(\frac{h^{(j)}}{h^{(j-1)}}\right).$$

Согласно принципу суперпозиции компоненты тензора напряжения на текущем этапе нагружения будут определяться в виде:

$$\sigma_{11}^{(j)} = \sum_{i=1}^j \Delta\sigma_{11}^{(i)}, \quad \sigma_{22}^{(j)} = \sum_{i=1}^j \Delta\sigma_{22}^{(i)}, \quad \sigma_{33}^{(j)} = \sum_{i=1}^j \Delta\sigma_{33}^{(i)},$$

где приращения напряжений на каждом этапе определяются зависимостями:

$$\Delta\sigma_{11}^{(j)} = \Delta\sigma_{22}^{(j)} = -\frac{E(\rho^{(j)})\mu(\rho^{(j)})}{(1+\mu(\rho^{(j)}))(1-2\mu(\rho^{(j)}))} \ln\left(\frac{h^{(j)}}{h^{(j-1)}}\right), \quad \Delta\sigma_{33}^{(j)} = \Delta p^{(j)}.$$

Таким образом, процесс прессования конгломерата частиц представляется серией этапов нагружения, в пределах каждого из которых плотность среды и упругие константы считаются неизменными. На каждом этапе решается обратная упругая задача о сжатии среды. Входными данными для неё служат плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона, значения которых определяются по суммарной величине деформации сжатия, накопленной на предыдущих и текущем этапах нагружения. В результате формируется последовательность обратных задач на основе данных об изменении высоты конгломерата частиц, по которой вычисляется изменение давления прессования в зависимости от степени уплотнения среды.

**Результаты исследования.** На основании построенного подхода были проведены серии расчетов процесса деформирования конгломерата частиц на примере древесных опилок. Модуль Юнга (МПа) описывался функцией плотности ( $\text{г}/\text{см}^3$ ):  $E(\rho) = a\rho^b$ ,  $a = 6\,500$ ,  $b = 3,5$  [15]. Выбор степенной зависимости обусловлен тем, что она достаточно хорошо описывает поведения конгломерата древесных частиц согласно работе [15]. Коэффициент Пуассона  $\mu = 0,32$  принимал постоянное значение, поскольку менее чувствителен к изменению плотности конгломерата, что отмечается в работе [16]. Кроме того, согласно экспериментальным исследованиям [17, 18], наибольшее изменение коэффициента Пуассона имеет место при малых значениях прессования, а при значениях давления свыше 20 МПа коэффициент Пуассона асимптотически приближается к постоянному значению. Начальная плотность конгломерата древесных частиц в недеформированном состоянии принималась:  $\rho_0 = 0,2 \text{ г}/\text{см}^3$ . Для проведения тестового расчета было выбрано 10 этапов нагружения. На каждом этапе верхняя граница конгломерата смешалась на величину  $\Delta h = 10 \text{ мм}$ , в результате чего высота конгломерата изменялась дискретно:  $h = \{200, 190, \dots, 110\} \text{ мм}$ . На последнем этапе нагружения при  $h = 110 \text{ мм}$  максимальное давление прессования составило 112 МПа, а плотность среды — 0,4  $\text{г}/\text{см}^3$ .

По результатам проведенных расчетов построена зависимость давления прессования от изменения деформаций сжатия (рис. 2) и от изменения плотности конгломерата древесных частиц (рис. 3). С целью сравнительного анализа также были проведены серии расчетов при постоянной величине плотности и постоянном модуле Юнга для двух крайних случаев: при  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  и при  $\rho = \rho_{\text{end}} = \rho|_{h=100 \text{ мм}} = \text{const}$ , т.е. когда плотность среды соответствует начальному недеформированному состоянию и конечному деформированному состоянию на последнем этапе нагружения; а также для случая осреднения плотности среды: при  $\rho = (\rho_0 + \rho_{\text{end}})/2 = \text{const}$ . Результаты расчетов при постоянных значениях плотности и упругих констант представлены на рис. 2.

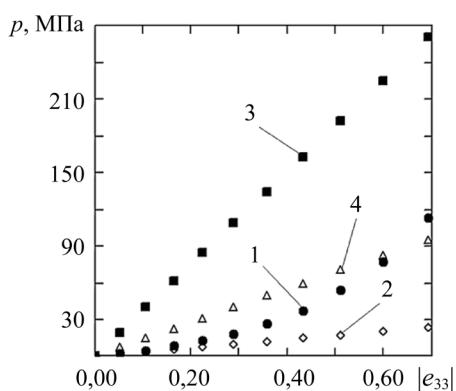


Рис. 2. Зависимость давления прессования от деформации сжатия:

- 1 — при  $\rho = \rho(e)$ ;
- 2 — при  $\rho = \rho_0$ ;
- 3 — при  $\rho = \rho_{\text{end}}$ ;
- 4 — при  $\rho = (\rho_0 + \rho_{\text{end}})/2$

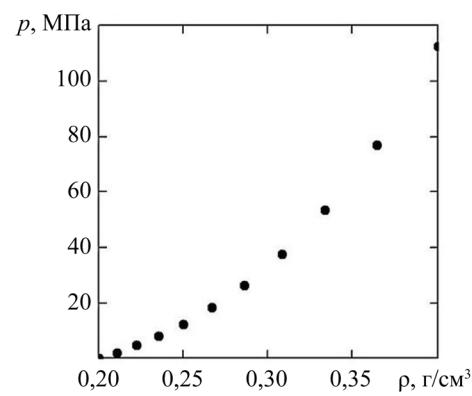


Рис. 3. Зависимость давления прессования от плотности среды

Согласно результатам решения обратной задачи упругого сжатия, для первого этапа нагружения при заданном перемещении верхней границы среды  $h^{(1)} = 10$  мм, приращения деформаций, напряжений и требуемое давление составляют:  $\Delta\epsilon_{33}^{(1)} = -0,051$ ,  $\Delta\sigma_{33}^{(1)} = \Delta p^{(1)} = 2,041$  МПа. Для оценки адекватности построенной модели был проведен конечно-элементный расчет прямой задачи нагружения в программном комплексе ANSYS при заданном внешнем давлении  $\Delta p^{(1)} = 2,041$  МПа. Поскольку программный комплекс требует задания постоянных характеристик среды, то конечно-элементный расчет проводился только за один первый этап нагружения [19]. Результаты расчета напряженно-деформированного состояния при упругом сжатии среды за первый этап нагружения представлены на рис. 4.

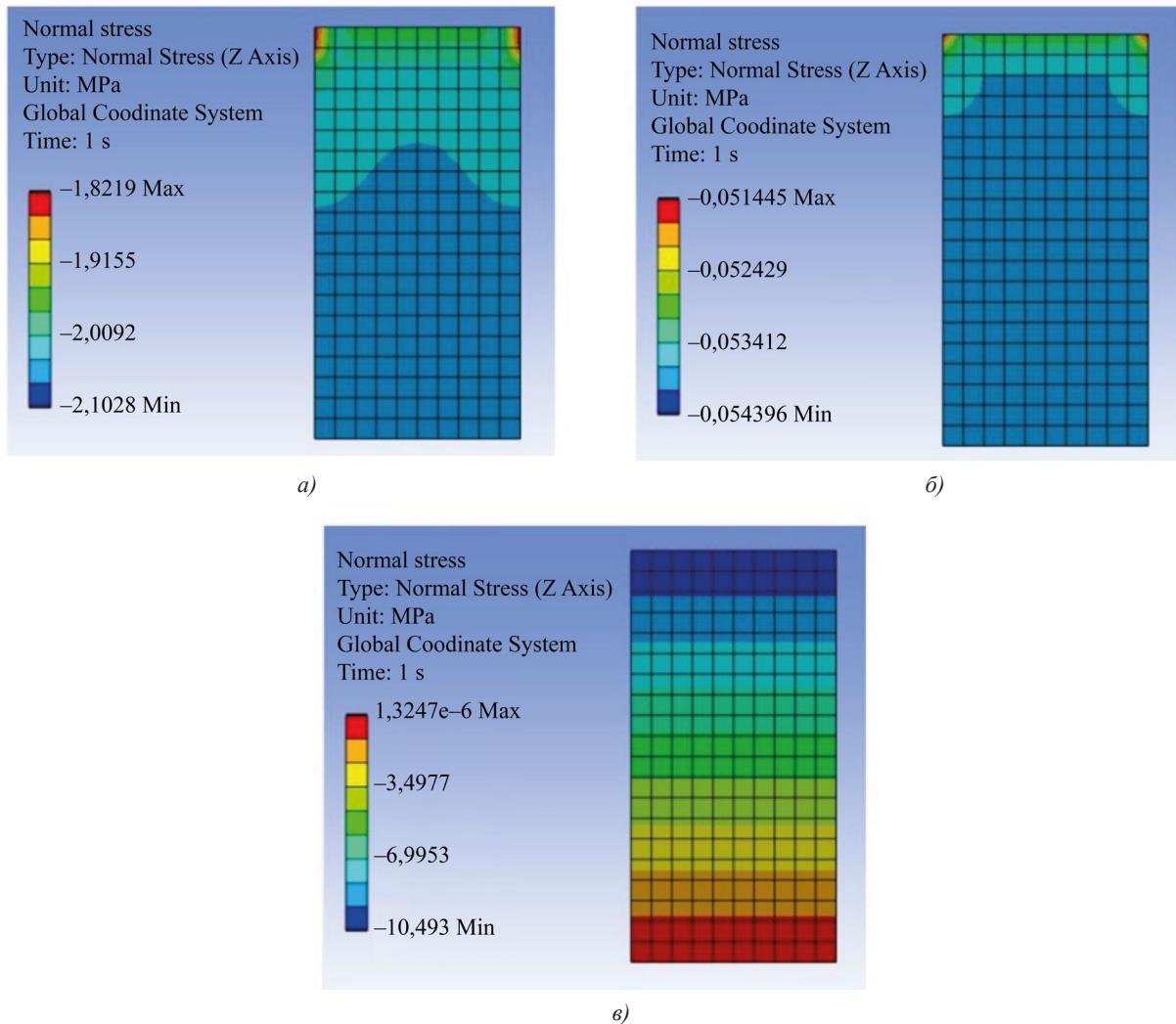


Рис. 4. Результаты конечно-элементного расчета прямой задачи за первый этап упругого сжатия:

*a* — распределение напряжений  $\Delta\sigma_{33}^{(1)}$  МПа; *б* — распределение деформаций  $\Delta\epsilon_{33}^{(1)}$ ;

*в* — распределение перемещений  $u_3^{(1)}$  (мм)

**Обсуждение результатов.** Согласно результатам расчетов (рис. 2, 3), с увеличением величины деформации сжатия растут требуемое давление прессования и степень уплотнения конгломерата частиц. Зависимость давления прессования от степени уплотнения имеет явно выраженный нелинейный характер. Зависимость давления прессования от продольной деформации сжатия (рис. 2, кривая 1) также описывается нелинейной функцией, поведение которой вполне адекватно аппроксимируется полиномиальной функцией третьего порядка. На рис. 2 видно, что при постоянной плотности конгломерата древесных частиц кривые зависимости давления прессования от величины деформации сжатия имеют слабо выраженный нелинейный характер. Соответственно, при фиксированной плотности среды кривые изменения давления прессования можно аппроксимировать линейными функциями.

Согласно сравнительному анализу, упрощение в виде использования величины плотности как постоянной характеристики в том случае, когда плотность среды существенно изменяется в процессе деформирования, может привести к существенным погрешностям. В частности, при использовании постоянной плотности конгломерата частиц  $\rho = \rho_0$ , соответствующей начальному состоянию, погрешность расчета давления прессования возрастает до 80 %. При этом наибольшая погрешность достигается при максимальном давлении прессования. Для постоянного значения плотности  $\rho = \rho_{end}$ , соответствующего конечному состоянию среды, результаты расчета на некоторых этапах нагружения отличаются более чем в 9,4 раза, а при осредненном значении плотности  $\rho = (\rho_0 + \rho_{end}) / 2$  — более чем 3,4 раза.

Согласно данным на рис. 4, результаты, полученные с помощью метода конечных элементов при решении прямой задачи первого этапа нагружения согласуются с результатами, полученными при решении обратной задачи, согласно предложенному в данном исследовании подходу. Результаты, представленные на рис. 4, наглядно демонстрируют, что нормальные напряжения и деформации по высоте практически одинаковы в каждой точке тела, что подтверждает равномерность их распределения по высоте конгломерата при действии равномерного давления на верхней границе. При этом следует отметить, что на рис. 4 *a, б* имеет место градиент напряжений и деформаций вдоль продольной оси, что скорей всего является следствием сингулярности (особенно в зонах, выделенных красным цветом) — одного из недостатков метода конечных элементов, когда имеет место некорректное распределение напряжений и деформаций в области углов, при жестких закреплениях и т.д.

**Заключение.** По результатам исследования разработана итерационная модель, позволяющая рассчитать давление прессования конгломерата частиц, механические характеристики которого зависят от степени уплотнения при упругом сжатии. При проведении итерационных расчётов, с увеличением числа этапов нагружения и уменьшением шага приращения верхней границы конгломерата, может быть построена дискретная зависимость давления прессования от степени сжатия среды, которую затем можно аппроксимировать гладкой кривой. Согласно серии расчётов на примере упругой задачи прессования конгломерата древесных частиц с учётом изменения модуля Юнга и плотности среды, в процессе сжатия получена нелинейная зависимость давления прессования от степени уплотнения среды и деформации сжатия. По построенным графическим зависимостям учёт сжимаемости конгломерата частиц существенно влияет на нелинейность изменения давления прессования как функции плотности среды при деформировании. По данным сравнительного анализа расчёт напряжённо-деформированного состояния сред, плотность которых существенно изменяется в процессе прессования и влияет на механические характеристики, недопустимо выполнять при постоянных значениях плотности ввиду значительных погрешностей. Это позволяет заключить, что сжимаемость среды, связанная с изменением плотности конгломерата частиц в процессе сжатия, существенно влияет на оценку давления прессования. Построенная итерационная модель позволит на практике оценить максимальное давление прессования, необходимое для обеспечения упругого сжатия конгломерата частиц до заданной геометрии с учётом зависимости механических характеристик от плотности среды. Предложенный подход может найти практическое применение при выборе оборудования для реализации процессов брикетирования древесных частиц при вторичном использовании отходов деревообработки. Дальнейшим направлением исследований представляется разработка математических моделей расчёта напряжённо-деформированного состояния и давления прессования при деформировании конгломерата частиц с использованием пресс-форм сложной геометрии.

#### Список литературы / References

1. Nazarenko VA, Pushkarev OI, Goncharova AV. Monitoring the Quality of Grinding Materials on the Basis of Their Granular Strength. *Russian Engineering Research*. 2009;29(10):1056–1058. <https://doi.org/10.3103/S1068798X09100219>
2. Мамбеталиев Т.С. Одномерная модель процесса импульсного уплотнения песчаных форм. *Известия ВУЗов Кыргызстана*. 2015;(7):20–23.
3. Mambetaliev TS. One-Dimensional Model of the Process of Pulsed Compaction of Sand Forms. *Izvestiya VUZov Kyrgyzstana*. 2015;(7):20–23. (In Russ.)
4. Михеевская М.А., Бурмистрова Д.Д., Стородубцева Т.Н., Швецова В.В., Рябухин П.Б., Григорьев Г.В. и др. Теоретическое исследование брикетирования древесных отходов с учетом нелинейного упрочнения сырья. *Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии*. 2022;(240):175–185. <https://doi.org/10.21266/2079-4304.2022.240.175-185>
5. Mikheevskaya MA, Burmistrova DD, Storodubtseva TN. Theoretical Study of Wood Waste Briquetting Taking into Account Nonlinear Strengthening of the Raw Materials. *Proceedings of the St. Petersburg Forestry Academy*. 2022;(240):175–185. <https://doi.org/10.21266/2079-4304.2022.240.175-185>
6. Чибиров О.В., Куницкая О.А., Григорьев М.Ф. Расчет потребного давления прессования опилок при формировании брикета. *Ремонт. Восстановление. Модернизация*. 2019;(2):22–25. <https://doi.org/10.31044/1684-2561-2019-0-2-22-25>

- Chibirev OV, Kunitskaya OA, Grigoriev MF. Calculation of Needed Pressure for Sawdust Pressing during Briquetting. *Repair, Reconditioning, Modernization*. 2019;(2):22–25. <https://doi.org/10.31044/1684-2561-2019-0-2-22-25>
5. Bouzouidja R, Tingting Vogt Wu, Sbartai M. Mechanical and Thermal Analysis of Performance of Compressed Earth Blocks with Sawdust Material Stabilized with Cement. In book: Amziane S, Merta I, Page J (eds). *Bio-Based Building Materials*. Cham: Springer; 2023. P. 324–332. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-33465-8\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-031-33465-8_26)
6. Руденко Б.Д., Кулик В.В. Описание прочности цементно-древесного конгломерата из кавитированных древесных частиц. *Тенденции развития науки и образования*. 2019;57(1):30–33. <https://doi.org/10.18411/j-12-2019-08>
- Rudenko BD, Kulak VV. Description of the Strength of a Cement-Wood Conglomerate Made of Cavitated Wood Particles. *Trends in the Development of Science and Education*. 2019;57(1):30–33. (In Russ.) <https://doi.org/10.18411/j-12-2019-08>
7. Bereziuk O, Petrov O, Vishtak I. The Impact of the Parameters of the Briquetting Process Using a Hydraulic Press on the Density Briquettes of Plant Waste. In book: Campilho RD, Ivanov V, Pinto GF, Baptista A, Silva FJG (eds). *Advances in Design, Simulation and Manufacturing VIII. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham: Springer; 2025. P. 83–97. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-95218-0\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-031-95218-0_8)
8. Shengnan Zhao, Lujia Han, Bing Gao, Pengfei Wu and Xian Liu. Effects of Wet Storage on Compression Molding of Sawdust and Mechanism Analysis. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2019;227(2):022024. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/227/2/022024>
9. Halimatuddahiana Nasution, Hamidah Harahap, Retno Riani, AI Pelawi. Effect of Pressing Temperature on the Mechanical Properties of Waste Styrofoam Filled Sawdust Composite. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018;309(1):012034. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/309/1/012034>
10. Rahmani H, Algirdas A, Shestavetska A, Vaiciukyniene D. Preparation and Mechanical Characterization of Pressed Carbonized Wood Sawdust Bio-Composite. *Scientific Reports*. 2025;15:14981. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-98658-w>
11. Camilo Oliveros-Gaviria, Edwin Cumbalaza, Jose Herminsu Mina-Hernandez, Mayra Eliana Valencia-Zapata, Juan Nicolas Suarez-Bonilla, Nicolas Martinez-Mera. Wood Plastic Composite Based on Recycled High-Density Polyethylene and Wood Waste (Sawdust). *Polymers*. 2024;16(22):3136. <https://doi.org/10.3390/polym16223136>
12. Adole AM, Anum I, Jamaludin MY, Suhaimi AR. Mechanical Characterization of Green Sandwich Composites from Kenaf Fiber Skins and Sawdust Core. *Discover Civil Engineering*. 2025;2:76. <https://doi.org/10.1007/s44290-025-00241-9>
13. Križan P. Construction and Types of Pressing Machines. In book: *Biomass Compaction*. Cham: Springer; 2022. P. 5–19. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-89956-1\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-89956-1_2)
14. Manakhov PV, Fedoseev OB. Elastoplastic Compression of a Rectangular Body: An Alternative Approach. *Russian Engineering Research*. 2009;29(1):20–23. <https://doi.org/10.3103/S1068798X09010067>
15. Власов Ю.Н. Теоретическое исследование влияния времени и скорости прессования на плотность брикетов из древесных опилок. *Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии*. 2019;(227):188–198. <https://doi.org/10.21266/2079-4304.2019.227.188-198>
- Vlasov YuN. Theoretical Study of the Effect of Pressing Time and Moulding Speed on Density of Sawdust Briquettes. *Proceedings of the St. Petersburg Forestry Academy*. 2019;(227):188–198. <https://doi.org/10.21266/2079-4304.2019.227.188-198>
16. Чибиров О.В., Власов Ю.Н., Кучер С.В., Куницкая О.А. Оценка упругих свойств конгломерата древесных частиц. *Системы. Методы. Технологии*. 2017;(1(33)):140–146. <https://doi.org/10.18324/2077-5415-2017-1-140-146>
- Chibirev OV, Vlasov YuN, Kucher SV, Kunitskaya OA. Evaluation of Elastic Properties of Wood Particles Conglomerate. *Systems. Methods. Technologies*. 2017;(1(33)):140–146. <https://doi.org/10.18324/2077-5415-2017-1-140-146>
17. Мюллер О.Д., Мелехов В.И., Любов В.К., Малыгин В.И. Влияние давления прессования на коэффициент бокового давления древесных гранул. *Известия высших учебных заведений. Лесной журнал*. 2013;(3):97–102. URL: [https://lesnoizhurnal.ru/issuesarchive/?ELEMENT\\_ID=56317&ysclid=mh4hl9lx33532851616](https://lesnoizhurnal.ru/issuesarchive/?ELEMENT_ID=56317&ysclid=mh4hl9lx33532851616) (дата обращения: 10.09.2025).
- Myuller OD, V.I. Melekhov VI, Lyubov VK, Malygin VI. The Effect of Compacting Pressure on the Side Pressure Coefficient of Wood Pellets. *Russian Forestry Journal*. 2013;(3):97–102. URL: [https://lesnoizhurnal.ru/issuesarchive/?ELEMENT\\_ID=56317&ysclid=mh4hl9lx33532851616](https://lesnoizhurnal.ru/issuesarchive/?ELEMENT_ID=56317&ysclid=mh4hl9lx33532851616) (accessed: 10.09.2025).
18. Feoktistov SI, Andrianov IK. Construction of Forming Limit Diagram for Sheet Blanks from Aviation Aluminum Alloys. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(1):7–16. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-1-7-16>
19. Shlyakhin DA, Savinova EV. Coupled Axisymmetric Thermoelectroelasticity Problem for a Round Rigidly Fixed Plate. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024;24(1):23–35. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-1-23-35>

**Об авторах:**

**Иван Константинович Андрианов**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Авиастроение и компьютерное проектирование» Комсомольского-на-Амуре государственного университета, (681013, Российской Федерации, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [ivan\\_andrianov\\_90@mail.ru](mailto:ivan_andrianov_90@mail.ru)

**Сергей Николаевич Иванов**, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Электромеханика» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (681013, Российская Федерация, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [snivanov57@mail.ru](mailto:snivanov57@mail.ru)

**Елена Константиновна Чепурнова**, лаборант-исследователь, кафедра «Авиастроение и компьютерное проектирование» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (681013, Российская Федерация, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [el.chep@bk.ru](mailto:el.chep@bk.ru)

***Заявленный вклад авторов:***

**И.К. Анрианов:** проведение исследования, разработка программного обеспечения.

**С.Н. Иванов:** разработка концепции, написание рукописи – рецензирование и редактирование.

**Е.К. Чепурнова:** проведение исследования.

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.**

***About the Authors:***

**Ivan K. Andrianov**, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Aircraft Engineering and Computer-Aided Design, Komsomolsk-na-Amure State University (27, Lenin Prospect, Komsomolsk-on-Amur, 681013, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [ivan\\_andrianov\\_90@mail.ru](mailto:ivan_andrianov_90@mail.ru)

**Sergey N. Ivanov**, Dr.Sci. (Eng.), Associate Professor, Professor of the Electrical Engineering Department, Komsomolsk-na-Amure State University (27, Lenin Prospect, Komsomolsk-on-Amur, 681013, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [snivanov57@mail.ru](mailto:snivanov57@mail.ru)

**Elena K. Chepurnova**, research laboratory assistant of the Department of Aircraft Engineering and Computer-Aided Design, Komsomolsk-na-Amure State University (27, Lenin Prospect, Komsomolsk-on-Amur, 681013, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [el.chep@bk.ru](mailto:el.chep@bk.ru)

***Claimed Contributorship:***

**IK Andrianov:** investigation, software.

**SN Ivanov:** conceptualization, writing – review & editing.

**EK Chepurnova:** investigation.

***Conflict of Interest Statement:* the authors declare no conflict of interest.**

***All authors have read and approved the final version of manuscript.***

**Поступила в редакцию / Received 02.09.2025**

**Поступила после рецензирования / Reviewed 26.09.2025**

**Принята к публикации / Accepted 06.10.2025**

# МЕХАНИКА MECHANICS



УДК 531.788

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2156>

Оригинальное эмпирическое исследование

## Исследование фактического значения времени вакуумирования мерной емкости эжектором

С.И. Савчук ID, Э.Д. Умеров ID

Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова, г. Симферополь, Республика Крым

[Ervin77@yandex.ru](mailto:Ervin77@yandex.ru)



EDN: XOCYKW

### Аннотация

**Введение.** В промышленности широко распространен процесс получения технологического вакуума с помощью эжекторов, использующих кинетическую энергию струи сжатого воздуха. Выбор необходимой модели эжектора, а при создании поля эжекторов также и их количества, осуществляется исходя из соответствия характеристик эжектора основным параметрам проектируемого технологического процесса. Одной из важных характеристик эжектора, существенно влияющих на повышение производительности всей вакуумной системы в целом, является время вакуумирования мерной (тарионированной) емкости. При этом в технической литературе данный параметр приводится не при максимальной глубине вакуума, производимого эжектором, и не при соответствующей этому значению величине питающего давления, а при некоторых, не вполне определенных параметрах, называемых изготавителями эжекторов оптимальными. В таких случаях невозможно точно оценить фактическое значение важного критерия. В связи с этим цель данной работы — путем экспериментальных исследований установить фактическое значение времени вакуумирования мерной (тарированной) емкости для различных типов эжекторов.

**Материалы и методы.** Экспериментальные исследования проводились на специально спроектированном и изготовленном авторами стенде, позволяющем изучать различные параметры вакуумных эжекторов. В частности, стенд дает возможность установить точное время вакуумирования мерной емкости эжекторами, имеющими диаметр сопла от 0,1 до 4,0 мм при величине питающего давления, обеспечивающего максимальную глубину вакуума для каждой исследуемой модели. Исследования проводились с использованием наиболее популярных вакуумных эжекторов семейств VEB, VEBL, VED и VEDL производства Camozzi при заранее определенной, точно заданной величине входного питающего давления для каждого типоразмера эжектора. Фактические значения времени вакуумирования при наибольшей глубине вакуума для каждого эжектора определялись экспериментально.

**Результаты исследования.** Установлено, что производительность эжекторов серий VEB, VEBL, VEDL и VED отличается от данных, приведенных в каталоге фирмы-изготовителя. Необходимое время для достижения максимальной глубины вакуума каждого из эжекторов превышает на 25–40 % приведенные производителем данные, и эта «погрешность» оказывается в итоге на производительности вакуумной системы.

**Обсуждение.** Экспериментальные данные показали, что отличие действительных значений времени вакуумирования мерной емкости от значений, приведенных в каталогах фирмы-изготовителя эжекторов, объясняется тем, что при проведении соответствующих испытаний изготовитель ориентируется не на максимальную глубину вакуума, созданную эжектором, а на глубину вакуума, созданную неким «оптимальным» (формулировка изготавителя) значением питающего давления. Практически во всех рассмотренных авторами статьи случаях это «оптимальное» питающее давление производило вакуум, глубина которого отличалась от максимальной. В этой связи представляется целесообразным вводить корректировку величины входного питающего давления для достижения максимальной глубины вакуума для каждого типа эжектора.

**Заключение.** Полученные значения времени создания вакуума в одном литре объема при максимальной глубине вакуума, производимого эжектором, позволяют осуществлять более точный выбор вакуумных эжекторов в зависимости от решаемых технологических задач, обеспечить наибольшую эффективность и экономичность автоматизированных вакуумных систем. Результаты исследований могут быть использованы всеми фирмами-изготовителями эжекторов для корректировки их базовых каталогов и соответствующих рекомендаций по применению этих изделий. Дальнейшие исследования в этой области будут направлены на изучение точности геометрических форм поверхности канала эжектора, чистоты обработки и технологии их производства, влияющие на прохождение воздушного потока.

**Ключевые слова:** глубина вакуума, вакуумный эжектор, мерная емкость, питающее давление эжекторов

**Благодарности.** Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам и редакторам журнала за внимательное отношение к статье и указанные замечания, устранение которых позволило улучшить качество статьи.

**Для цитирования.** Савчук С.И., Умеров Э.Д. Исследование фактического значения времени вакуумирования мерной емкости эжектором. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):300–310. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2156>

Original Empirical Research

## Investigation of the Actual Value of the Vacuum Time of a Measuring Vessel by Ejector

Sergey I. Savchuk   Ervin D. Umerov  

Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov, Simferopol, Republic of Crimea

 [Ervin77@yandex.ru](mailto:Ervin77@yandex.ru)

### Abstract

**Introduction.** In industry, the process of obtaining technological vacuum using ejectors that utilize the kinetic energy of a jet of compressed air is widely used. The selection of the required ejector model, as well as their number (when creating a field of ejectors), is performed proceeding from the compliance of the ejector characteristics with the key parameters of the designed process technology. One of the most important characteristics of an ejector, significantly affecting the overall performance of the vacuum system, is the evacuation time of the graduated (calibrated) container. However, in technical literature, this parameter is not specified for the maximum vacuum depth produced by the ejector, nor for the corresponding supply pressure, but for certain, less-defined parameters, referred to as optimal by ejector manufacturers. In such cases, it is impossible to accurately estimate the actual value of an important criterion. Therefore, the objective of this work is to experimentally determine the actual value of the vacuum time of a graduated (calibrated) vessel for various types of ejectors.

**Materials and Methods.** Experimental studies were performed on a stand specifically designed and manufactured by the authors, which made it possible to study various parameters of vacuum ejectors. In particular, the stand provided establishing the exact time of vacuuming a measuring vessel using ejectors with a nozzle diameter from 0.1 to 4.0 mm at a supply pressure value that induced the maximum vacuum depth for each model under study. The research was carried out using the most popular vacuum ejectors of the VEB, VEBL, VED and VEDL families manufactured by Camozzi at a pre-determined, precisely set input supply pressure for each ejector size. The actual values of the vacuum time at the highest vacuum depth for each ejector were experimentally determined.

**Results.** It has been established that the performance of VEB, VEBL, VEDL, and VED series ejectors differs from that stated in the manufacturer's catalog. The time required to reach maximum vacuum for each ejector exceeds the manufacturer's specifications by 25–40%, which impacts the performance of the vacuum system.

**Discussion.** The experimental data have shown that the actual values of the vacuum time of the measuring vessel differ from the values given in the catalogs of manufacturers of ejectors. This difference is explained by the fact that when conducting appropriate tests, manufacturers are guided not by the maximum vacuum depth created by the ejector, but by the vacuum depth created by a certain "optimal" (the wording of the ejector manufacturer) value of the supply pressure. In almost all the cases considered by us, this "optimal" supply pressure produced a vacuum, whose depth differed from the maximum. In this regard, it seems advisable to adjust the value of the inlet supply pressure to attain the maximum vacuum depth for each type of ejector.

**Conclusions.** The results of the obtained values of the vacuum creation time in one liter of volume at the maximum depth of the vacuum produced by the ejector provide a more accurate selection of vacuum ejectors depending on the required process tasks, ensure the greatest efficiency and cost-effectiveness of automated vacuum systems. The research results can be used by all ejector manufacturers to adjust their basic catalogs and appropriate recommendations for the use of these products. Further research will be conducted to study the accuracy of the geometric shapes of the surface of the ejector channel, the purity of processing, and their production technology, which affect the passage of air flow.

**Keywords:** vacuum depth, vacuum ejector, measuring vessel, ejector supply pressure

**Acknowledgements.** The authors would like to thank the reviewers and the Editorial board of the Journal for their attentive attitude towards the article and the comments indicated, the elimination of which allowed us to improve the quality of the article.

**For Citation.** Savchuk SI, Umerov ED. Investigation of the Actual Value of the Vacuum Time of a Measuring Vessel by Ejector. Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2025;25(4):300–310. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2156>

**Введение.** Развитие промышленности, постоянное совершенствование технологических процессов, внедрение инноваций в производство обуславливают все более широкое применение вакуума для перемещения деталей роботами и манипуляторами на участках сборки, конвейерных линиях, при напылении металлов в среде вакуума и т.д. Перемещение и позиционирование деталей сложной формы, особенно таких, как фольга или бумага, без применения вакуумных присосок не представляется возможным.

Ключевым параметром вакуумного эжектора выступает величина питающего давления. Его оптимальное значение обеспечивает глубокий вакуум, что создает условия для достижения максимальной эффективности устройства. Таким образом удается добиться высокой производительности вакуумной присоски, являющейся ключевым элементом вакуумной системы, где энергетические затраты сводятся к минимальному уровню.

В исследовании, представленном в работе [1], группа авторов рассматривала вакуумные эжекторы с различными конструктивными особенностями. Для проведения экспериментов использовался специализированный вакуумный стенд, при помощи которого измерялась величина создаваемого вакуума в зависимости от питающего давления на входе. Было установлено, что приведенные в каталогах фирм-производителей эжекторов данные о рекомендуемых значениях питающего давления отличаются от фактических значений, полученных экспериментальным путем.

Как правило, рекомендуемые фирмами-изготовителями эжекторов значения питающего давления не позволяют максимально полно использовать возможности изготавливаемых ими эжекторов, то есть рекомендуемые в каталогах значения «оптимального» питающего давления не обеспечивают получение максимальной глубины вакуума, которую может создать каждый рассматриваемый эжектор. Это снижает производительность устройства и, как следствие, уменьшает эффективность его исполнительного органа — присоски. Глубина вакуума, создаваемого эжектором, оказывает значительное влияние на технологическое время рабочего цикла. Чем более глубокий вакуум создает эжектор, тем короче технологическое время срабатывания присоски, тем быстрее работает участок, оснащенный вакуумной техникой. Выявление этого факта послужило поводом для продолжения экспериментальных исследований по определению времени создания вакуума различной глубины в одном литре объема мерной емкости при заданной величине питающего давления. Данный параметр вполне можно считать темпом работы эжектора, отражающим скорость срабатывания системы «эжектор — присоска» и напрямую влияющим на технологическое время работы этой пары. Он также приведен в каталогах фирм-изготовителей и напрямую влияет на работу вакуумной присоски и обеспечение гарантированной удерживающей силы.

Следует особо отметить, что эксперименты по определению времени вакуумирования мерной емкости проводились при заранее полученной величине питающего давления [1], которое обеспечивало максимальную глубину вакуума, производимую эжектором. Данная величина питающего давления устанавливалась на входе в эжектор в начале эксперимента.

В настоящее время известны эжекторы различных типов, которые используются в сверхзвуковых [2], паровых [3], холодильных [4] и других системах. Также имеются двухступенчатые эжекторы, применяемые в гидродинамике [5] и системах охлаждения [6], они позволяют в динамическом режиме управлять давлением, что повышает производительность производственного процесса.

Проведенные ранее исследования позволили разработать аналитический метод прогнозирования течения воздушного потока в сверхзвуковом воздушном эжекторе [7], была выдвинута теория о его скорости, сделан численный анализ работы эжектора [8], экспериментальным путем получены результаты его производительности [9], изучено с помощью вычислительной гидродинамики влияние отклонения первичного сопла на производительность эжектора [10], рассмотрено воздействие волны Маха на формирование границы движущегося потока в устройстве [11], сформулирована теория смешивания потоков [12] и т.д.

Имеется большое количество исследований, в которых показано применение различных видов как вакуумных эжекторов [13], так и вакуумной техники [14]. В работе [15] авторами раскрыты теоретические основы вакуума и их физическая сущность [16]. Однако практическим возможностям применения вакуума уделено очень мало внимания.

Автор в работе [17] рассматривает особенности применения сжатого воздуха в пневматических элементах, в [18] показаны результаты экспериментальных исследований с улучшенными характеристиками сопла эжектора, а в [19] представлен процесс моделирования воздушных потоков. Однако в современной научной и технической литературе практически не уделяется внимания вопросам, касающимся изучения параметров вакуумных эжекторов. Информация об их параметрах содержится в основном лишь в специализированных изданиях, например, в каталогах компаний, занимающихся производством вакуумной техники, таких как Schmalz, Festo, Camozzi, SMC и другие.

Учитывая все вышеизложенное, авторы поставили перед собой цель — путем экспериментальных исследований установить фактическое значение времени вакуумирования мерной (тарирированной) емкости для различных типов эжекторов.

**Материалы и методы.** Авторы ранее, в работе [1], исследовали вакуумные эжекторы при различном входном питающем давлении, регистрируя достигаемую величину глубины вакуума. После установления предельной величины вакуума при заданном питающем давлении были проведены измерения времени достижения вакуума в объеме, равном одному литру. Полученные данные могут быть использованы для оптимизации параметров вакуумной системы и повышения ее производительности.

Для проведения экспериментальных исследований был использован специальный стенд [20], фото которого представлено на рис. 1.

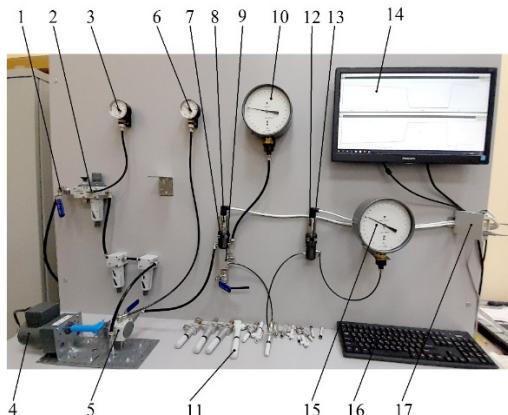


Рис. 1. Экспериментальный стенд:

- 1 — кран шаровой;
- 2 — блок воздухоподготовки;
- 3 — входной контрольный манометр;
- 4 — мотор-редуктор с электронным управлением;
- 5 — регулятор давления с запорным краном;
- 6 — контрольный манометр;
- 7, 13 — тройники пневматические;
- 8 — датчик избыточного давления МИДА-ДИ-15;
- 9 — раздаточный блочный коллектор;
- 10 — манометр деформационный образцовый;
- 11 — исследуемый вакуумный эжектор;
- 12 — датчик абсолютного давления МИДА-ДА-15;
- 14 — монитор;
- 15 — вакуумметр деформационный образцовый (класс точности 0,4);
- 16 — клавиатура компьютера;
- 17 — устройство связи МИДА-УС-410

В ходе проведенных исследований [1] фиксировались значения максимальной глубины вакуума, созданного эжектором в зависимости от входного питающего давления. В дальнейшем данные параметры были определены в качестве отправных значений при проведении серии экспериментов, направленных на установление временного интервала создания вакуума в объеме, равном одному литру.

Для проведения данной части эксперимента была спроектирована и изготовлена специальная герметичная емкость (рис. 2), оснащенная фитингами и запорной арматурой для возможности подключения ее к стенду и испытуемым эжекторам. Объем емкости был тщательно измерен сертифицированными средствами измерения, он равен 1000,03 мл.

Перед началом каждого эксперимента для всех эжекторов устанавливалось входное питающее давление, обеспечивающее максимальную глубину вакуума. Величина этого давления соответствовала экспериментальным данным, приведенным в работе [1], и устанавливалась при помощи контрольного манометра 10 и датчика давления 8 (рис. 1).

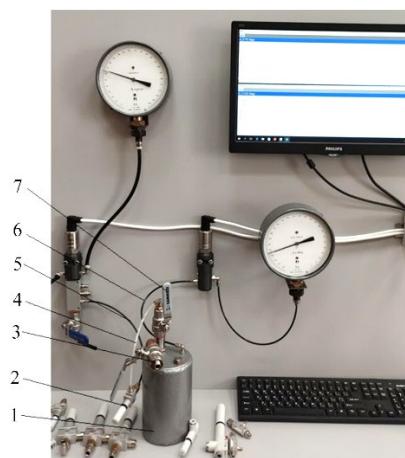


Рис. 2. Мерная емкость:

- 1 — мерная емкость;
- 2 — исследуемый вакуумный эжектор;
- 3 — шаровой кран;
- 4 — линия вакуума эжектора;
- 5 — линия входного давления эжектора;
- 6 — линия вакуума емкости;
- 7 — запорный шаровой кран

Мерная емкость 1 позволяет подключать к ней любые эжекторы, которые можно подсоединить к технологическому оборудованию при помощи ПХВ-трубок диаметром от 4 до 10 мм. По линии входного питающего давления 5 исследуемые эжекторы 2 подключаются к раздаточному коллектору 8 (рис. 1). По линии вакуума 4 исследуемые эжекторы подключаются к запорному крану 7, установленному непосредственно на мерной емкости 1. Мерная емкость 1 подключена линией вакуума 6 к тройнику 13 (рис. 1). Воздушный кран 3 соединяет мерную емкость с атмосферой.

Эксперимент проводился в следующем порядке. Воздушный кран 3 и запорный кран 7 закрывались. Затем исследуемый эжектор подключался к специализированному стенду, где на входе устанавливалось питающее давление, величина которого гарантировала достижение наибольшей глубины вакуума, после чего открывался запорный кран 7 и начиналось опустошение мерной емкости. Признаком полного опустошения являлось достижение в ней устойчивой глубины вакуума, что фиксировалось вакуумметром 12 и датчиком абсолютного давления 15 (рис. 1). После фиксации показаний приборов мерная емкость вновь заполнялась воздухом при атмосферном давлении, для чего закрывался запорный кран 7 и открывался воздушный кран 3.

**Результаты исследования.** На рис. 3–6 представлены диаграммы зависимости времени достижения глубины вакуума в одном литре объема от величины питающего давления для различных типов эжекторов. В таблицах 1–4 приведены данные питающего давления и глубины вакуума, полученные экспериментальным путем и предоставленные в каталоге фирмы-изготовителя.

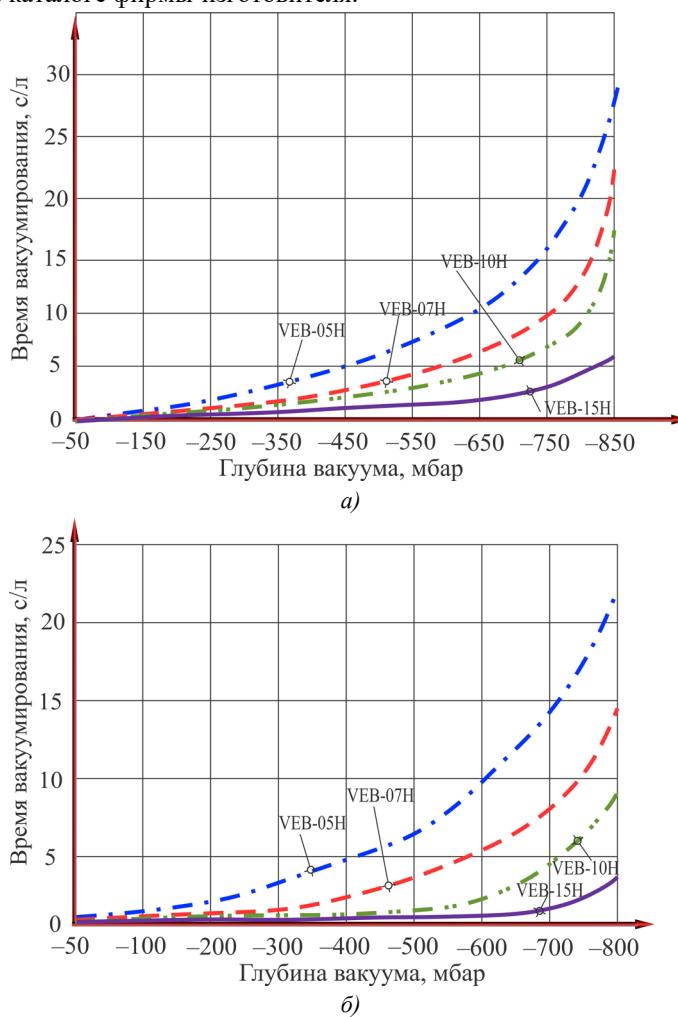


Рис. 3. Диаграммы зависимости времени создания вакуума в одном литре объема для эжекторов серии VEB:  
а — по данным авторов; б — по данным каталога фирмы

На рис. 3 приведены диаграммы зависимости времени вакуумирования мерной емкости для эжекторов серии VEB, полученные авторами (слева) и содержащиеся в каталоге изготовителя (справа). В таблице 1 приведены значения питающего давления, при котором были получены оптимальные значения величины глубины вакуума, также указаны рекомендуемые производителем значения оптимального питающего давления и ожидаемые значения глубины вакуума при этих значениях.

Таблица 1

Сравнительные данные питающего давления и глубины вакуума для эжекторов серии VEB

Модель эжектора	Данные изготовителя			Экспериментальные данные		
	Ø сопла, мм	Глубина вакуума, мбар	Оптимальное рабочее давление, бар	Максимальная глубина вакуума, мбар	Питающее давление, бар	Глубина вакуума при рекомендованном давлении, мбар
VEB-05H	0,5	182	4,5	96	4,73	115
VEB-07H	0,7	152	4,5	108	4,07	115
VEB-10H	1,0	152	5,0	132	4,90	133
VEB-15H	1,5	152	4,5	109	4,75	145

Анализ диаграмм и таблицы показывает, что характер кривых и время вакуумирования мерной емкости для эжекторов серии VEB схожи с данными, приведенными в каталоге фирмы-изготовителя. Установлено, что эжекторы позволяют достичь значительно большей глубины вакуума при более низких значениях питающего давления, то есть требуемый эффект достигается при более низких значениях питающего давления, чем рекомендованные изготовителем эжектора, что, безусловно, более экономично и безопасно. Более того, даже при величине питающего давления на входе в эжектор, равной рекомендуемому изготовителем «оптимальному» давлению, глубина вакуума все равно больше, чем заявляет изготовитель в своем каталоге (таблица 1). Также авторами установлено, что для эжектора VEB-15H даже при достижении максимальной глубины вакуума время, затрачиваемое на опустошение мерной емкости, на 70 % больше, чем приведено в каталоге фирмы-изготовителя.

На рис. 4 приведены диаграммы зависимости времени вакуумирования мерной емкости для эжекторов серии VEBL, полученные авторами (слева) и приведенные в каталоге изготовителя (справа). А в таблице 2 представлены значения питающего давления, при котором авторы получили наилучшие (оптимальные) значения глубины вакуума. Также здесь указаны рекомендуемые производителями значения оптимального питающего давления и ожидаемые значения глубины вакуума при этих значениях.

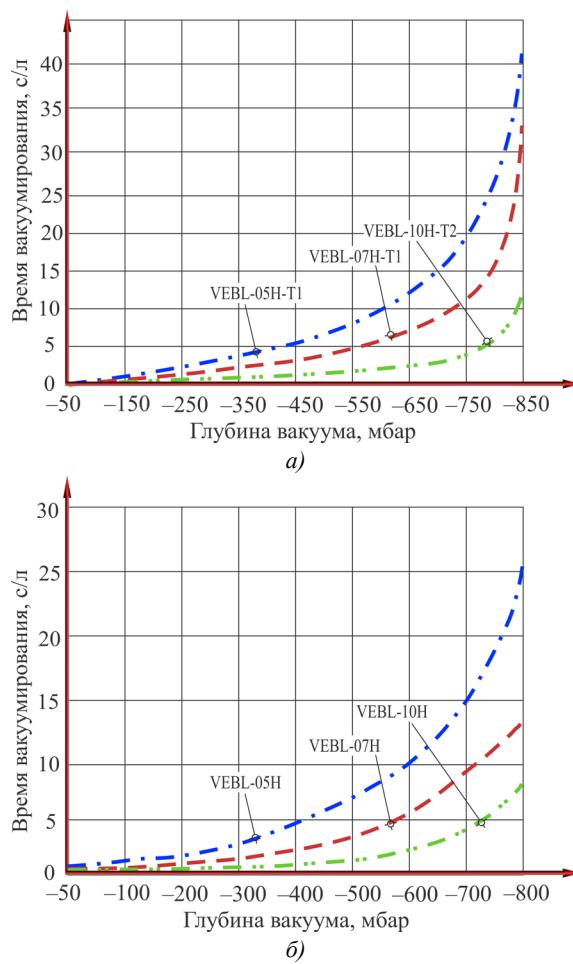


Рис. 4. Диаграммы зависимости времени создания вакуума в одном литре объема для эжекторов серии VEBL: а — по данным авторов; б — по данным каталога фирмы

Таблица 2

Сравнительные данные питающего давления и глубины вакуума для эжекторов серии VEBL

Модель эжектора	Данные изготовителя			Экспериментальные данные		
	Ø сопла, мм	Глубина вакуума, мбар	Оптималь. рабочее давление, бар	Максимал. глубина вакуума, мбар	Питающее давление, бар	Глубина вакуума при рекоменд. давлении, мбар
VEBL-05H-T1	0,5	160	4,5	121	4,20	127
VEBL-07H-T1	0,7	150	4,5	133	4,10	142

По данным диаграмм и таблицы видно, что характер кривых и время вакуумирования мерной емкости для эжекторов серии VEBL схожи с данными, приведенными в каталоге фирмы-изготовителя. Однако, поскольку эжекторы позволяют достичь значительно большей глубины вакуума при более низких значениях питающего давления, требуемый эффект достигается при более низких значениях питающего давления, чем рекомендует изготовитель эжектора, что, безусловно, более экономично и безопасно. Более того, даже при условии установления на входе в эжектор питающего давления, равного рекомендуемому изготовителем «оптимальному» давлению, глубина вакуума все равно больше, чем приводит изготовитель в каталоге (таблица 2). Также авторами установлено, что для эжектора VEBL-10H даже при достижении максимальной глубины вакуума время, затрачиваемое на опустошение мерной емкости, на 40 % больше, чем приведено в каталоге фирмы-изготовителя.

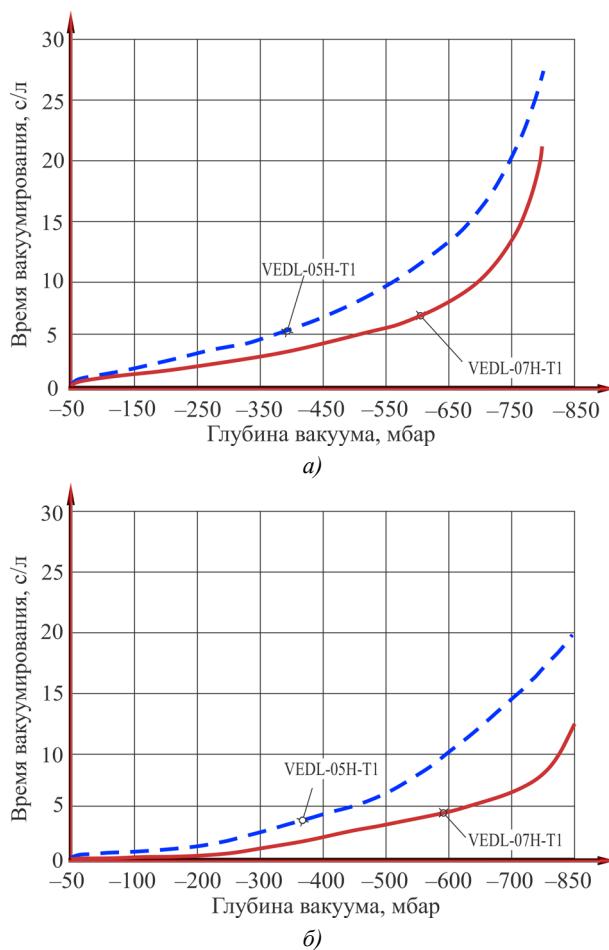


Рис. 5. Диаграммы зависимости времени создания вакуума в одном литре объема для эжекторов серии VEDL:  
а — по данным авторов; б — по данным каталога фирмы

На рис. 5 приведены диаграммы зависимости времени вакуумирования мерной емкости для эжекторов серии VEDL, полученные авторами (слева) и приведенные в каталоге изготовителя (справа). В таблице 3 представлены значения питающего давления, при котором получены наилучшие (оптимальные) значения глубины вакуума, также указаны и рекомендуемые производителями значения оптимального питающего давления, и ожидаемые значения глубины вакуума при этих значениях.

Таблица 3

Сравнительные данные питающего давления и глубины вакуума для эжекторов серии VEDL

Модель эжектора	Данные изготовителя			Экспериментальные данные		
	Ø сопла, мм	Глубина вакуума, мбар	Оптимальное рабочее давление, бар	Максимальная глубина вакуума, мбар	Питающее давление, бар	Глубина вакуума при рекоменд. давлении, мбар
VEDL-05H-T1	0,5	170	4,5	130	4,00	142
VEDL-07H-T1	0,7	150	4,5	207	3,40	256

Судя по диаграммам и данным таблицы, характер кривых и время вакуумирования мерной емкости для эжекторов серии VEDL схожи с данными, приведенными в каталоге фирмы-изготовителя.

Авторами установлено, что данные о производительности эжекторов серии VEDL отличаются от приведенных в каталоге фирмы-изготовителя. Так, для эжектора VEDL-05H-T1 время, необходимое для достижения максимального опустошения мерной емкости (-800 мбар), составило 27 сек. (время, приведенное в каталоге — 19 сек.), что на 40 % больше. Аналогично и для эжектора VEDL-07H-T1 время, необходимое для достижения максимального опустошения мерной емкости (-800 мбар), составило 20 сек. (приведенное в каталоге — 11 сек.), что больше на 81 %.

На рис. 6 приведены диаграммы зависимости времени вакуумирования мерной емкости для эжекторов серии VED, полученные авторами (слева) и приведенные в каталоге изготовителя (справа). А в таблице 4 даны значения питающего давления, при котором получены наилучшие значения глубины вакуума, также здесь указаны рекомендуемые производителями значения оптимального питающего давления и ожидаемые значения глубины вакуума при этих значениях.

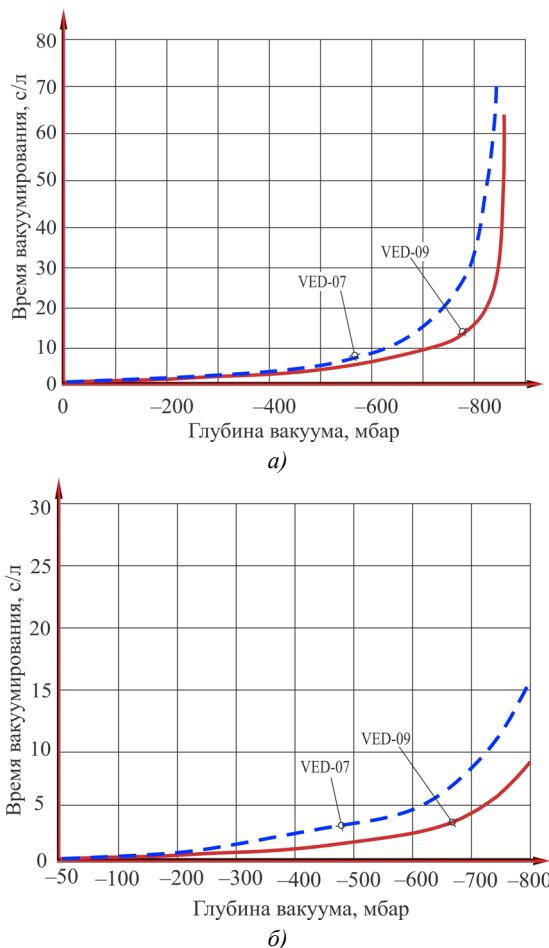


Рис. 6. Диаграммы зависимости времени создания вакуума в одном литре объема для эжекторов серии VED: а — по данным авторов; б — по данным каталога фирмы

Таблица 4

Сравнительные данные питающего давления и глубины вакуума для эжекторов серии VED

Модель эжектора	Данные изготовителя			Экспериментальные данные		
	Ø сопла, мм	Глубина вакуума, мбар	Оптимальное рабочее давление, бар	Максимальная глубина вакуума, мбар	Питающее давление, бар	Глубина вакуума при рекоменд. давлении, мбар
VED-07	0,7	101	5,0	405	4,70	409
VED-09	0,9	111	5,0	120	4,20	133

Анализ экспериментальных данных показывает, что характер кривых и время вакуумирования мерной емкости для эжекторов серии VED схожи с кривыми, приведенными в каталоге фирмы-изготовителя.

При этом авторы установили, что производительность эжекторов серии VED отличается от приведенной в каталоге фирмы-изготовителя. Так, для эжектора VED-07 время, необходимое для достижения максимального опустошения мерной емкости (~800 мбар), составило 20 сек. (приведенное в каталоге — 15 сек.), что больше на 33 %. Для эжектора VED-09 время, необходимое для достижения максимального опустошения мерной емкости (~800 мбар), составило 10 сек. (приведенное в каталоге — 8 сек.), что больше на 25 %.

**Обсуждение.** Полученные экспериментальным путем данные фактического времени вакуумирования мерной емкости эжекторами отличаются от данных, приведенных в каталогах фирм-изготовителей. К положительным фактам здесь можно отнести то, что объявленные изготовителем значения глубины вакуума достигаются при гораздо меньших значениях питающего давления, чем представлено в каталогах. Более того, реальная глубина вакуума существенно более эффективна, чем объявлено изготовителем. Однако реальное время опустошения мерной емкости оказалось большим, чем заявляли изготовители в своих каталогах. Иногда превышение этого времени значительно.

Данный факт может иметь существенное значение для построения технологического цикла работы оборудования, поскольку отражает реальные возможности определенных типов эжекторов по темпам создания вакуума. Этим самым подчеркивается важность такого параметра, как время вакуумирования мерной емкости, для выбора эжекторов. Данное свойство особенно важно для расчетного определения требуемого количества времени при построении поля эжекторов, чтобы поддерживать на необходимом уровне глубину вакуума.

**Заключение.** Анализ данных, полученных в ходе эксперимента, показывает, что характер кривых при вакуумировании мерной емкости для эжекторов серий VEB, VEBL, VEDL и VED схож с данными, приведенными в каталоге фирмы-изготовителя. Однако отличается время, необходимое каждому из эжекторов для достижения максимальной глубины вакуума, оно превышает на 25–40 % время, указанное производителями. Данный факт влияет на производительность как самого эжектора, так и вакуумной системы в целом. В связи с этим при решении технологических задач на производстве необходимо проводить тщательный отбор вакуумных эжекторов, чтобы обеспечить наибольшую эффективность и экономичность автоматизированных вакуумных систем.

Результаты исследований могут быть использованы в качестве рекомендаций по применению эжекторов и для корректировки каталогов фирм-производителей.

Дальнейшие исследования в этой области будут направлены на изучение точности геометрических форм поверхности канала эжектора, чистоты обработки и технологии их производства, влияющие на прохождение воздушного потока.

#### Список литературы / References

1. Savchuk SI, Umerov ED, Abdulgazis AU. Investigation of the Optimal Vacuum Depth Created by the Ejector Depending on the Value of the Supply Pressure. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(1):43–51. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-43-51>
2. Xinyue Hao, Jiwei Yan, Neng Gao, Volovyk O, Yifan Zhou, Guangming Chen. Experimental Investigation of an Improved Ejector with Optimal Flow Profile. *Case Studies in Thermal Engineering*. 2023;47:103089. <https://doi.org/10.1016/j.csite.2023.103089>
3. Yongzhi Tang, Zhongliang Liu, Can Shi, Yanxia Li. A Novel Steam Ejector with Pressure Regulation to Optimize the Entrained Flow Passage for Performance Improvement in MED-TVC Desalination System. *Energy Conversion and Management*. 2018;172(8):237–247. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2018.07.022>
4. Tashtoush BM, Al-Nimr MA, Khasawneh MA. A Comprehensive Review of Ejector Design, Performance, and Applications. *Applied Energy*. 2019;240:138–172. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2019.01.185>

5. Elhub B, Mat S, Sopian K, Elbreki AM, Ruslan MH, Ammar AA. Performance Evaluation and Parametric Studies on Variable Nozzle Ejector Using R134A. *Case Studies in Thermal Engineering.* 2018;12:258–270. <https://doi.org/10.1016/j.csite.2018.04.006>
6. Tao Hai, Masood Ashraf Ali, Dhahad HA, Alizadeh A, Sharma K, Sattam Fahad Almojil, et al. A Novel Bi-Evaporator Cooling System via Integration of Absorption Refrigeration Cycle for Waste Energy Recovery from an Ejector-Expansion Trans-Critical CO<sub>2</sub> (EETRCC) Cycle: Proposal and Optimization with Environmental Considerations. *Sustainable Energy Technologies and Assessments.* 2023;57(12):103118. <http://doi.org/10.1016/j.seta.2023.103118>
7. Arvind Kumar, Surendra Yadav, Virendra Kumar, Abhishek Kulkarni. A Comprehensive Exploration of Ejector Design, Operational Factors, Performance Metrics, and Practical Applications. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.* 2024;46:39. <https://doi.org/10.1007/s40430-023-04618-8>
8. Mazzelli F, Little AB, Garimella S, Bartosiewicz Y. Computational and Experimental Analysis of Supersonic Air Ejector: Turbulence Modeling and Assessment of 3D Effects. *International Journal of Heat and Fluid Flow.* 2015;56:305–316. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.08.003>
9. Yin-Hai Zhu, Yanzhong Li. Novel Ejector Model for Performance Evaluation on Both Dry and Wet Vapors Ejectors. *International Journal of Refrigeration.* 2009;32(1):21–31. <https://doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2008.08.003>
10. Yuyan Hou, Fengwu Chen, Sheng Zhang, Weixiong Chen, Jiantao Zheng, Daotong Chong, et al. Numerical Simulation Study on the Influence of Primary Nozzle Deviation on the Steam Ejector Performance. *International Journal of Thermal Sciences.* 2022;17:107633. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2022.107633>
11. Zuozhou Chen, Chaobin Dang, Eiji Hihara. Investigations on Driving Flow Expansion Characteristics inside Ejectors. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2015;108(A):490–500. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.12.040>
12. Sunghoon Baek, Seungbin Ko, Simon Song, Sungmin Ryu. Numerical Study of High-Speed Two-Phase Ejector Performance with R134a Refrigerant. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2018;126(A):1071–1082. <http://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.05.053>
13. Levchenko DA, Meleychuk SS, Arseniev VM. Substantive Provision of a Method of Calculation Vortical Ejector Stage of the Vacuum Unit. *Procedia Engineering.* 2012;39:28–34. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.07.004>
14. Kumar V, Sachdeva G. 1-D Model for Finding Geometry of a Single Phase Ejector. *Energy.* 2018;165(A):75–92. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.09.071>
15. Arun Kumar R, Rajesh G. Physics of Vacuum Generation in Zero-Secondary Flow Ejectors. *Physics of Fluids.* 2018;30(6):066102. <https://doi.org/10.1063/1.5030073>
16. Karthick SK, Rao SM, Jagadeesh G, Reddy KP. Parametric Experimental Studies on Mixing Characteristics within a Low Area Ratio Rectangular Supersonic Gaseous Ejector. *Physics of Fluids.* 2016;28(7):076101. <https://doi.org/10.1063/1.4954669>
17. Гессе С. *Сжатый воздух как носитель энергии.* Москва: Фесто; 2004. 128 с.
- Hesse S. *Compressed Air as an Energy Carrier.* Moscow: Festo; 2004. 128 p. (In Russ.)
18. Goodman N, Leege BJ, Johnson PE. An Improved de Laval Nozzle Experiment. *International Journal of Mechanical Engineering Education.* 2021;50(2):513–537. <https://doi.org/10.1177/03064190211034165>
19. Moukalled F, Mangani L, Darwish M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics.* Berlin, Heidelberg: Springer; 2016. 113 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-16874-6>
20. Савчук С.И., Умеров Э.Д., Абдулгазис У.А. Стенд для оценки глубины вакуума, подводимого к специализированным присоскам, используемым в технологических процессах сервиса при эксплуатации и производстве автомобилей. *Ученые записки Крымского инженерно-педагогического университета.* 2023;82(4):225–230. <https://doi.org/10.34771/UZCEPU.2023.82.4.043>
- Savchuk SI, Umerov ED, Abdulgazis UA. Stand for Assessing the Depth of Vacuum Supplied to Specialized Suction Cups Used in Technological Processes of Service during Operation and Production of Cars. *Scientific Notes of the Crimean Engineering and Pedagogical University.* 2023;82(4):225–230. <https://doi.org/10.34771/UZCEPU.2023.82.4.043>

**Об авторах:**

**Сергей Игоревич Савчук**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Автомобильный транспорт и организация дорожного движения» Крымского инженерно-педагогического университета имени Февзи Якубова (295015, Республика Крым, г. Симферополь, пер. Учебный, 8), [ORCID](#), [ofelos@outlook.com](mailto:ofelos@outlook.com)

**Эрвин Джеватович Умеров**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Автомобильный транспорт и организация дорожного движения» Крымского инженерно-педагогического университета имени Февзи Якубова (295015, Республика Крым, г. Симферополь, пер. Учебный, 8), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [Ervin777@yandex.ru](mailto:Ervin777@yandex.ru)

**Заявленный вклад авторов:**

**С.И. Савчук:** разработка концепции, проведение исследования.

**Э.Д. Умеров:** валидация результатов, написание рукописи, рецензирование и редактирование.

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.**

**About the Authors:**

**Sergey I. Savchuk**, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Automobile Transport and Traffic Management, Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov (8, Uchebnyi Lane, Simferopol, 295015, Republic of Crimea), [ORCID](#), [ofelos@outlook.com](mailto:ofelos@outlook.com)

**Ervin D. Umerov**, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Automobile Transport and Traffic Management, Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov (8, Uchebnyi Lane, Simferopol, 295015, Republic of Crimea), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [Ervin777@yandex.ru](mailto:Ervin777@yandex.ru)

**Claimed Contributorship:**

**SI Savchuk:** conceptualization, investigation.

**ED Umerov:** validation, writing – review & editing

**Conflict of Interest Statement:** the authors declare no conflict of interest.

**All authors have read and approved the final manuscript.**

**Поступила в редакцию / Received** 04.09.2025

**Поступила после рецензирования / Reviewed** 29.09.2025

**Принята к публикации / Accepted** 06.10.2025

# МЕХАНИКА MECHANICS



УДК 531.383

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2202>

## Оптический метод идентификации несовершенств материала в заготовке резонатора волнового твердотельного гироскопа

С.А. Шевченко , И.А. Попов , Б.Е. Мельников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург,  
Российская Федерация

[shevchenko.sergei.a@yandex.ru](mailto:shevchenko.sergei.a@yandex.ru)



EDN: TVJRQI

### Аннотация

**Введение.** Создание высокоточных систем ориентации нового поколения с улучшенными техническими характеристиками остаётся ключевой задачей точного приборостроения — это необходимо для надёжной работы подвижных объектов длительного срока эксплуатации. Одним из перспективных путей является применение датчиков, основанных на эффекте Брайана (волновой твердотельный гироскоп, ВТГ), которые показывают существенные преимущества по стабильности характеристик в условиях внешних факторов. За последние 10 лет зарубежные и отечественные исследования достигли заметных успехов в повышении целевых параметров ВТГ, однако определенные проблемы совершенствования остаются открытыми. Так, в литературе уделяется внимание снижению погрешностей измерения ВТГ за счёт компенсации влияния несовершенств резонатора, но чаще эти методы применимы на стадиях после формообразования. Недостаточно разработаны методы ранней идентификации неоднородностей материала (разноплотности) на этапе контроля заготовок, что создаёт пробел в технологической цепочке и снижает эффективность последующей балансировки и калибровки. Цель работы — разработать метод идентификации разноплотности резонатора на ранней технологической стадии — на этапе контроля заготовки.

**Материалы и методы.** Рассматривается оптически прозрачный материал — кварцевое стекло, являющееся наиболее распространённым материалом для изготовления резонаторов ВТГ, в частности марка КУ-1. Метод идентификации основан на связи оптических свойств кварцевого стекла (коэффициента поглощения) с искомым объёмным распределением плотности заготовки. Проведён виртуальный эксперимент, включающий формирование и решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) по результатам серии измерений интенсивности светового пучка, прошедшего через заготовку. Для описания распределения плотности использована полиномиальная аппроксимация, что повышает робастность метода. Решение СЛАУ получено через поиск псевдорешения методом наименьших квадратов на базе сингулярного разложения.

**Результаты исследования.** Разработан метод идентификации разноплотности кварцевого стекла на этапе контроля качества технологической заготовки резонатора ВТГ. Получено искомое распределение плотности кварцевого стекла по объёму заготовки, совпадающее с «истинным» — отклонение не превышает 5 %. Оценена чувствительность метода к наличию макродефектов в объёме заготовки — пор, пузырьков и пр.

**Обсуждение.** Результаты показывают, что применение предложенного метода позволяет эффективно контролировать разноплотность заготовок и оптимизировать технологию производства резонаторов, обеспечивая повышение результативности процессов минимизации влияния несовершенств на их характеристики. Виртуальные эксперименты продемонстрировали, что измерение интенсивности светового луча, прошедшего через заготовку, позволяет восстановить распределение коэффициента поглощения и плотности с точностью не менее 0,005 %. Созданная система линейных алгебраических уравнений обеспечила возможность определения этих параметров по объему. Подчеркнуты некоторые особенности, касающиеся решения неопределенных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Пристальное внимание удалено необходимости контроля соотношения между количеством корней и неизвестных для получения устойчивого решения.

**Заключение.** Предложенный метод идентификации разноденности кварцевого стекла на этапе контроля качества заготовки при производстве резонаторов ВТГ показывает высокую эффективность и точность. Метод позволяет адекватно описывать функцию распределения и гибко настраивать оптимальную размерность СЛАУ, напрямую связанную с объемом проводимых экспериментов. Полученные результаты подтверждают применимость оптических характеристик материала для контроля объемного распределения плотности, что даёт возможность улучшить контроль заготовок и оптимизировать производственные процессы. Требуемая точность измерений, обусловленная уровнем разноденности, влияющим на характеристики ВТГ, практически достижима, что свидетельствует о реальной возможности внедрения метода в производстве. Данный подход может быть использован в последующих исследованиях и разработках высокоточных систем, способствуя прогрессу в точном приборостроении и повышению качества выпускаемой продукции.

**Ключевые слова:** ВТГ, полусферический резонатор, идентификация, расщепление частоты, несовершенства, оптика, метод наименьших квадратов

**Благодарности.** Авторы благодарят А.В. Лукина, кандидата физико-математических наук, доцента ВШ МПУ СПБПУ и А.Н. Беляева, старшего преподавателя БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, проводивших экспертные интервью совместно с авторами статьи.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №25-21-00278, <https://rsrf.ru/project/25-21-00278/>

**Для цитирования.** Шевченко С.А., Попов И.А., Мельников Б.Е. Оптический метод идентификации несовершенств материала в заготовке резонатора волнового твердотельного гироскопа. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):311–323. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2202>

Original Theoretical Research

## Optical Method for Material Imperfections Identification in the Resonator Workpiece of Hemispherical Vibratory Gyroscope

Sergei A. Shevchenko  , Ivan A. Popov  , Boris E. Melnikov 

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

✉ [shevchenko.sergei.a@yandex.ru](mailto:shevchenko.sergei.a@yandex.ru)

### Abstract

**Introduction.** The implementation of high-precision attitude control systems of a new generation with improved technical characteristics remains a key task in precision instrumentation — this is required for the reliable operation of moving objects with a long service life. One of the promising ways is the use of sensors based on the Bryan effect (hemispherical resonator gyroscopes, HRG), which show significant advantages in stability of characteristics under external factors. Over the past 10 years, foreign and domestic research has reached noticeable success in increasing the target parameters of HRG, however, certain improvement problems remain open. Thus, in the literature, attention is paid to reducing the errors in measuring the HRG through compensating for the impact of imperfections of the resonator, but more often these methods are applicable at stages after geometry generation. Methods for early identification of material inhomogeneities (density variation) during workpiece inspection are insufficiently developed, creating a gap in the process chain and reducing the efficiency of subsequent balancing and calibration. The objective of this study is to develop a method for identifying resonator density variations at an early stage of the process — during workpiece inspection.

**Materials and Methods.** An optically transparent material is considered — fused quartz glass, which is the most common material for making a HRG resonator, in particular, the KU-1 brand (foreign analogs — Corning HPFS 7980, JGS1). The identification method is based on the relationship of the optical properties of quartz glass (absorption coefficient) with the desired density distribution over the volume of the workpiece. A virtual experiment was conducted, which consisted in the formation and resolution of a system of linear algebraic equations (SLAE) based on the measurements series results of a light beam intensity passing through a workpiece. A polynomial approximation was used to describe the density distribution in order to increase the robustness of the method. The SLAE roots were obtained through finding a pseudosolution by the least square method based on the singular value decomposition.

**Results.** A method for identifying the density variation of quartz glass at the stage of quality control of the technological workpiece of the HRG resonator was developed. The desired density distribution of quartz glass over the volume of the workpiece was obtained, coinciding with the “true” one — the difference was no more than 5%. The sensitivity of the method to the presence of macrodefects in the volume of the workpiece (pores, bubbles, etc.) was assessed.

**Discussion.** The results show that the proposed method can effectively control the density variation of the workpieces and optimize the resonator production, thereby improving the efficiency of the processes and minimizing the impact of imperfections on their characteristics. Virtual experiments have demonstrated that measuring the light beam intensity passing through the workpiece allows for the accurate reconstruction of the absorption coefficient and density distribution with an accuracy of at least 0.005%. The developed system of linear algebraic equations (SLAE) makes it possible to determine these parameters by volume. The paper highlights some features related to solving uncertain SLAE. Particular attention is paid to the need to control the ratio between the number of roots and unknowns to obtain a stable solution.

**Conclusion.** The proposed method for identifying the density variation of quartz glass at the stage of workpiece quality control in the production of HRG resonators demonstrates high efficiency and accuracy. The presented method has high accuracy for describing the distribution function, and is also flexible in terms of obtaining the optimal dimension of the SLAE, which is directly related to the number of experiments performed. The obtained results confirm the applicability of the material optical properties for controlling the density distribution over the volume, which allows for improved control of workpieces and optimization of production processes. The required measurement accuracy, determined by the level of density variation that affects the HRG characteristics, is practically achievable, which indicates that the method can be used in the manufacturing process. This approach can be applied in future research and development of high-precision systems, which will contribute to progress in the precision instrumentation industry and improve the quality of manufactured products.

**Keywords:** HRG, hemispherical resonator, identification, frequency splitting, imperfections, optics, least squares method

**Acknowledgements.** The authors would like to thank A.V. Lukin, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor at the Higher School of Mechanics and Control Processes, SPbPU, and A.N. Belyaev, Senior Lecturer of Department of Deformable Solid Mechanics, BSTU “VOENMEKH” named after D.F. Ustinov, who conducted expert interviews together with the authors of the article.

**Funding Information.** The research was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 25-21-00278), <https://rscf.ru/project/25-21-00278/>

**For Citation.** Shevchenko SA, Popov IA, Melnikov BE. Optical Method for Material Imperfections Identification in the Resonator Workpiece of Hemispherical Vibratory Gyroscope. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):311–323. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2202>

**Введение.** В настоящий момент сохраняет свою актуальность направление разработки высокоточных систем определения положения тел в пространстве (навигационные комплексы, НК), основанных на датчиках (волновые твердотельные гироскопы, ВТГ), принцип действия которых связан с эффектом прецессии упругой волны (эффект Брайана) — ВТГ [1, 2]. Актуальность применения ВТГ для построения НК различного назначения прежде всего обусловлена очевидными преимуществами таких приборов по сравнению с устройствами, использующими иные физические принципы: лучшими массогабаритными характеристиками, устойчивостью к механическим воздействиям, энергоэффективностью, большим ресурсом и временем готовности и др. [3]. В условиях тенденции к увеличению требуемого назначенного ресурса при создании новых подвижных объектов перечисленные преимущества дают возможность увеличить массу полезной нагрузки, оптимизировать компоновку и, что важнее, снизить накопленную погрешность НК и нагрузку на энергетические системы.

С развитием методов проектирования и моделирования, а также технологий изготовления ВТГ улучшаются и их технические характеристики, что позволяет создавать НК различных классов точности и, соответственно, применять их в самых разных областях науки и техники, в том числе в космическом приборостроении [4]. Большое число работ, опубликованных ведущими отечественными научными коллективами, посвящено вопросам разработки, конструирования и технологии изготовления ВТГ [5]. Это стимулируется как достижениями иностранных компаний в части реализованных технических показателей ВТГ [6], так и созданием НК на их основе [7].

Несмотря на фундаментальные труды и передовые результаты наших соотечественников и их учеников — академиков В.Ф. Журавleva и Д.М. Климова [8], профессоров Б.С. Лунина, М.А. Басараба и В.А. Матвеева [9], И.В. Меркурьева [10], К.В. Шишакова [4] — а также достижения зарубежных групп под руководством D.D. Lynch [11], D. Roselle [12], B.J. Shaw [13], S. Zотов, A. Trusov и A. Shkel [14] — остаются направления и способы дальнейшего совершенствования ВТГ. Это позволяет следовать передовому тренду современного точного приборостроения — разработке высокоточных НК, на базе различных чувствительных элементов [1], [15], в том числе на базе ВТГ [16].

Одним из направлений является минимизация влияния несовершенств главного чувствительного элемента ВТГ — резонатора [8] на ключевые параметры изделия, в частности на расщепление его рабочей собственной частоты [9]. При обсуждении влияния несовершенств встает вопрос о способе их идентификации. Большинство существующих работ и исследований [3], [5] посвящены оценке уровня несовершенства и его компенсации на этапах механической и электрической балансировки; при этом практически отсутствуют исследования, предлагающие методику идентификации на более ранних стадиях производства, например, при контроле качества технологической заготовки. Возможность определения функции распределения свойств материала, например, плотности, по объему на стадии отбора заготовок позволяет сократить производственные затраты за счет селекции по критерию допустимой величины амплитуды несовершенства и выбора оптимального направления формообразования. Это, в свою очередь, уменьшает продолжительность технологического цикла механической балансировки и, как следствие, снижает расщепление рабочей частоты. Необходимость контроля разноплотности дополнительно продиктована существующими методами оценки качества материала, которые ориентированы на его основное применение — кварцевое стекло прежде всего рассматривается как оптический материал, поэтому фокус контроля смешен в сторону соответствующих параметров.<sup>1</sup> Однако, рассматривая кварцевое стекло как материал чувствительного элемента ВТГ, целесообразно контролировать свойства и их распределение по объему, определяющие динамические характеристики (плотность, модуль упругости и др.). В связи с этим в настоящей работе предлагается методика идентификации разноплотности, которой ранее не было.

Цель настоящей работы — разработка метода идентификации несовершенства типа «разноплотность» на основе измерения оптических свойств материала резонатора ВТГ, предназначенного для использования на этапе контроля качества технологической заготовки резонатора. В рамках работы будет проверена возможность определения функции распределения плотности по объему посредством прямого измерения интенсивности светового луча, прошедшего через заготовку, ввиду существующей связи между плотностью и оптическими свойствами кварцевого стекла.

**Материалы и методы.** В качестве объекта испытаний (в рамках виртуального эксперимента) была рассмотрена заготовка (кубик) из кварцевого стекла марки КУ-1 с длиной ребра 30 мм. Определение разноплотности по объему заготовки осуществлялось через серию экспериментов по измерению интенсивности светового луча, прошедшего через заготовку. При этом, для упрощения, рассматривалось прохождение луча в поперечном сечении заготовки (т.е. плоская задача). На рис. 1 представлена расчетно-экспериментальная схема, использованная для идентификации несовершенства в виде разноплотности.



Рис. 1. Расчетно-экспериментальная схема для идентификации разноплотности

В рамках методики была проведена дискретизация сечения заготовки на 9 элементов, каждому из которых соответствовало свое значение плотности в пределах установленного допуска, характерного для материала. При этом минимальный размер элемента определялся минимальным диаметром светового луча, генерируемого источником света. Для упрощения вычислений в каждом из измерений предполагалось, что световой луч падал по нормали к поверхности заготовки. На основе генерации светового луча постоянной частоты (длины волны) и заданной интенсивности, проводилось измерение интенсивности прошедшего света, что позволило определить поглощающую способность материала. Длина волны выбиралась вдали от оптического резонанса, чтобы сохранить справедливость ранее представленных соотношений для нерезонансного участка [17]. Величина коэффициента поглощения учитывала габариты заготовки, что позволяло фиксировать изменения интенсивности светового луча. В результате измерений интенсивности света, прошедшего через заготовку, на основе закона Бугера формировалась система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение которой позволяло получить искомое распределение плотности материала.

<sup>1</sup> ГОСТ 15130–86. Стекло кварцевое оптическое. Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200023786> (дата обращения: 10.10.2025).

Известно, что в рамках электромагнитной оптики [18] интенсивность светового луча, прошедшего через сплошную среду, может быть описана законом Бугера-Ламберта-Берра (в гауссовой системе единиц) [19]:

$$I = I_0 \exp(-\delta z),$$

где  $\delta$  — коэффициент поглощения;  $z$  — расстояние, прошедшее световым лучем. Учитывая дисперсию света — зависимость оптических свойств среды от частоты проходящей электромагнитной волны, принимая за основу модель дисперсии по Лоренцу, основанную на осцилляторной модели атома, возможно определить связь плотности и коэффициента поглощения:

$$\delta(\omega) = \frac{\pi N e^2}{mc} \frac{\Gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

где  $m$  и  $e$  — масса и заряд возбужденного световой волной электрона;  $c$  — скорость света;  $\omega_0$  — резонансная частота колебаний электрона;  $\omega$  — частота световой волны (возбуждения);  $\Gamma$  — коэффициент затухания колебаний;  $N = \frac{N_{A\rho}}{M}$  — количество атомов в единице объема ( $N_A$  — число Авогадро;  $M$  — молярная масса;  $\rho$  — плотность среды).

В силу прямо-пропорциональной зависимости коэффициента поглощения от плотности в дальнейшем рассматривалось именно его распределение по объему, подразумевая, что изменение плотности также может быть найдено.

В обеспечение формирования СЛАУ закон Бугера представляется в виде:

$$\sum_{h=1}^{u/2} \left( \frac{z}{\ln\left(\frac{I_u}{I_0}\right)} \cdot \frac{\delta_h}{u/2} \right) = -1,$$

где  $I_u$ ,  $\delta_h$  — интенсивность прошедшего луча через заготовку для  $u$ -го эксперимента и среднее значение показателя поглощения для  $h$ -го элемента в  $u$ -ом эксперименте, соответственно;  $z = const$  — габарит заготовки;  $I_0 = const$  — интенсивность генерируемого светового луча. Отметим, что рассматривалась система из  $q$  элементов с равным количеством элементов на ребре, из чего следует, что количество уравнений  $u = 2\sqrt{q}$  при количестве неизвестных  $l = h = q$ . Записывая СЛАУ в матричной форме, получили:

$$A \cdot x = b,$$

где,  $A_{u \times l}$  — основная матрица системы;  $x_l$  — вектор неизвестных;  $b_u$  — вектор свободных членов.

Предполагая непрерывность и плавность распределения плотности по объему, распределение коэффициента поглощения представляется в виде двумерного полинома  $p$ -ой степени. В таком случае количество неизвестных не будет зависеть от количества элементов и будет составлять  $l = (p+1)^2$ . Наоборот, степень дискретизации системы и количество элементов будет определяться установившимся решением СЛАУ и соответствующей требуемой степенью полинома. Другими словами, появляется возможность управлять данными для решения неопределенной СЛАУ, что важно для анализа получаемых результатов в обеспечение нахождения приближенного решения.

Записывая полином Лежандра при помощи формулы Родрига [20] для каждой из координат  $(x, y)$ :

$$P^v = P(x) = CV_t \cdot \frac{1}{2^t \cdot t!} \cdot \frac{d^t}{dx^t} (x^2 - 1)^t,$$

$$P^w = P(y) = CW_t \cdot \frac{1}{2^t \cdot t!} \cdot \frac{d^t}{dy^t} (y^2 - 1)^t,$$

где  $t = (0, \dots, p)$  — константа;  $P^v$ ,  $P^w$  — тензоры первого рода ( $v = w = (1, \dots, t+1)$ );  $CV_p$ ,  $CW_p$  — неизвестные коэффициенты при полиноме;  $x(x_h), y(y_h)$  — координаты  $h$ -го элемента, искомое распределение показателя поглощения представляется через поэлементную сумму соответствующего тензора второго ранга:

$$\delta_h = \text{sum}(P^v \otimes P^w) = \text{sum}(\Delta) = \sum_{v=1}^p \sum_{w=1}^p \Delta^{vw}.$$

Псевдорешение (приближенное решение) полученной неопределенной системы уравнений может быть найдено при помощи метода наименьших квадратов [21]:

$$x = A^+ b = V \Sigma^+ U^* b,$$

где,  $A^+$  — псевдообратная матрица Мура-Пенроуза, определенная путем сингулярного разложения (SVD) [21] основной матрицы  $A$ .

Необходимо отметить, что при нахождении  $\delta_h$ , ввиду свойств примененного полинома Лежандра, в частности его ортогональности на интервале  $[-1, 1]$ , начало системы координат  $(X, Y)$  было определено в геометрическом центре заготовки, а решение находилось в безразмерном виде по координате:

$$x = \frac{2 \cdot x_h}{z}; y = \frac{2 \cdot y_h}{z}.$$

Расчетная оценка распределения разноденности по объему заготовки (виртуальный эксперимент) была проведена с использованием программного комплекса Matlab. Результаты решений СЛАУ различной размерности приводятся для исходных данных, приведенных в таблице 1.

Исходные данные для расчета

$z, [\text{м}]$	$I_0, [\text{Вт}/\text{м}^2]$	$\lambda, [\text{нм}]$	$\kappa_{\min}/\kappa_{\max}$
0.03	1000	200	$5,768 \cdot 10^{-9}/5,432 \cdot 10^{-9}$

Примечание: значения  $\kappa_{\min}/\kappa_{\max}$  приведены в соответствии с номинальным значением для кварцевого стекла<sup>2</sup> и с учетом результатов [22].

В качестве результатов эксперимента, а также для обеспечения возможности контроля достоверности исходного решения, использовался массив данных для  $I_i$  (интенсивность луча, прошедшего через заготовку), полученный для следующего распределения коэффициента поглощения:

$$\delta(x, y) = \frac{\delta_{\min} + \delta_{\max}}{2} + \left( \frac{\delta_{\max} - \delta_{\min}}{2} \right) \cdot \sin(4 \cdot x) \cdot \cos(4 \cdot y).$$

Выбранный для примера вариант распределения обусловлен наибольшим влиянием 4-й гармоники возмущения (разноденности) на расщепление рабочей частоты резонатора ВТГ [9].

**Результаты исследования.** На рис. 2–5 представлены графики сравнения полученного решения неопределенных СЛАУ различной размерности. На каждом из рисунков (здесь и далее для аналогичных рисунков) зеленым цветом представлено распределение коэффициента поглощения, основанное на точках эксперимента (линейно соединенных) и связанных с дискретизацией в направлении оси  $X$  для значения  $Y$ , синим — результат решения СЛАУ, т.е. аппроксимации полиномом, что также справедливо для поверхностей распределения. Индекс  $i$  при  $y$  на подписи рисунков обозначает  $i$ -ю координату по  $y$ .

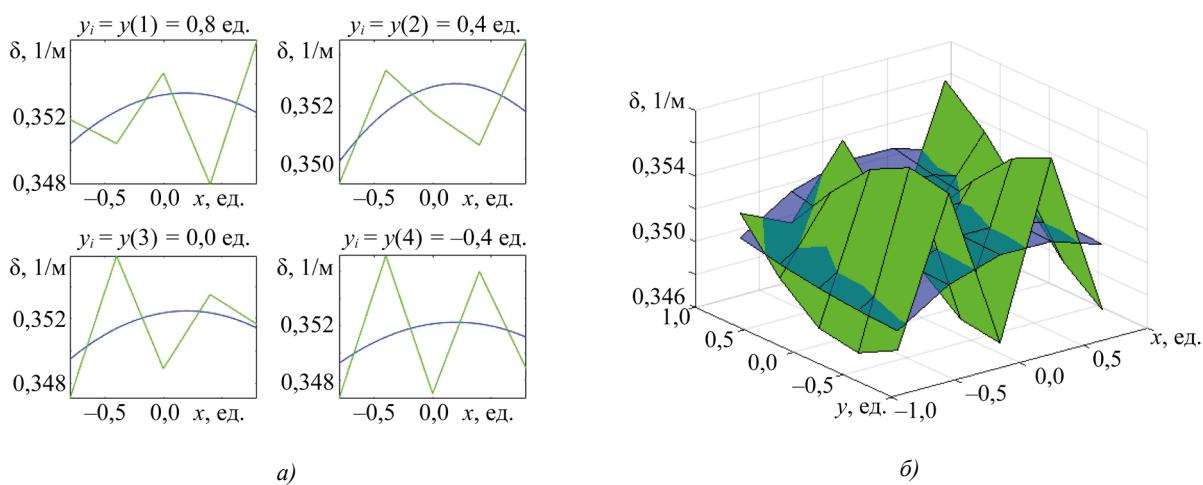


Рис. 2. Результат решения прямоугольной СЛАУ ( $p = 2; q = 25$ ), размерность матрицы  $A$  —  $[10 \times 9]$ ;  
а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по  $x$ ;  
б — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по  $x, y$

<sup>2</sup> ГОСТ 15130–86. Стекло кварцевое оптическое. Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200023786> (дата обращения: 10.10.2025).

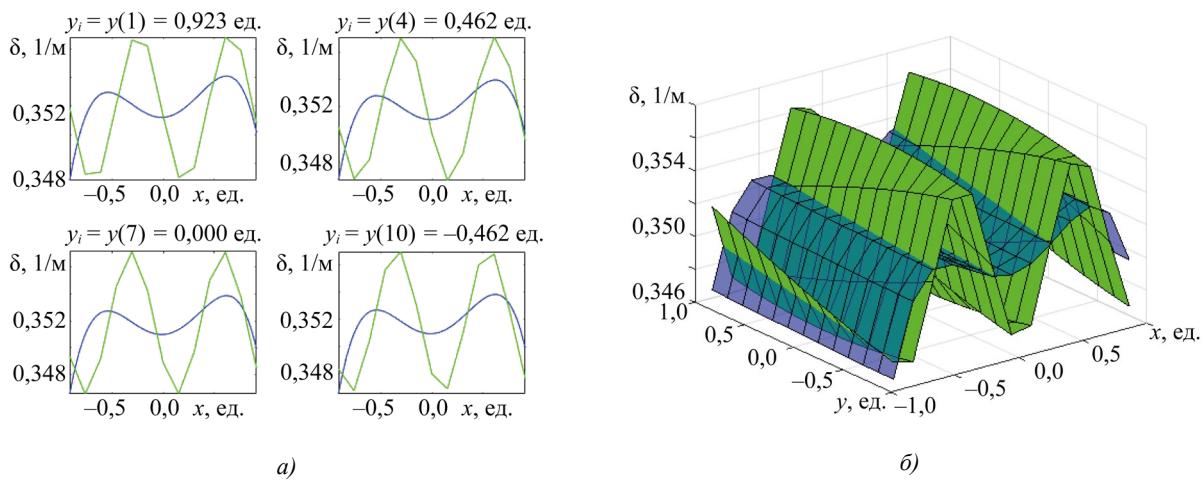


Рис. 3. Результат решения прямоугольной СЛАУ ( $p = 4; q = 169$ ), размерность матрицы  $A$  — [26×25];  
 а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по  $x$ ;  
 б — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по  $x, y$

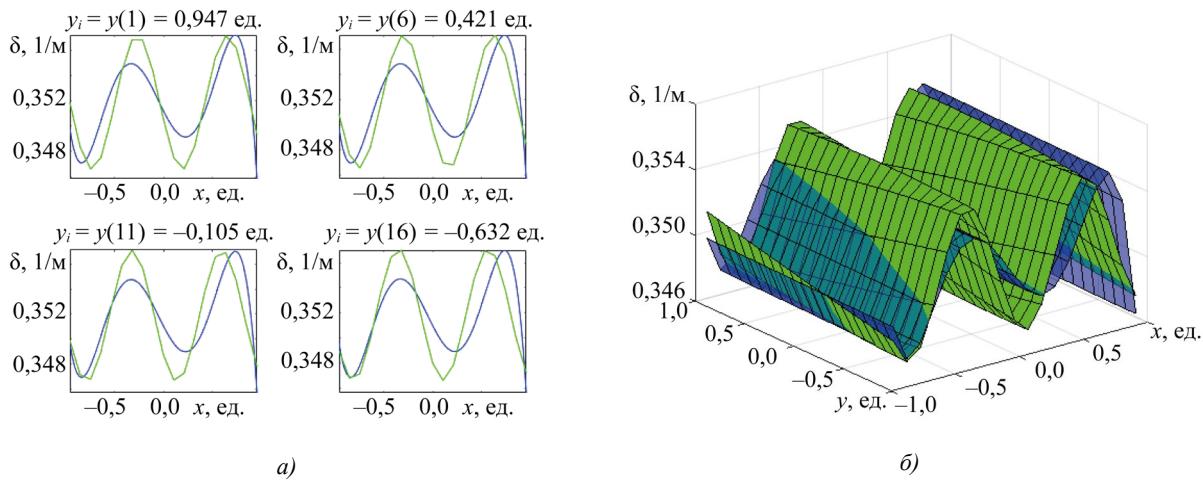


Рис. 4. Результат решения прямоугольной СЛАУ ( $p = 5; q = 361$ ), размерность матрицы  $A$  — [38×36];  
 а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по  $x$ ;  
 б — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по  $x, y$

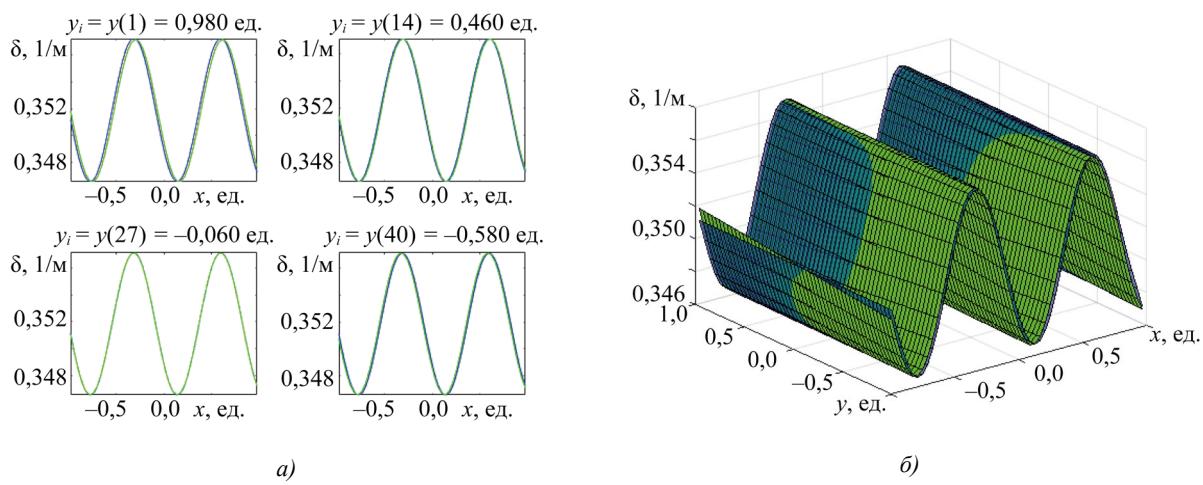
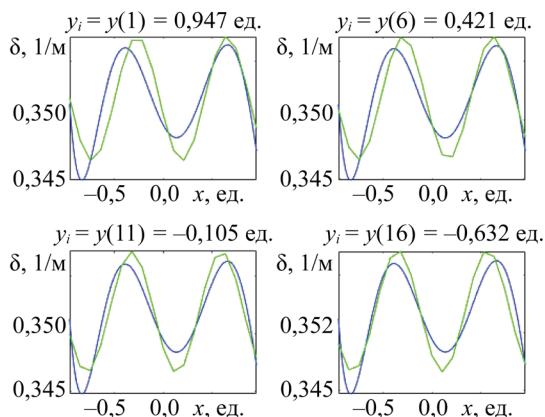
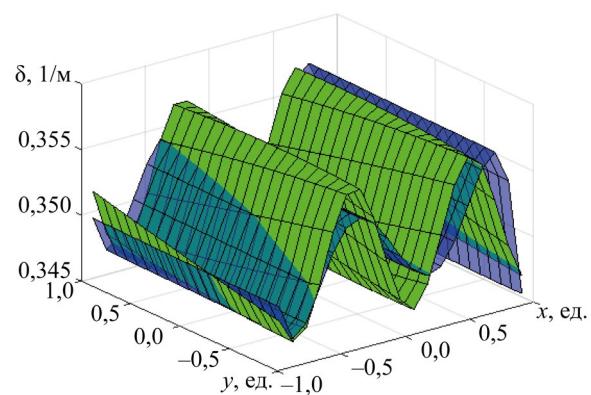


Рис. 5. Результат решения квадратной СЛАУ ( $p = 9; q = 2\,500$ ), размерность матрицы  $A$  — [100×100];  
 а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по  $x$ ;  
 б — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по  $x, y$

В дополнение, на рис. 6–9 представлены дополнительные расчетные случаи для обсуждения вопроса разрешимости неопределенных СЛАУ, а также применения предложенного метода при наличии макродефектов заготовки.



*a)*

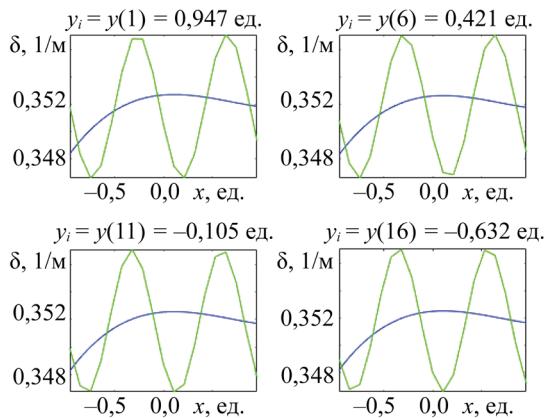


*b)*

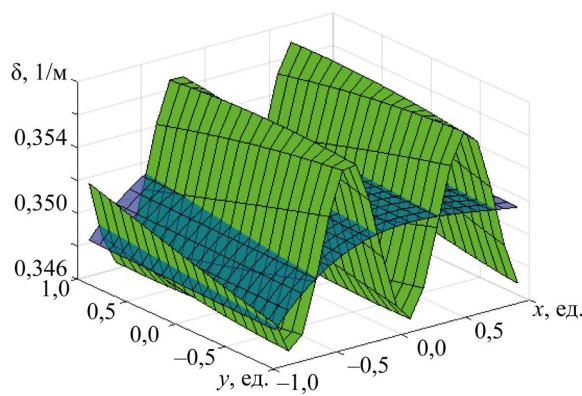
Рис. 6. Результат решения прямоугольной СЛАУ ( $p = 6; q = 361$ ), размерность матрицы  $A$  — [38×49];

*a* — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по  $x$ ;

*б* — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по  $x, y$



*a)*

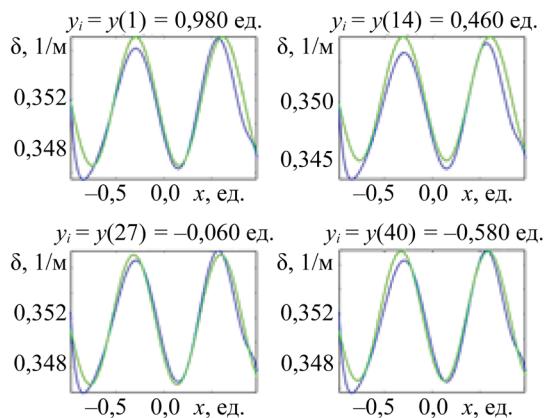


*b)*

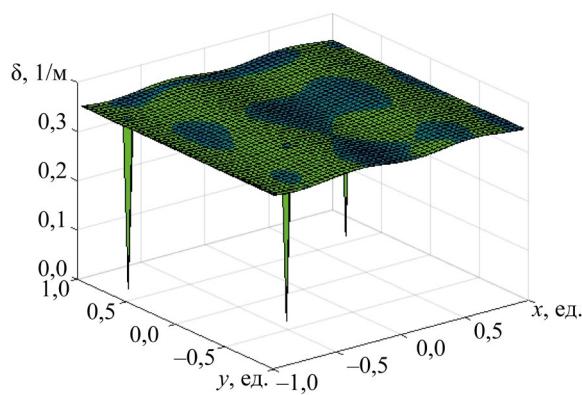
Рис. 7. Результат решения прямоугольной СЛАУ ( $p = 3; q = 361$ ), размерность матрицы  $A$  — [38×16];

*a* — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по  $x$ ;

*б* — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по  $x, y$



*a)*



*b)*

Рис. 8. Результат решения квадратной СЛАУ ( $p = 9; q = 2\ 500$ ), размерность матрицы  $A$  — [100×100];

*a* — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по  $x$ ;

*б* — трехмерное представление распределения коэффициента поглощения по  $x, y$

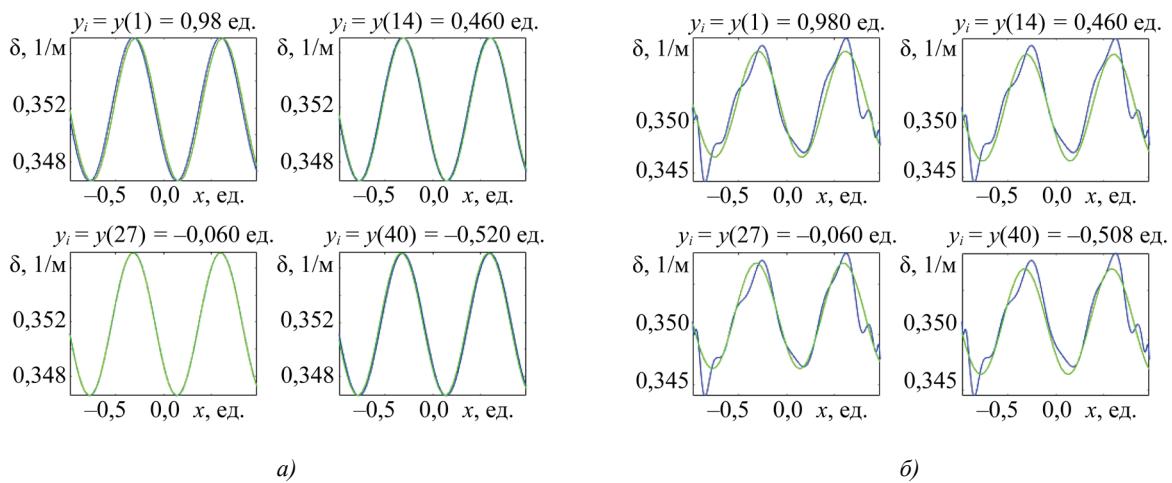


Рис. 9. Результат решения квадратной СЛАУ ( $p = 20$ ;  $q = 2500$ ), размерность матрицы  $A$  — [100×441];  
а — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по  $x$  для решения без дефектов;  
б — двумерный срез распределения коэффициента поглощения по  $x$  для решения с дефектами

На рис. 10 по результатам проведенного эксперимента представлены отличия распределения искомой величины от полученного распределения по результатам решения СЛАУ.

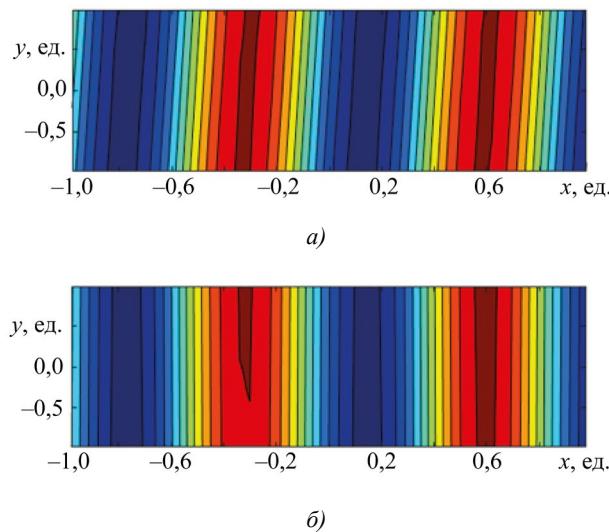


Рис. 10. Результат решения квадратной СЛАУ ( $p = 9$ ;  $q = 2500$ ), размерность матрицы  $A$  — [100×100];  
а — распределение искомой величины по экспериментальным данным;  
б — распределение искомой величины по результатам решения СЛАУ

**Обсуждение.** Анализируя полученные данные с использованием предложенного метода идентификации (рис. 2–5), можно отметить, что при достаточном количестве измерений (дискретизации системы) возможно получить решение неопределенной системы с необходимой точностью. Результаты для переопределенных систем оказались сопоставимыми с результатами недоопределенных [23] систем, при этом в некоторых случаях значения уступали им по точности. Например, данные, представленные на рис. 4, продемонстрировали меньшую точность по сравнению с результатами для размерности матрицы  $A$  — [38×49], полученной с использованием полинома 6-й степени (рис. 6).

В случае значительного перекоса между количеством уравнений и неизвестных (например, для случая сильной переопределенности — рис. 7) удовлетворительное решение в рамках представленных вычислений найти не удалось. Даже при получении приближенного решения с минимальной ошибкой некоторые отличия между восстановленным распределением и экспериментальным все же присутствовали. Это может быть связано с особенностями предложенной методики, что требует отдельного изучения. Для наглядности на рис. 10 представлено сравнение распределений в цветовом градиенте.

Одновременно было установлено, что предложенный метод чувствителен к наличию макродефектов (поры, пузырьки) в заготовке. На рис. 8 представлен результат, полученный на основе экспериментальных данных с тремя точечными дефектами, которым соответствует нулевой коэффициент поглощения. При сравнении с рис. 5 (где представлены результаты с наибольшей точностью) видно, что распределение искажается, на графике появляется дополнительная низкочастотная гармоника, свидетельствующая о возможных дефектах. При повышении степени полинома решение продолжает меняться, описывая более сложное распределение (рис. 9).

Следует отметить, что в случае физического измерения наличие макродефектов может значительно повлиять на результаты, так как это нарушает допущение о нормальном падении луча на границу раздела оптически прозрачных сред (поры и пузырьки часто имеют криволинейные поверхности). Несмотря на это, представленный метод может быть усовершенствован, учитывая указанные аспекты.

Использование полинома повысило устойчивость решения прямоугольных СЛАУ. Однако следует помнить, что реальные системы, построенные на базе экспериментальных данных с определенными погрешностями измерений, создают дополнительные сложности, требующие применения других методов расчета СЛАУ, например, с регуляризацией решения [24]. Поэтому целесообразно избегать существенной недоопределенности и переопределенности системы. В защиту используемого метода решения СЛАУ необходимо отметить, что требуется оптимизация соотношения между степенью полинома и уровнем дискретизации для нахождения приближенного решения с минимальными затратами. Анализ полученной системы уравнений показывает, что даже для двумерного случая с уменьшением размера элемента система остается прямоугольной и становится все более недоопределенной — в таких системах количество уравнений ( $u$ ) меньше количества неизвестных ( $l$ ). Подобные СЛАУ имеют более одного решения и характеризуются высоким числом обусловленности основной матрицы системы (матрицы  $A$ ), что может привести к существенным трудностям при нахождении корней. Учитывая это, в целях управления соотношением количества уравнений и неизвестных было принято допущение о плавности и непрерывности распределения искомой величины по объему. Это допущение основано на использовании кварцевого стекла наивысшего качества для изготовления резонатора ВТГ, в котором не допускается наличие макродефектов<sup>3</sup> (пузыри, раковины, трещины) [25]. Данное предположение согласуется с определяющими соотношениями, которые действуют как для постоянного значения показателя преломления, так и для медленно меняющейся, непрерывной функции в оптической среде [19].

Говоря о практической реализуемости, необходимо оценить требуемую погрешность физических измерений. Как отмечалось ранее [22], максимальный разброс плотности для кварцевого стекла по объему заготовки (резонатора), обусловленный неидеальностью геометрических параметров элемента ячейки периодичности, составляет  $\pm 3\%$  от номинального значения. Из-за пропорциональной зависимости коэффициента поглощения от плотности разброс коэффициента поглощения по объему будет аналогичным. При этом степень влияния разброса коэффициента поглощения на значение интенсивности светового луча, прошедшего через заготовку, можно оценить на уровне 0,03 %. Следовательно, степень точности измерений должна составлять не менее 0,005 %. Достигнение такой точности требует определенного подхода к организации натурного эксперимента, в частности, использования стабильных источников света (лазеров) с активной обратной связью для термической и токовой стабилизации, светоприемников (фотодетекторов) с низким темновым током, а также подавления шумов различных источников (колебания температуры, вибрация, электромагнитные помехи и пр.), что в итоге позволит достичь точности порядка 0,001 %.

**Заключение.** Таким образом, в настоящей работе был предложен и апробирован метод идентификации несовершенства в виде разноплотности кварцевого стекла на стадии заготовки, предназначеннной для изготовления чувствительного элемента ВТГ — резонатора. Идентификация основывалась на оптических свойствах кварцевого стекла, а именно на комплексном коэффициенте преломления, мнимая часть которого связана с коэффициентом поглощения и, следовательно, с плотностью материала. Показано, что, проведя серию экспериментов по измерению интенсивности светового луча, прошедшего через заготовку, возможно восстановить неизвестное распределение коэффициента поглощения и плотности по объему с высокой точностью (не менее 0,005 % от измеряемой величины). При этом распределение представляется с использованием ортогонального полинома Лежандра достаточной степени, соблюдая оптимальное соотношение между количеством коэффициентов полинома и степенью дискретизации системы, определяемой величиной гармоники распределения несовершенства. Установлено, что для идентификации 4-й гармоники разноплотности (как ключевого параметра) можно использовать полином 9-й степени при 100 испытаниях. Важно отметить, что проведение таких работ на ранних стадиях производства может оптимизировать процесс формообразования, позволяя выбирать наиболее эффективные направления распределения плотности по объему для минимизации воздействия на расщепление рабочей частоты резонатора.

<sup>3</sup> ГОСТ 15130–86. Стекло кварцевое оптическое. Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200023786> (дата обращения: 31.10.2025).

**Список литературы / References**

1. Пешехонов В.Г. Перспективы развития гироскопии. *Гироскопия и навигация*. 2020;28(2):3–10.
- Peshekhonov VG. The Outlook for Gyroscopy. *Gyroscopy and Navigation*. 2020;11:193–197. <https://doi.org/10.1134/S2075108720030062>
2. Переляев С.Е. Современное состояние волновых твердотельных гироскопов. Перспективы развития в прикладной гироскопии. В: *Труды XXX юбилейной Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам*. Санкт-Петербург: Концерн «Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор»; 2023. С. 431–435.
- Perelyaev SE. Current State of Wave Solid-State Gyroscopes. Development Prospects in Applied Gyroscopy. In: *Proc. XXX Anniversary St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. St. Petersburg: Central Scientific Research Institute “Electropribor”; 2023. p. 431–435. (In Russ.)
3. Волчихин И.А., Волчихин А.И., Малютин Д.М., Матвеев В.В., Распопов В.Я., Телухин С.В. и др. Волновые твердотельные гироскопы (аналитический обзор). *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2017;(9–2):59–78.
- Volchikhin AI, Volchikhin DM, Malyutin DM, Matveev VV, Raspopov VYa, Telukhin SV, et al. Wave Solid-State Gyroscopes (Analytical Review). *News of Tula State University. Technical Sciences*. 2017;(9–2):59–78.
4. Шишаков К.В., Хворенков В.В. *Твердотельные волновые гироскопы: волновые процессы, управление, системная интеграция*. Монография. Ижевск: Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова; 2018. 264 с.
- Shishakov KV, Khvorenkov VV. *Solid-State Wave Gyroscopes: Wave Processes, Control, System Integration*. Monograph. Izhevsk: Kalashnikov Izhevsk State Technical University; 2018. 264 p. (In Russ.)
5. Маслов А.А., Маслов Д.А., Ниналалов И.Г., Меркульев И.В. Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций. *Гироскопия и навигация*. 2023;31(1):3–25.
- Maslov AA, Maslov DA, Ninalalov IG, Merkuryev IV. Hemispherical Resonator Gyros (An Overview of Publications). *Gyroscopy and Navigation*. 2023;14(1):3–25. <https://doi.org/10.1134/S2075108723010054>
6. Delhay F. HRG by Safran: The Game-Changing Technology. In: *Proc. IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL)*. New York City: IEEE; 2018. P. 173–177. <https://doi.org/10.1109/ISISS.2018.8358163>
7. Переляев С.Е. Современное состояние и научно-технический прогноз перспектив применения зарубежных волновых твердотельных гироскопов (аналитический обзор по зарубежным материалам). *Новости навигации*. 2020;(3):14–28.
- Perelyaev SE. Current State and Scientific and Technical Forecast of the Perspectives of Application of Foreign Hemispherical Resonator Gyros (Analytical Review of Foreign Materials). *Navigation News*. 2020;(3):14–28.
8. Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К. *Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп)*. Монография. Москва: Ким Л.А.; 2017. 193 с.
- Klimov DM, Zhuravlev VF, Zhabanov YuK. *Quartz Hemispherical Resonator (Solid-State Wave Gyroscope)*. Monograph. Moscow: Kim L.A.; 2017. 193 p. (In Russ.)
9. Лунин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А. *Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология*. Москва: Радиотехника; 2014. 176 с.
- Lunin BS, Matveev VA, Basarab MA. *Wave Solid-State Gyroscope: Theory and Technology*. Moscow: Radiotekhnika; 2014. 176 p. (In Russ.)
10. Меркульев И.В., Подалков В.В. *Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов*. Москва: Физматлит; 2009. 226 с.
- Merkuryev IV, Podalkov VV. *Micromechanical and Wave Solid-State Gyroscope Dynamics*. Moscow: Fizmatlit; 2009. 226 p. (In Russ.)
11. Lynch DD. Vibratory Gyro Analysis by The Method of Averaging. In: *Proc. 2nd St. Petersburg Int. Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation*. St. Petersburg: Centr. Sci.-Res. Inst. “Elektropribor”; 1995. P. 26–34.
12. Rozelle D. The Hemispherical Resonator Gyro: From Wineglass to the Planets. *Advances in the Astronautical Sciences*. 2009;134:1157–1178.
13. Polunin PM, Shaw SW. Self-Induced Parametric Amplification in Ring Resonating Gyroscopes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017;94:300–308. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.01.011>
14. Zотов SA, Trusov AA, Shkel AM. Three-Dimensional Spherical Shell Resonator Gyroscope Fabricated Using Wafer-Scale Glassblowing. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2012;21(3):509–510. <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2012.2189364>

15. Saypulaev MR, Merkuryev IV, Solovyev AV, Tarasov AN. Study on Free Oscillations of a Micromechanical Gyroscope taking into Account the Nonorthogonality of the Torsion Axes. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2021;21(3):231–238. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-3-231-238>
16. El-Sheemy N, Youssef A. Inertial Sensors Technologies for Navigation Applications: State of the Art and Future Trends. *Satellite Navigation*. 2020;1(2):1–22. <https://doi.org/10.1186/s43020-019-0001-5>
17. Салех Б., Тейх М. *Оптика и фотоника. Принципы и применение*. В 2 т., Т. 2., 2-е изд. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект»; 2012. 760 с.
- Saleh B, Teich M. *Optics and Photonics: Principles and Applications*, 2nd ed. In 2 vol. Vol. 2. Dolgoprudnyi: Intellekt; 2012. 760 p. (In Russ.)
18. Born M, Wolf E. *Principles of Optics: 60th Anniversary Edition*, Cambridge: Cambridge University Press; 2019. 992 p.
19. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. *Физическая оптика*. 2-е изд., Москва: Издательство Московского университета «Наука»; 2004. 654 с.
- Akhmanov SA, Nikitin SYu. *Physical Optics*. 2nd ed. Moscow: Nauka; 2004. 654 p. (In Russ.)
20. Корн Г.А., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения. Теоремы. Формулы*. 6 изд. Санкт-Петербург: Лань; 2003. 831 с.
- Korn GA, Korn Th. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions. Theorems. Formulas*, 6th ed. St. Petersburg: Lan'; 2003. 831 p. (In Russ.)
21. Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения*. Москва: Мир; 2001. 430 с.
- Demmel JW. *Computational Linear Algebra. Theory and Applications*. Moscow: Mir; 2001. 430 p. (In Russ.)
22. Шевченко С.А., Мельников Б.Е. Несовершенства кварцевого стекла и их влияние на динамику резонатора ВТГ. *Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024;24(4):611–618. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-611-618>
- Shevchenko SA, Melnikov BE. Fused Quartz Imperfections and Their Influence on the CVG Resonator Dynamics. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2024;24(4):611–618. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-611-618>
23. Björck Å. *Numerical Methods in Matrix Computations*. New York, NY: Springer; 2015. 800 p.
24. Buccini A, Gazzola S, Onisk L, Pasha M, Reichel L. Projected Iterated Tikhonov in General Form with Adaptive Choice of the Regularization Parameter. *Numerical Algorithms*. 2025;100:1617–1637. <https://doi.org/10.1007/s11075-025-02072-2>
25. Бубис И.Я., Вейденбах В.А., Духопел И.И., Кузнецова С.М. (ред.), Окатова М.А. (ред.). *Справочник технолога-оптика*. Ленинград: Ленинградское отделение издательства «Машиностроение», 1983. 414 с.
- Bubis Iya, Weidenbach VA, Dukhoped II, Kuznetsova SM (ed), Okatova MA (ed). *Handbook of an Optical Technologist*. Leningrad: Mashinostroenie; 2009. 244 p. (In Russ.)

**Об авторах:**

**Сергей Александрович Шевченко**, инженер, «Высшая школа механики и процессов управления. Физико-механический институт» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29 Б), [SPIN-код](#), [ResearchGate](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [shevchenko.sergei.a@yandex.ru](mailto:shevchenko.sergei.a@yandex.ru)

**Иван Алексеевич Попов**, старший преподаватель, «Высшая школа передовых инженерных технологий передовой инженерной школы «Цифровой инжиниринг» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29 Б), [SPIN-код](#), [ResearchGate](#), [ORCID](#), [popov\\_ia@spbstu.ru](mailto:popov_ia@spbstu.ru)

**Борис Евгеньевич Мельников**, доктор технических наук, профессор, «Высшая школа механики и процессов управления. Физико-механический институт» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29 Б), [SPIN-код](#), [ResearchGate](#), [ORCID](#), [melnikov\\_be@spbstu.ru](mailto:melnikov_be@spbstu.ru)

**Заявленный вклад авторов:**

**С.А. Шевченко**: разработка концепции, проведение исследования,

**И.А. Попов**: разработка программного обеспечения.

**Б.Е. Мельников**: научное руководство.

**Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

**Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.**

**About the Authors:**

**Sergei A. Shevchenko**, Engineer of the Higher School of Mechanics and Control Processes, Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 B, Polytechnicheskaya Str., St. Petersburg, 195251, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ResearchGate](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [shevchenko.sergei.a@yandex.ru](mailto:shevchenko.sergei.a@yandex.ru)

**Ivan A. Popov**, Senior Lecturer at the Advanced Engineering Technology School, Advanced Engineering School “Digital Engineering”, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 B, Polytechnicheskaya Str., St. Petersburg, 195251, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ResearchGate](#), [ORCID](#), [popov\\_ia@spbstu.ru](mailto:popov_ia@spbstu.ru)

**Boris E. Melnikov**, Dr.Sci (Eng.), Professor of the Higher School of Mechanics and Control Processes, Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 B, Polytechnicheskaya Str., St. Petersburg, 195251, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ResearchGate](#), [ORCID](#), [melnikov\\_be@spbstu.ru](mailto:melnikov_be@spbstu.ru)

**Claimed Contributorship:**

**SA Shevchenko:** conceptualization, investigation.

**IA Popov:** software.

**BE Melnikov:** supervision.

**Conflict of Interest Statement:** the authors declare no conflict of interest.

**All authors have read and approved the final version of manuscript.**

**Поступила в редакцию / Received** 04.08.2025

**Поступила после рецензирования / Reviewed** 01.09.2025

**Принята к публикации / Accepted** 12.09.2025

# МЕХАНИКА MECHANICS



УДК 539.3

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2184>

## Анализ диссипации энергии деформирования в дорожных одеждах с укрепленными слоями

А.Н. Тиратурян

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ [tiraturjan@list.ru](mailto:tiraturjan@list.ru)



EDN: JZUDVV

### Аннотация

**Введение.** Конструирование дорожных одежд автомобильных дорог — ключевой этап проектирования, напрямую влияющий на их долговечность и эксплуатационные расходы. В последние годы в условиях роста интенсивности и динамической нагрузки транспорта получили распространение такие технологии укрепления земляного полотна и оснований, как геосинтетические армирования и стабилизированные слои, что делает изучение их эффективности особенно актуальным. В литературе отмечаются практические преимущества укреплённых слоёв — повышение несущей способности и снижение деформаций. Однако недостаточно разработаны модели диссипации энергии при динамических воздействиях в конструкциях с такими слоями. Теоретические подходы к анализу рассеяния энергии, включая линейно-упругие и вязкоупругие модели и методы конечных элементов, в основном применялись к традиционным конструкциям, их адаптация для армированных и стабилизированных слоёв требует доработки, поскольку остаются пробелы в количественном сравнении эффективности по местоположению и жёсткости укреплений. Цель представленной работы — анализ диссипации энергии деформирования в структуре дорожных одежд с различными вариантами расположения укрепленных слоев и определение оптимальных конструктивных решений, способствующих повышению долговечности дорожных покрытий. Для ее достижения необходимо было formalизовать модель диссипации энергии для конструкций с укреплениями, провести сравнительный анализ вариантов расположения и жёсткости слоёв.

**Материалы и методы.** В рамках исследования применен комплексный подход к анализу процессов деформирования слоистых сред на примере дорожных одежд, предполагающий применение как расчетного аппарата, так и современного экспериментального оборудования. В качестве расчетного аппарата использовалась математическая модель слоистого полупространства в осесимметричной постановке в цилиндрической системе координат, базирующаяся на решении системы динамических уравнений Ламе и позволяющая строить амплитудно-временные характеристики вертикальных перемещений и импульса ударного нагружения, на основе которых возможно построение динамических петель гистерезиса. В качестве экспериментального оборудования применена установка ударного нагружения FWD PRIMAX 1500, позволяющая регистрировать аналогичные характеристики отклика дорожной одежды в натурных условиях при нагружении, эквивалентном расчетному.

**Результаты исследования.** В ходе исследования выполнено численное моделирование конструкций дорожных одежд, традиционно используемых в Российской Федерации, и так называемых полноглубинных дорожных одежд, состоящих практически полностью из материалов, укрепленных вяжущими. Построены динамические петли гистерезиса и дано сравнительное описание полученных результатов. В ходе численного эксперимента установлено, что укрепление только слоя земляного полотна даже без устройства укрепленного слоя основания под асфальтобетоном позволяет снизить величину рассеиваемой энергии деформирования. Также сделан вывод о том, что в наибольшей степени влияние на величину рассеиваемой энергии оказывает именно модуль упругости подстилающего полупространства, моделирующего земляное полотно.

**Обсуждение.** Наибольший эффект, как технический, так и экономический, может быть достигнут путем укрепления верха земляного полотна с сохранением несвязных слоев в основании дорожной конструкции. Это решение позволит приблизить функционирование дорожной одежды к упругой стадии и вместе с тем снизить риски появления трещин на поверхности покрытия из-за излишне жесткого слоя укрепленного основания.

**Заключение.** На основании построенных динамических петель гистерезиса показано, что снижение величины энергии деформирования может быть достигнуто как устройством укрепленных слоев дорожной одежды по всей ее глубине, так и локальным укреплением слоя подстилающего полупространства и дополнительного слоя основания из песка. В ходе численного эксперимента доказано, что устройство укрепленных слоев оснований более чем в 2–3 раза снижает величину диссипации энергии деформирования в структуре дорожной одежды. Продемонстрировано качественное совпадение результатов экспериментальных исследований и результатов численного моделирования.

**Ключевые слова:** дорожные одежды, диссипация энергии, установка ударного нагружения, петли динамического гистерезиса

**Благодарности.** Автор выражает благодарность редакционной коллегии журнала и рецензентам за профессиональный анализ статьи и рекомендации для ее корректировки.

**Финансирование.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 24-29-00110), <https://rscf.ru/project/24-29-00110/>

**Для цитирования.** Тиратуриян А.Н. Анализ диссипации энергии деформирования в дорожных одеждах с укрепленными слоями. *Advanced Engineering Research*. 2025;25(4):324–336. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2184>

Original Theoretical Research

## Analysis of Deformation Energy Dissipation in Reinforced-Layer Pavement

Artem N. Tiraturyan 

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ [tiraturjan@list.ru](mailto:tiraturjan@list.ru)

### Abstract

**Introduction.** The design of road pavements for highways is a key stage of project development, directly impacting their durability and operational costs. In recent years, in the context of increasing traffic intensity and dynamic loads, technologies for strengthening roadbeds and bases, such as geosynthetic reinforcement and stabilized layers, have become widespread, making the study on their efficiency a challenge. Literature notes the practical advantages of reinforced layers — increased load-bearing capacity and reduced deformation. However, models for energy dissipation under dynamic impacts in structures with such layers are underdeveloped. Theoretical approaches to analyzing energy dissipation, including linear-elastic and viscoelastic models and finite element methods, have been primarily applied to traditional structures. Their adaptation to reinforced and stabilized layers requires further development, as there remain gaps in the quantitative comparison of efficiency by location and rigidity of reinforcements. The objective of the presented work is to analyze the dissipation of deformation energy in the structure of road pavements with different options for the arrangement of reinforced layers, and to determine optimal design solutions that contribute to increasing the durability of road pavements. To achieve this, it is required to formalize an energy dissipation model for structures with reinforcements, conduct a comparative analysis of different locations and rigidity levels of the layers.

**Materials and Methods.** The research utilized a comprehensive approach to the analysis of deformation processes in layered media using road pavements as an example, involving both a calculation tool and modern experimental equipment. As a calculation tool, a mathematical model of a layered half-space in an axisymmetric formulation in a cylindrical coordinate system was used. It was based on the solution to the system of dynamic Lame equations and allowed for the construction of amplitude-time characteristics of vertical displacements and impact loading impulse, on the basis of which it was possible to construct dynamic hysteresis loops. The FWD PRIMAX 1500 shock loading unit was used as experimental equipment, which made it possible to register similar characteristics of the road pavement response under field conditions at a load equivalent to the calculated one.

**Results.** The study involved numerical modeling of road pavement structures traditionally used in the Russian Federation and so-called full-depth road pavements, which were composed almost entirely of materials reinforced with binders. Dynamic hysteresis loops were constructed, and a comparative analysis of the results was provided. A numerical experiment revealed that strengthening only the subgrade layer, even without installing a reinforced base layer beneath the asphalt concrete, reduced the amount of dissipated deformation energy. It was also concluded that the elastic modulus of the underlying half-space simulating the subgrade had the greatest impact on the amount of dissipated energy.

**Discussion.** The greatest effect, both technical and economic, can be reached by strengthening the top of the roadbed while preserving the loose layers in the base of the road structure. This solution will bring the functioning of the road surface closer to the elastic stage and at the same time reduce the risk of cracks appearing on the surface of the pavement due to an excessively rigid layer of reinforced base.

**Conclusion.** On the basis of the constructed dynamic hysteresis loops, it is shown that a reduction in the magnitude of deformation energy can be obtained both by installing reinforced layers of the road surface throughout its entire depth, and by locally strengthening the underlying half-space layer and an additional base layer made of sand. The numerical experiment demonstrated that the use of reinforced base layers reduced the amount of deformation energy dissipation in the pavement structure by more than 2–3 times. Qualitative agreement between the experimental results and the numerical simulation results was shown.

**Keywords:** road pavements, energy dissipation, shock loading unit, dynamic hysteresis loops

**Funding Information.** The research was done with the financial support from the Russian Science Foundation (grant no. 24-29-00110), <https://rscf.ru/project/24-29-00110/>

**Acknowledgements.** The author would like to thank the Editorial board of the Journal and the reviewers for their professional analysis of the article and recommendations for its correction.

**For Citation.** Tiraturyan AN. Analysis of Deformation Energy Dissipation in Reinforced-Layer Pavement. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):324–336. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2184>

**Введение.** Одной из важнейших задач дорожной отрасли Российской Федерации является обеспечение 24-летнего межремонтного срока службы дорожных покрытий. Один из основных путей ее решения — совершенствование подходов к конструированию дорожных одежд. В практике РФ принято конструировать их таким образом, чтобы жесткость слоев возрастала снизу вверх, что связано как с историческими подходами к проектированию, так и с некоторыми особенностями расчета напряженно-деформированного состояния покрытия инженерными методами при помощи специальных номограмм. Но такой подход не позволяет в полной мере отразить эффективность применения укрепленных слоев, например земляного полотна или оснований дорожных одежд.

В последние годы в технологиях и методах расчета дорожных одежд произошли существенные изменения, связанные с внедрением программных комплексов, реализующих как точные, так и численные схемы прямого расчета слоистых сред [1]. В области численных методов наибольшее распространение получили как классические конечно-элементные подходы [2], так и более современные методы, основанные на применении спектральных элементов [3].

Метод конечных элементов широко используется при моделировании напряженно-деформированного состояния образцов из асфальтобетона и цементобетона, применяемых для устройства дорожных покрытий и оснований [4], а также при расчете объектов ограниченных размеров, характерных для практики дорожного и промышленно-гражданского строительства [5]. Однако большинство указанных программных комплексов реализует преимущественно линейно-упругую статическую постановку задачи определения напряженно-деформированного состояния дорожных одежд. Более широкое распространение численных методов сдерживается сложностью их применения к средам неограниченного объема [6]. В то же время реальное деформирование слоев дорожных одежд наиболее корректно описывается вязкоупругими моделями либо моделями, учитывающими отток объемных волн в бесконечное пространство [7].

При решении задач в вязкоупругой динамической постановке, как правило, рассматривается отклик дорожной конструкции либо на ударное воздействие, эквивалентное динамическому воздействию расчетной нагрузки [8], либо непосредственно на нагрузку от колеса, движущегося по поверхности покрытия [9].

Одним из наиболее распространенных современных решений проблемы является конструирование так называемых полноглубинных (full-depth) конструкций дорожных одежд, полностью состоящих из укрепленных минеральными и комплексными вяжущими слоев [10]. Данный подход имеет ряд достоинств и недостатков. К несомненным достоинствам следует отнести общую высокую жесткость конструкций и возможность использования вторичных материалов для устройства слоев оснований и их дополнительных слоев [11]. Также в ряде научных работ, посвященных этой теме, отмечается хорошая устойчивость таких конструкций к накоплению пластических деформаций [12], возможность применения в различных природно-климатических условиях [13] и высокая технологичность [14]. К недостаткам можно отнести высокую стоимость и часто при излишне высокой жесткости слоев основания большую вероятность растрескивания [15]. Одним из наиболее распространенных видов растрескивания для таких конструкций является отраженное трещинообразование [16]. Некоторые авторы отмечают также необходимость учета специфических свойств подобных конструкций в регионах с холодным климатом [17] и влияния различных видов дефектов на изменение сроков эксплуатации покрытия [18].

Известна концепция «вечных» дорожных одежд, предполагающая увеличение жесткости конструктивных слоев дорожной одежды сверху вниз, т. е. когда в качестве слоя основания используются материалы, обладающие более высоким модулем упругости, чем асфальтобетонные слои покрытия [19]. Такие конструкции действительно обеспечивают чрезвычайно высокие межремонтные сроки службы, что позволяет заменять лишь верхние слои износа [20]. Вместе с тем очевидно, что стоимость и надежность подобных конструкций, несомненно, являются чрезвычайно высокими и зачастую не всегда оправдаными [21]. При этом дополнительных исследований требуют вопросы обеспечения надлежащего сцепления между конструктивными слоями различной жесткости [22].

Таким образом, можно утверждать, что существует множество подходов к конструированию дорожных одежд, что, с одной стороны, подчеркивает эффективность подобных конструкций, а с другой — все еще оставляет много вопросов. Один из них — исследование процессов диссипации энергии деформирования в слоистых средах с укрепленными слоями, и как следствие — оценка возможности смещения механизмов деформирования к упругой стадии. Величина диссипации энергии является наиболее полной и физически обоснованной характеристикой, отражающей механизмы деформирования в структуре многослойной среды, которая может быть измерена и количественно оценена как с применением средств математического моделирования, так и с использованием современного измерительного оборудования. Более того, применение данного показателя является перспективным в контексте такого актуального направления, как анализ жизненного цикла объектов строительства [23] и внедрение его в технологии информационного моделирования для контроля остаточного срока службы [24]. Таким образом, целью данной работы является анализ диссипации энергии деформирования в структуре дорожных одежд с различными вариантами расположения укрепленных слоев и оценка оптимальных конструктивных решений, способствующих повышению долговечности дорожного покрытия.

**Материалы и методы.** В ходе проведенного исследования были применены теоретический и экспериментальный подходы к оценке деформирования слоистой среды дорожной одежды. Методология исследования представлена на рис. 1.



Рис. 1. Методология исследования

В ходе проведения численных и экспериментальных исследований рассматривались следующие конструкции дорожных одежд. Конструкция 1 представляет собой стандартный вариант дорожной одежды, запроектированный в соответствии с действующим требованиями ГОСТ Р 71404: слой 1 устроен из асфальтобетона, слой 2 — из укрепленной комплексным вяжущим щебеноочно-песчаной смеси, слои 3 и 4 — слой щебня, устроенного по способу заклинки, и песчаный морозозащитный капилляропрерывающий слой соответственно.

Конструкция 2 — это пример полноглубинной дорожной конструкции, в которой все слои укреплены органическими или комплексными вяжущими, что неизбежно сказывается на повышении их модулей упругости. При этом очевидно, что за счет применения дорогостоящих стабилизирующих и укрепляющих добавок, а также из-за отсутствия возможности снижения толщины конструктивных слоев в рамках действующей нормативной базы стоимость данной конструкции будет значительно превышать стоимость конструкции 1, в которой присутствуют необработанные вяжущими слои. Конструкция 3 аналогична по своим параметрам конструкции 1, но только слой 2 и слой 5 (грунт земляного полотна) укреплены комплексным вяжущим. Конструкция 4 предполагает укрепление вяжущим только грунта земляного полотна. Схематично рассматриваемые конструкции представлены на рис. 2.

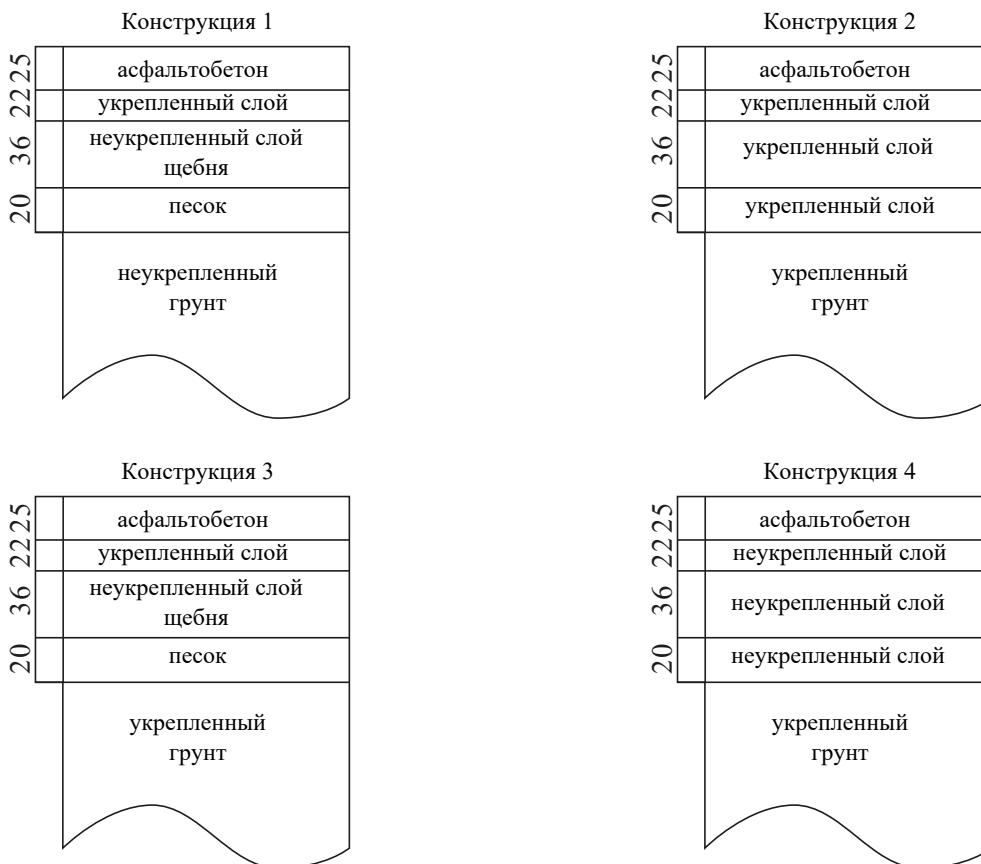


Рис. 2. Конструкции моделируемых дорожных одежд

Теоретический подход заключался в определении напряженно-деформированного состояния слоистой среды под воздействием динамической нагрузки от падающего груза в осесимметричной постановке (рис. 3).

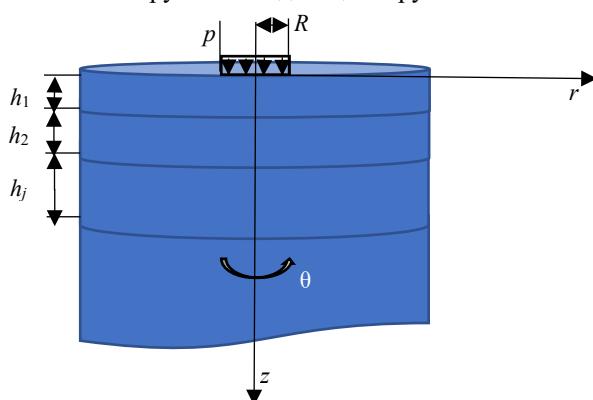


Рис. 3. Многослойное полупространство

Уравнения движения имеют вид [25, 26]:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \mu \Delta u_r - \frac{\mu}{r^2} u_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta u_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

где  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе;  $u_r, u_z$  — радиальная и вертикальная компоненты вектора смещения;  $\rho$  — плотность материала.

$$\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2)$$

где  $r$  — радиальная координата точки, в которой отыскивается смещение.

Преобразованная по Фурье система уравнений (1) приобретает вид [27]:

$$\text{grad div } \mathbf{u}^j(\mathbf{r}) - \frac{c_{j1}^2}{c_{j2}^2} \text{rotrot } \mathbf{u}^j(\mathbf{r}) + c_{j1}^2 \mathbf{u}^j(\mathbf{r}) = 0, \quad (3)$$

где  $c_{j1}, c_{j2}$  — приведенные частоты колебаний.

$$c_{j1}^2 = \frac{\omega^2 R^2}{Vp_j^2}; \quad (4)$$

$$c_{j2}^2 = \frac{\omega^2 R^2}{Vs_j^2};$$

где  $\omega$  — частота колебаний, рад/с;  $R$  — радиус площадки нагружения;  $Vp_j, Vs_j$  — скорости продольных и поперечных волн в теле.

Данная форма записи позволяет воспользоваться принципом упругого-вязкоупругого соответствия, по которому коэффициенты Ламе становятся комплексными, что, в свою очередь, приводит к комплекснозначности приведенных частот  $c_{j1}, c_{j2}$ .

Так как перемещение  $u$  может быть выражено через скалярную  $\phi$  и векторную (вихревую)  $\psi$  составляющие, далее решение будет рассматриваться в форме представления Ламе в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \phi + c_{j1}^2 \phi &= 0, \\ \Delta \psi + c_{j2}^2 \psi &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Границные условия данной задачи в напряжениях формулируются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z(r, z, t)|_{z=0} = \begin{cases} p(t), & r \in [0, R] \\ 0, & r > R \end{cases} \\ \tau_{rz}(r, z, t)|_{z=0} \equiv 0 \end{array} \right. . \quad (6)$$

На границах слоев ставятся условия жесткого сцепления, требующие непрерывности перемещений  $u_r(r, z, t)$  и  $u_z(r, z, t)$  и напряжений  $\sigma_z(r, z, t), \tau_{rz}(r, z, t)$ .

На бесконечности выполняются условия стремления к нулю всех компонент напряжений и перемещений.

Начальные условия данной задачи определяются следующим образом:

$$u_{r,z}(r, z, t)|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial u_{r,z}(r, z, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Дальнейшее решение строится путем применения свойств интегральных преобразований Ханкеля и Фурье к системе уравнений (3) и излагается в работе [28]. Так как рассматривается решение нестационарной задачи, применяется метод дискретного гармонического анализа [29].

**Экспериментальный подход** к оценке деформирования слоистой среды дорожного покрытия предполагает проведение инструментальных измерений параметров деформирования дорожных одежд. В качестве оборудования для таких измерений использовалась установка ударного нагружения FWD PRIMAX 1500 [30, 31] (рис. 4). Данная установка представляет собой прицеп со смонтированными на нем механизмом ударного нагружения и измерительной балкой, регистрирующей вертикальную компоненту скорости перемещений, впоследствии пересчитываемой в абсолютные значения вертикальных перемещений. Регистрация характеристик деформирования осуществлялась датчиками-измерителями. На рис. 5 показаны расстояния от них до штампа установки динамического нагружения. Для проведенного исследования использовался только датчик D1, расположенный в центре штампа. Однако в перспективе для оценки процессов распределения энергии деформирования могут быть использованы и остальные датчики.

Отличием данной установки ударного нагружения от прочих является возможность практически непрерывной, с шагом дискретизации 0,002 с, записи амплитудно-временной характеристики перемещений на поверхности покрытия и амплитудно-временной характеристики импульса ударного нагружения, по которым возможно построение экспериментальной петли гистерезиса.



Рис. 4. Установка ударного нагружения для регистрации вертикальных перемещений на слое из органоминеральной смеси

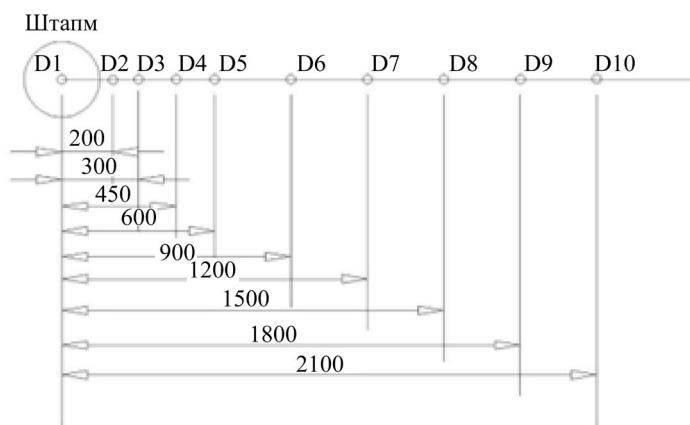


Рис. 5. Схема проведения измерений установкой ударного нагружения (расстояния даны в мм)

В данном исследовании рассмотрены конструкции дорожной одежды с различным соотношением жесткостей конструктивных слоев. Механические параметры представлены в таблице 1.

Таблица 1

Конструкции дорожных одежд для моделирования

Слой	Конструкция 1				Конструкция 2					
	$E$ , МПа	$\nu$	$tgy$	$h$ , см	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$E$ , МПа	$\nu$	$tgy$	$h$ , см	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
1	3500	0,30	0,25	25	2400	3500	0,30	0,25	25	2400
2	1000	0,25	0,15	22	2400	1000	0,25	0,15	22	2400
3	450	0,25	—	36	1600	1000	0,25	0,15	36	2400
4	120	0,25	—	20	1900	500	0,25	—	20	2200
5	43	0,3	—	—	1900	400	0,3	—	—	2200
Конструкция 3					Конструкция 4					
$E$ , МПа	$\nu$	$tgy$	$h$ , см	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$E$ , МПа	$\nu$	$tgy$	$h$ , см	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$E$ , МПа
3500	0,30	0,25	25	2400	3500	0,30	0,25	25	2400	3500
1000	0,25	0,15	22	2400	450	0,25	—	22	1600	1000
450	0,25	—	36	1600	450	0,25	—	36	1600	450
120	0,25	—	20	1900	120	0,25	—	20	1900	120
400	0,3	—	—	2200	400	0,3	—	—	2200	400

**Результаты исследования.** С использованием математического моделирования для представленных выше конструкций была решена задача определения динамического напряженно-деформированного состояния и построены петли гистерезиса на поверхности каждой из них. Решение задачи для слоистой среды позволяет построить амплитудно-временные характеристики перемещений  $u(t)$  на поверхности слоистой среды и амплитудно-временную характеристику импульса  $F(t)$ , по которой может быть восстановлена динамическая петля гистерезиса, площадь которой определяет энергию, необратимо рассеиваемую в среде [32, 33]. Данная кривая задается параметрически в соответствии с зависимостью (8):

$$W = \int_0^t u(t) F(t) dt. \quad (8)$$

В случае задания динамической петли гистерезиса в виде ряда данных, содержащих информацию о дискретных величинах фактической нагрузки ( $F_i$ ) и вертикальных перемещениях ( $u_i$ ), соответствующих данной нагрузке, площадь кривой гистерезиса определяется в соответствии с (9):

$$W = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} u_i F_{i+1} + u_n F_1 - \sum_{i=1}^{n-1} u_{i+1} F_i - u_1 F_n \right|. \quad (9)$$

Функция  $F(t)$  описывается уравнением:

$$F(t) = F \sin\left(\frac{\pi t}{t_{имп}}\right) \quad (10)$$

где  $F$  — расчетная нагрузка (принимается равной 57,5 кН);  $t$  — время наблюдения за деформированием объекта ( $t = 0,1$  с);  $t_{имп}$  — время импульса ( $t_{имп} = 0,03$  с).

Также реализована возможность построения амплитудно-временной характеристики пилообразного импульса и треугольного импульса, нередко используемых при аппроксимации ударного нагружения, воспроизводимого установками FWD.

В качестве расчетной нагрузки при моделировании была принята нагрузка от падающего груза величиной 57,5 кН, распределенная по площадке диаметром 30 см, что соответствует требованиям нормативной документации дорожной отрасли. Величина диссипации энергии деформирования ( $W$ ) рассчитывалась в точке ударного нагружения.

Учитывая предположение о необходимости работы дорожной одежды в упругой стадии, допускаемое в отечественных нормативных документах, а также тот факт, что величина энергии  $W$  является по сути функцией как механических, так и геометрических параметров исследуемой среды, задача оптимального конструирования может быть сведена к уравнению:

$$W(E_j, h_j, \tan \gamma_j, v_j) \rightarrow \min, \quad (11)$$

где  $E_j$  — модули упругости материалов слоев дорожной одежды;  $h_j$  — толщины слоев дорожной одежды;  $\gamma_j$  — углы потерь или иные характеристики вязкости материала слоев;  $v_j$  — коэффициенты Пуассона материалов слоев.

Демпфирующие свойства отдельных слоев учитываются путем введения тангенса угла потерь  $\operatorname{tg} \gamma$ , определяемого исходя из приведенных частот колебаний:

$$\operatorname{tg} \gamma_j = \frac{Im c_j^2}{Re c_j^2}.$$

На рис. 6 приведены расчетные формы амплитудно-временных характеристик перемещений на поверхности моделируемых дорожных одежд. На рис. 7 представлены различные варианты формы импульса ударного нагружения, в частности, синусоидальная, пилообразная и треугольная, соответствующие различным вариантам приложения ударной нагрузки. В рамках данного исследования рассматривалась синусоидальная форма, в наибольшей степени отвечающая экспериментальному нагружению, воспроизводимому установкой ударного нагружения FWD.

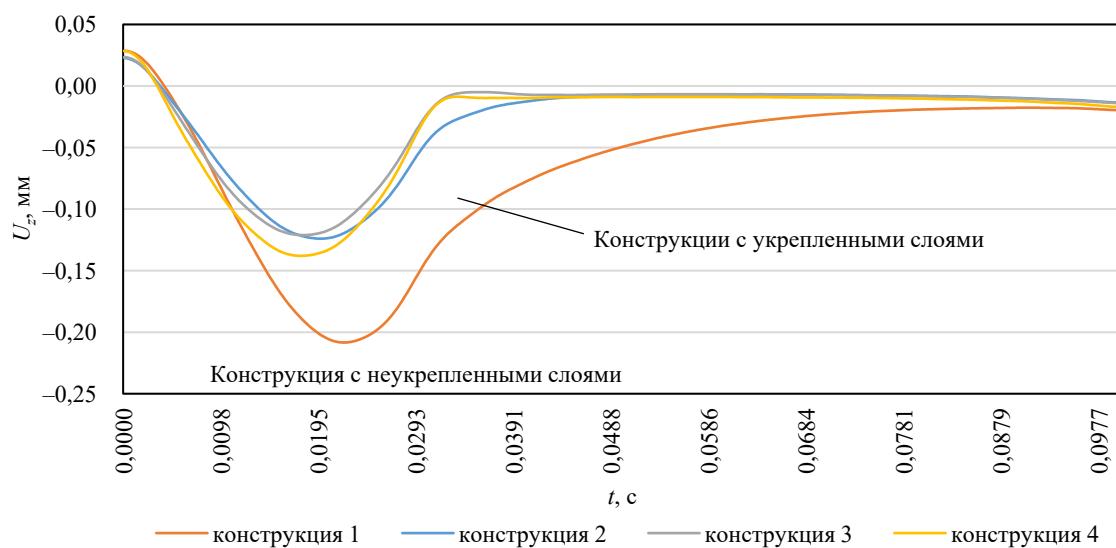


Рис. 6. Расчетная амплитудно-временная характеристика перемещения на поверхности исследуемых конструкций

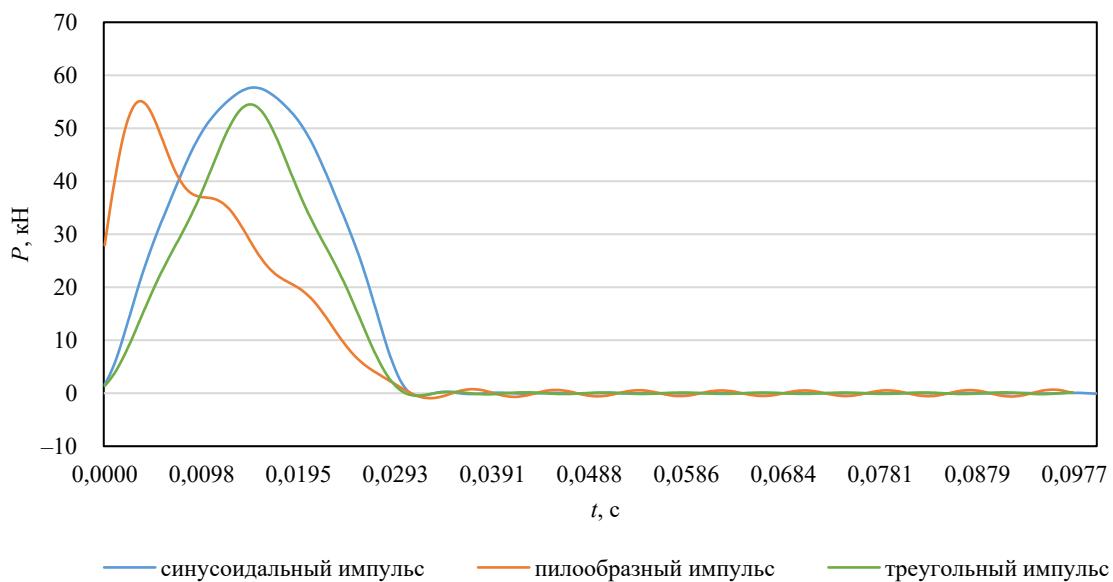


Рис. 7. Расчетные формы импульса нагрузки на поверхности конструкции дорожной одежды 4

Результаты построения динамических петель гистерезиса и результаты определения динамической энергии деформирования представлены на рис. 8 и в таблице 2 соответственно.

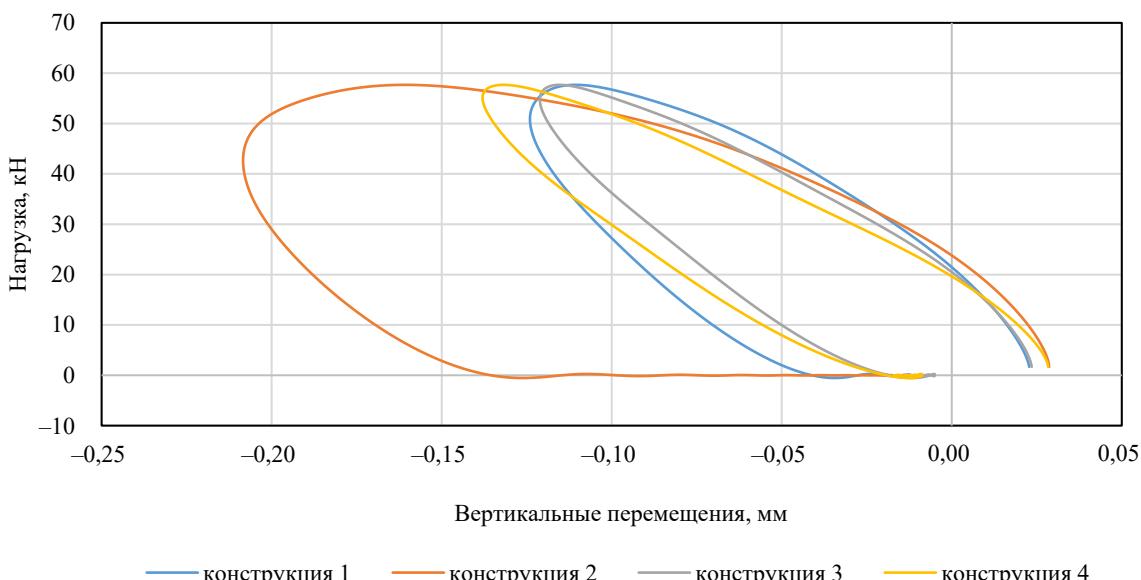


Рис. 8. Динамические петли гистерезиса, рассчитанные на поверхности конструкций дорожных одежд

Таблица 2

Расчетная величина энергии деформирования, рассеянной в конструкциях

Слой	Энергия деформирования, Дж/м <sup>3</sup>
Конструкция 1	9,43
Конструкция 2	3,00
Конструкция 3	3,27
Конструкция 4	3,56

Для экспериментального подтверждения полученных результатов были проведены измерения установкой ударного нагружения FWD PRIMAX 1500 на реальных эксплуатируемых дорожных одеждах, конструкция которых была аналогична конструкциям 1, 3 и 4, приведенным в таблице 1. Полученные экспериментальные формы петель динамического гистерезиса представлены на рис. 9, а экспериментальные значения энергии деформирования, рассеянной в конструкции, представлены в таблице 3.

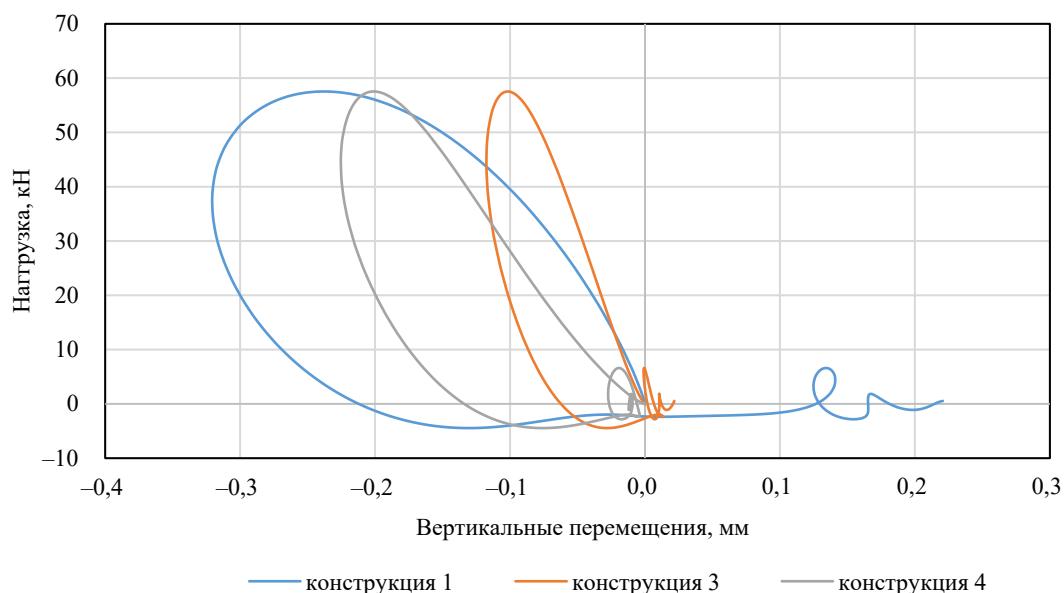


Рис. 9. Динамические петли гистерезиса, инструментально зарегистрированные на поверхности конструкций дорожных одежд

Таблица 3

Экспериментальная величина энергии деформирования, рассеянной в конструкциях

Слои	Энергия деформирования, Дж/м <sup>3</sup>
Конструкция 1	9,44
Конструкция 3	3,74
Конструкция 4	4,56

Варианты конструкции дорожной одежды, аналогичной конструкции 2, на текущий момент проходят стадии технико-экономического обоснования применимости и в натурных условиях дорожной сети РФ не реализованы.

**Обсуждение.** Анализируя данные таблицы 2 и 3, можно сделать вывод, что наибольшая величина рассеяния энергии деформирования характерна для традиционного варианта конструкции 1, в котором жесткости конструктивных слоев увеличиваются снизу вверх. Наименьшая величина рассеяния энергии, несомненно, характерна для самой жесткой конструкции, 2, предполагающей устройство всех слоев с применением укрепления вязющими. Однако нужно отметить, что почти такой же эффект может быть достигнут путем укрепления в первую очередь рабочего слоя земляного полотна. Так, на основе результатов численного моделирования установлено, что укрепление только слоя земляного полотна даже без устройства укрепленного слоя основания под асфальтобетоном позволяет снизить величину рассеиваемой энергии деформирования с 9,43 до 3,56 Дж/м<sup>3</sup>. Также можно сделать вывод, что в наибольшей степени влияние на величину рассеиваемой энергии оказывает именно модуль упругости подстилающего полупространства, моделирующего земляное полотно. Таким образом, наибольший эффект, как технический, так и экономический, может быть достигнут путем укрепления верха земляного полотна с сохранением несвязных слоев в основании дорожной конструкции (аналогично конструкциям 3 и 4). Это решение позволит приблизить функционирование дорожной одежды к упругой стадии и вместе с тем снизить риски появление трещин на поверхности покрытия из-за излишне жесткого слоя укрепленного основания. Эти результаты моделирования в целом подтверждаются результатами натурного эксперимента, в рамках которого установлено, что экспериментальная энергия деформирования на поверхности неукрепленной конструкции 1, составляющая 9,44 Дж/м<sup>3</sup>, при наличии укрепленного слоя земляного полотна снижается до 4,56 Дж/м<sup>3</sup>, а при наличии укрепленного слоя основания под асфальтобетоном и укрепленного слоя земляного полотна — до 3,74 Дж/м<sup>3</sup>. Данный факт подтверждает качественное совпадение результатов натурных и расчетных экспериментов. Результаты исследований могут быть применены при обосновании конкурирующих вариантов устройства дорожной одежды, а также развиты для отрасли эксплуатации автомобильных дорог с точки зрения оценки их остаточного ресурса [34, 35]. Важным выводом является установление наибольшего влияния на величину диссипации энергии деформирования именно укрепления слоя земляного полотна. В последние годы проблема применения различных укрепляющих добавок для грунтов активно поднимается на различных уровнях [36–38]. После получения

большего количества данных об укреплении земляного полотна с применением соответствующих добавок и стабилизации полученные результаты могут быть использованы для доказательства эффекта от их введения. Несомненно, это потребует проведения исследований с применением установок динамического нагружения и штамповых испытаний [39, 40], которые позволяют напрямую регистрировать петли динамического гистерезиса и кривые нагрузки-разгрузки и получить необходимую информацию о расчетных характеристиках подобных слоев. Также представленный в исследовании подход может быть эффективно отработан на полигонах ускоренного тестирования дорожных одежд [41] и использован для калибровки моделей при ухудшении их эксплуатационного состояния [42].

**Заключение.** Таким образом, в результате проведенного в рамках данной работы анализа диссипации энергии деформирования в структуре дорожных одежд с различными вариантами расположения укрепленных слоев и оценки наиболее эффективных вариантов расположения укрепленных слоев в структуре дорожной одежды установлено, что наибольшее влияние на величину диссипации энергии деформирования оказывает укрепление земляного полотна, моделируемого как упругое полупространство, не ограниченное по толщине. Данный вывод подтвержден в ходе экспериментальных исследований, показавших аналогичную качественную картину изменения рассеиваемой энергии деформирования в конструкции, включающей только неукрепленные слои, конструкции с укрепленным слоем земляного полотна и конструкции с укрепленным слоем основания и укрепленным слоем земляного полотна. Показано, что устройство укрепленных слоев оснований более чем в 2–3 раза снижает величину диссипации энергии деформирования в структуре дорожной одежды.

#### Список литературы / References

1. Raza MS, Sharma SK. A Review of Mechanical and Durability Properties and Microstructure of Semi-Flexible Pavement. *Innovative Infrastructure Solutions*. 2024;9(4):83. <https://doi.org/10.1007/s41062-024-01393-w>
2. Ghazizadeh AR, Salehi M, Mamou A, Koutras EI, Jalali F, Asteris PG. Investigation of Subgrade Stabilization Life-Extending Benefits in Flexible Pavements Using a Non-Linear Mechanistic-Empirical Analysis. *Infrastructures*. 2024;9(2):33. <https://doi.org/10.3390/infrastructures9020033>
3. Bei Zhang, Di Wang, Yanhui Zhong, Xiaolong Li, Hongjian Cai, Tao Wang. Mechanical Analysis of Semi-Rigid Base Asphalt Pavement under the Influence of Groundwater with the Spectral Element Method. *Applied Sciences*. 2024;14(6):2375. <https://doi.org/10.3390/app14062375>
4. Klyuev SV, Klyuev AV, Ayubov NA, Fediuk RS, Levkina EV. Finite Element Design and Analysis of Sustainable Mono-Reinforced and Hybrid-Reinforced Fibergeopolymers. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(3):171–185. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-3-171-185>
5. Tretyakov DA, Osovik DS. Estimation of Stresses in a Plate with a Concentrator through Ultrasonic Measurements of Acoustic Anisotropy. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024;24(4):307–315. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-4-307-315>
6. Babushkina NE, Lyapin AA. Determination of Dynamic Stresses and Displacements under the Action of an Impact Load on a Two-Layer Structure during the Indentation Process. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024;24(3):264–273. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-3-264-273>
7. Tiraturyan AN, Lyapin AA. Analysis of the Deformation Energy Dissipation in a Layered Medium Under Dynamic Loading (On the Example of Highways). *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2024;61:445–451. <https://doi.org/10.1007/s11204-024-09995-3>
8. Xinnan Xu, Mohan Zhao, Yu Liu, Chaofan Wu, Yuhao Pei, Chengmiao Zhang. Falling Weight Impact Acceleration-Time Signals Analysis for Road Modulus Detection: Theoretical and Experimental Investigations. *Case Studies in Construction Materials*. 2024;21:e03915. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2024.e03915>
9. Zhenlong Gong, Yinghao Miao, Lantieri C. Review of Research on Tire–Pavement Contact Behavior. *Coatings*. 2024;14(2):157. <https://doi.org/10.3390/coatings14020157>
10. Yongxiang Li, Longwei Zhao, Junfeng Gao, Yanyan Ru, Haiwei Zhang. Evaluation of the Fatigue Performance of Full-Depth Reclamation with Portland Cement Material Based on the Weibull Distribution Model. *Coatings*. 2024;14(4):437. <https://doi.org/10.3390/coatings14040437>
11. Yongxiang Li, Chuangdan Luo, Kuiliang Ji, Haiwei Zhang, Bowei Sun. Laboratory Evaluation of Strength Performance of Full-Depth Reclamation with Portland Cement Material. *Coatings*. 2024;14(5):573. <https://doi.org/10.3390/coatings14050573>
12. Mendoza-Sanchez JF, Alonso-Guzman EM, Martinez-Molina W, Chavez-Garcia HL, Soto-Espitia R, Delgado-Alamilla H, et al. A Critical Review of Pavement Design Methods Based on a Climate Approach. *Sustainability*. 2024;16(16):7211. <https://doi.org/10.3390/su16167211>
13. Karki B, Prova S, Isied M, Souliman M. Neural Network Approach for Fatigue Crack Prediction in Asphalt Pavements Using Falling Weight Deflectometer Data. *Applied Sciences*. 2025;15(7):3799. <https://doi.org/10.3390/app15073799>

14. Chunru Cheng, Linbing Wang, Xingye Zhou, Xudong Wang. Predicting Rutting Development Using Machine Learning Methods Based on RIOCHTrack Data. *Applied Sciences*. 2024;14(8):3177. <https://doi.org/10.3390/app14083177>
15. Cheng Shen, Zhengguang Wu, Peng Xiao, Aihong Kang, Yangbo Wang. Experimental Research on the Anti-Reflection Crack Performance of Basalt Fiber Modified Rubber Asphalt Stress-Absorbing Layer. *Materials*. 2024;17(9):2013. <https://doi.org/10.3390/ma17092013>
16. Rui Ma, Yiming Li, Peifeng Cheng, Xiule Chen, Aoting Cheng. Low-Temperature Cracking and Improvement Methods for Asphalt Pavement in Cold Regions: A Review. *Buildings*. 2024;14(12):3802. <https://doi.org/10.3390/buildings14123802>
17. Rui Pan. Fatigue Performance Evaluation of Warm-Mixed Rubber Asphalt Mixture for Stress Absorption Layer in Cold Area. *Buildings*. 2024;14(12):3817. <https://doi.org/10.3390/buildings14123817>
18. Ashraf A, Sophian A, Bawono AA. Crack Detection, Classification, and Segmentation on Road Pavement Material Using Multi-Scale Feature Aggregation and Transformer-Based Attention Mechanisms. *Construction Materials*. 2024;4(4):655–675. <https://doi.org/10.3390/constrmater4040036>
19. Bhattacharya S, Taylor R, D'Melo D, Campbell C. Sustainable Design of Pavements: Predicting Pavement Service Life. *Infrastructures*. 2024;9(9):165. <https://doi.org/10.3390/infrastructures9090165>
20. Zhen Liu, Bingyan Cui, Qifeng Yang, Xingyu Gu. Sensor-Based Structural Health Monitoring of Asphalt Pavements with Semi-Rigid Bases Combining Accelerated Pavement Testing and a Falling Weight Deflectometer Test. *Sensors*. 2024;24(3):994. <https://doi.org/10.3390/s24030994>
21. Asres E, Ghebrab T, Ekwaro-Osire S. Framework for Design of Sustainable Flexible Pavement. *Infrastructures*. 2022;7(1):6. <https://doi.org/10.3390/infrastructures7010006>
22. Chun-Hua Hsing, Jun-Han Siao, Yu-Min Wang. A Study on the Design Depth of Permeable Road Pavement through Dynamic Load Experiment. *Materials*. 2022;15(13):4391. <https://doi.org/10.3390/ma15134391>
23. Kryukov KM. Assessing the Benefits and Challenges of Implementing 4D Modeling in Construction. *Modern Trends in Construction, Urban and Territorial Planning*. 2025;4(2):75–84. <https://doi.org/10.23947/2949-1835-2025-4-2-75-84>
24. Al-Zgul IKh, Sheina SG, Morozova NE. Problems and Prospects of Risk-Oriented Management in Construction: A Review of Current Research. *Modern Trends in Construction, Urban and Territorial Planning*. 2025;4(3):65–76. <https://doi.org/10.23947/2949-1835-2025-4-3-65-76>
25. Tiraturyan AN. Backcalculation of Elastic Moduli for Layered Media Based on Dynamic Deformation Analysis (Example of Highways). *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2024;60(8):947–954. <https://doi.org/10.1134/S1061830924602010>
26. Xuefeng Ye, Na Yang, Huina Chen, Manman Yang, Tingyao Wu. Damage Identification and Safety Threshold During the Construction and Operation Phases of Cast-in-Place Continuous Rigid Frame Bridges. *Buildings*. 2025;15(18):3282. <https://doi.org/10.3390/buildings15183282>
27. Babesko VA, Evdokimova OV, Babesko OM, Zaretskaia MV, Gorshkova EM, Mukhin AS, et al. On the Behavior of Materials with Defective Coating under Different Contact Conditions. *Materials Physics and Mechanics*. 2018;36(1):67–75. [https://doi.org/10.18720/MPM.3612018\\_7](https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_7)
28. Lyapin A, Beskopylny A, Meskhi B. Structural Monitoring of Underground Structures in Multi-Layer Media by Dynamic Methods. *Sensors*. 2020;20(18):5241. <https://doi.org/10.3390/s20185241>
29. Tiraturyan AN, Uglova EV, Nikolenko DA, Nikolenko MA. Model for Determining the Elastic Moduli of Road Pavement Layers. *Magazine of Civil Engineering*. 2021;103(3):10308. <https://doi.org/10.34910/MCE.103.8>
30. Zhen Liu, Bingyan Cui, Qifeng Yang, Xingyu Gu. Sensor-Based Structural Health Monitoring of Asphalt Pavements with Semi-Rigid Bases Combining Accelerated Pavement Testing and a Falling Weight Deflectometer Test. *Sensors*. 2024;24(3):994. <https://doi.org/10.3390/s24030994>
31. Tutka P, Nagórski R, Złotowska M. The Impact of Dynamic Effects on the Results of Non-Destructive Falling Weight Deflectometer Testing. *Materials*. 2024;17(17):4412. <https://doi.org/10.3390/ma17174412>
32. Xia Hua, Wael Zatar, Xiangle Cheng, Gang S Chen, Yini She, Xiaotian Xu, et al. Modeling and Characterization of Complex Dynamical Properties of Railway Ballast. *Applied Sciences*. 2024;14(23):11224. <https://doi.org/10.3390/app142311224>
33. Meng Wang, Qunding Yu, Yuanjie Xiao, Wengi Li. Resilient Modulus Behavior and Prediction Models of Unbound Permeable Aggregate Base Materials Derived from Tunneling Rock Wastes. *Materials*. 2022;15(17):6005. <https://doi.org/10.3390/ma15176005>
34. Fang Wang, Shiyi Zhang, Muyang Huang, Kai Liu, Chaoliang Fu. Assessment of Fatigue Life in Grouted Polyurethane Composites for Pavement Maintenance. *Materials*. 2025;18(8):1806. <https://doi.org/10.3390/ma18081806>
35. Gensheng Hu, Gongzuo Shi, Runhua Zhang, Jianfeng Chen, Haichang Wang, Junzhe Wang. Assessment of Intelligent Unmanned Maintenance Construction for Asphalt Pavement Based on Fuzzy Comprehensive Evaluation and Analytical Hierarchy Process. *Buildings*. 2024;14(4):1112. <https://doi.org/10.3390/buildings14041112>
36. Piechowicz K, Szymanek S, Kowalski J, Lendo-Siwicka M. Stabilization of Loose Soils as Part of Sustainable Development of Road Infrastructure. *Sustainability*. 2024;16(9):3592. <https://doi.org/10.3390-su16093592>

37. Muhudin AA, Zami MS, Budaiwi IM, Abd El Fattah A. Experimental Study of Thermal Conductivity in Soil Stabilization for Sustainable Construction Applications. *Sustainability*. 2024;16(3):946. <https://doi.org/10.3390/su16030946>
38. Petrillo A, Fraternali F, Acampora A, Di Chiara G, Colangelo F, Farina I. Innovative Solidification and Stabilization Techniques Using Industrial By-Products for Soil Remediation. *Applied Sciences*. 2025;15(7):4002. <https://doi.org/10.3390/app15074002>
39. Jiacheng Cai, Yingchao Luo, Bing Zhang, Lei Chen, Lu Liu. Method for Extracting Impact Signals in Falling Weight Deflectometer Calibration Based on Frequency Filtering and Gradient Detection. *Sensors*. 2025;25(11):3317. <https://doi.org/10.3390/s25113317>
40. Kuttah D. Using Repeated Light-Weight Deflectometer Test Data to Predict Flexible Pavement Responses Based on the Mechanistic-Empirical Design Method. *Construction Materials*. 2024;4(1):216–237. <https://doi.org/10.3390/constrmater4010012>
41. Ni Guangcong, Tiraturyan AN, Uglova EV, Vorobev AV. Study on Dynamic Response Characteristics of Different Asphalt Pavement Structures Based on ALF Test. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(3):241–256. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-3-241-256>
42. Elshamy MM, Tiraturyan AN, Uglova EV. Evaluation of the Elastic Modulus of Pavement Layers Using Different Types of Neural Networks Models. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2021;21(4):364–375. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-4-364-375>

**Об авторе:**

**Артем Николаевич Тиратуриян**, доктор технических наук, профессор кафедры «Автомобильные дороги» Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [Ttiraturjan@list.ru](mailto:Ttiraturjan@list.ru)

**Конфликт интересов:** автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.**

**About the Author:**

**Artem N. Tiraturyan**, Dr.Sci. (Eng.), Professor of the Motorways Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [Ttiraturjan@list.ru](mailto:Ttiraturjan@list.ru)

**Conflict of Interest Statement:** the author declares no conflict of interest.

**The author has read and approved the final version of manuscript.**

**Поступила в редакцию / Received** 13.09.2025

**Поступила после рецензирования / Reviewed** 19.10.2025

**Принята к публикации / Accepted** 06.11.2025

ИНФОРМАТИКА,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ  
INFORMATION TECHNOLOGY,  
COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT



УДК 681.515

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2209>

Оригинальное эмпирическое исследование

**Наблюдательно-адаптивное управление скользящим режимом с конечным временем сходимости на основе усиленного супер-скручивающего алгоритма для роботизированных манипуляторов**



EDN: OZLBEC

Хоанг Дык Лонг

Технический университет имени Ле Куи Дона, Ханой, Вьетнам

✉ [longhd@lqdtu.edu.vn](mailto:longhd@lqdtu.edu.vn)

**Аннотация**

**Введение.** Роботизированные манипуляторы эксплуатируются в условиях изменчивой среды с неопределённостями, внешними возмущениями и возможными отказами приводов, что существенно осложняет проектирование надёжных систем управления. Важность разработки робастных и практически реализуемых алгоритмов управления возрастает с ростом применения манипуляторов в опасных, точных и сверхбыстрых операциях (промышленная автоматизация, медицина, космические и сервисные роботы). Традиционные ПИД-регуляторы и методы вычисления момента просты, но недостаточно устойчивы к немоделированным воздействиям. Управление скользящим режимом, в частности алгоритм супер-скручивания (STA), обеспечивает повышенную робастность и конечную сходимость, однако страдает эффектом дрожания и часто требует априорной информации о границах возмущений. Современные модификации (например, AGITSMC) достигают конечного времени сходимости и снижают дрожание, но могут вызывать завышение управляющих усилий и сохраняющиеся остатки при оценке возмущений и отказов. В литературе заметен пробел: отсутствует интегрированный подход, который одновременно обеспечивает конечно-временную сходимость, адаптивную компенсацию неизвестных возмущений и отказов, подавление дрожания и практическую реализуемость. Поэтому целью данной работы стало разработать и проанализировать новую структуру управления OFASTSMC (Observer-Based Finite-Time Adaptive Reinforced Super-Twisting Sliding Mode Control), объединяющую конечновременный наблюдатель, адаптивную настройку усилий и сглаженное супер-скручивающее управление. Решаемые задачи: построение конечновременного наблюдателя для оценки возмущений и отказов в режиме онлайн; разработка адаптивного механизма настройки усилий для предотвращения завышения управляющих сигналов; внедрение сглаженной STA для минимизации дрожания; проведение анализа устойчивости; выполнение численных и экспериментальных проверок на роботизированных манипуляторах.

**Материалы и методы.** Рассматривается стандартная динамическая модель роботизированного манипулятора с  $n$  степенями свободы, построенная на основе лагранжевой механики. Модель учитывает нелинейные связи, вязкое трение, внешние возмущения и аддитивные отказы приводов. Для обеспечения робастного управления с конечным временем сходимости была разработана усиленная скользящая поверхность, использующая нелинейные ошибки с адаптивными степенями — это ускоряет процесс сходимости. В схему управления включён конечно-временной расширенный наблюдатель состояния (ESO), позволяющий в реальном времени оценивать суммарные возмущения и моменты отказов приводов. На основе этих оценок закон управления реализован в виде супер-скручивающего алгоритма скользящего режима с адаптивной настройкой коэффициентов и использованием граничного слоя для снижения дрожания при сохранении высокой робастности. Устойчивость замкнутой системы строго проанализирована с использованием аппарата теории Ляпунова — это позволило доказать достижение конечного времени сходимости ошибок слежения под действием предложенного регулятора. Предложенный

алгоритм OFASTSMC реализован в среде MATLAB/Simulink и проверен на примере плоского роботизированного манипулятора с двумя степенями свободы. Манипулятор подвергался действию переменных возмущений и сценариев деградации привода. Для объективного сравнения эффективности метод сопоставлялся с AGITSMC при идентичных начальных условиях, параметрах модели и опорных траекториях.

**Результаты.** Численные эксперименты демонстрируют, что предложенный метод OFASTSMC значительно превосходит AGITSMC по точности слежения, устойчивости и плавности управления. В частности, максимальные ошибки по положению звеньев снижены более чем на 40 %, а время установления траектории уменьшено примерно на 25 %. Метод эффективно устраняет дрожание в управляющем сигнале за счёт функций насыщения и ограничений усиления, обеспечивая более плавное управление приводами. Адаптивный наблюдатель точно оценивает суммарные возмущения и входы отказов в реальном времени, обеспечивая компенсацию без предварительной информации. Эффективность метода подтверждена в различных сценариях: резкие отказы приводов, нелинейные нагрузки, переменные скорости траектории. Сходимость на скользящей поверхности достигается за конечное время, что подтверждает теоретические гарантии.

**Обсуждение.** OFASTSMC обеспечивает высокоточную и робастную траекторию слежения в условиях неопределённостей. Основное преимущество метода — интеграция адаптивной настройки степеней, наблюдательной обратной связи и ограниченного супер-скручивающего управления в единую структуру. В отличие от подходов с фиксированными усилениями или без наблюдательной обратной связи, предложенная схема адаптируется в реальном времени, что позволяет поддерживать сходимость и существенно снижать дрожание управления. Метод сочетает адаптивность, наблюдательную коррекцию и ограниченное супер-скручивание, обеспечивая устойчивую сходимость и минимизацию дрожания.

**Заключение.** Полученные результаты подтверждают, что OFASTSMC является эффективным и робастным решением для задачи траекторного слежения в присутствии неопределённостей. Метод демонстрирует вычислительную эффективность и простоту реализации, что делает его пригодным для практического применения. Для дальнейшего развития исследования планируется переход к реализации управления в пространстве задач и проведение экспериментов на физическом оборудовании с учётом шумов и модельных несоответствий.

**Ключевые слова:** роботизированные манипуляторы, устойчивость за конечное время, алгоритм супер-скручивания, управление на основе скользящего режима, отказ привода, адаптивное управление, управление с наблюдателем

**Благодарности.** Автор выражает благодарность коллегам с кафедры автоматики и вычислительной техники Технического университета Ле Куи Дона за помощь в подготовке текста статьи.

**Для цитирования.** Хоанг Дык Лонг. Наблюдательно-адаптивное управление скользящим режимом с конечным временем сходимости на основе усиленного супер-скручивающего алгоритма для роботизированных манипуляторов. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):337–349. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2209>

Original Empirical Research

## Observer-Based Finite-Time Adaptive Reinforced Super-Twisting Sliding Mode Control for Robotic Manipulators

Hoang Duc Long 

Le Quy Don Technical University, Hanoi, Vietnam

✉ [longhd@lqdtu.edu.vn](mailto:longhd@lqdtu.edu.vn)

### Abstract

**Introduction.** Robotic manipulators operate in dynamic environments under uncertainties, external disturbances, and actuator faults, posing a critical challenge to their control design. While traditional control strategies, such as PID or computed torque control, offer simplicity, they often lack robustness to unmodeled dynamics. The development of robust and practically implementable control algorithms is becoming increasingly important with the growing use of manipulators in dangerous, precise and ultra-fast operations (industrial automation, medicine, space and service robots). Conventional PID controllers and torque calculation methods are simple but not robust enough to handle unmodeled effects. Sliding Mode Control (SMC), particularly the Super-Twisting variant (STA), provides strong robustness, but suffers from chattering and typically requires prior knowledge of system bounds. Recent advancements like Adaptive Global Integral Terminal Sliding Mode Control (AGITSMC) improve finite-time convergence but may result in overestimated control gains and residual switching effects. This research addresses a critical gap in current methods: the lack of a unified control approach that ensures finite-time convergence, suppresses chattering, and compensates for both unknown disturbances and actuator faults using observer feedback. The objective of this work is to design and analyze an Observer-Based Finite-Time Adaptive Reinforced Super-Twisting Sliding Mode Control (OFASTSMC) framework that adaptively adjusts its gains, estimates disturbances online, and guarantees smooth, robust performance even in the presence of severe nonlinearities and faults. The objective of this study is to develop and analyze an Observer-Based

Finite-Time Adaptive Reinforced Super-Twisting Sliding Mode Control (OFASTSMC) framework that unifies finite-time observer feedback, adaptive gain tuning, and reinforced sliding surfaces to achieve robust trajectory tracking of robotic manipulators under disturbances and actuator faults, while effectively minimizing chattering and ensuring practical implementability.

**Materials and Methods.** This study considers the standard dynamic model of an  $n$ -DOF robotic manipulator derived using Lagrangian mechanics. The model accounts for nonlinear coupling effects, viscous friction, external disturbances, and additive actuator faults. To achieve robust finite-time control, a reinforced sliding surface is constructed using nonlinear error terms with adaptive power exponents, which accelerates error convergence. A finite-time extended state observer (ESO) is incorporated to estimate lumped disturbances and actuator fault torques in real time. Based on these estimates, the control law integrates a super-twisting sliding mode algorithm with adaptive gain tuning and boundary-layer smoothing to reduce chattering while ensuring strong robustness. The closed-loop system stability is formally analyzed within a Lyapunov framework, where rigorous proofs confirm finite-time convergence of the tracking error under the proposed controller. The proposed OFASTSMC algorithm is implemented in MATLAB/Simulink and validated on a 2-DOF planar robotic manipulator. The manipulator is subjected to time-varying disturbances and actuator degradation scenarios. For benchmarking, the method is directly compared with AGITSMC, using identical initial conditions, model parameters, and reference trajectories to ensure a fair and consistent performance evaluation.

**Results.** Simulation results demonstrate that the proposed OFASTSMC method significantly outperforms the benchmark AGITSMC in terms of tracking precision, robustness, and control smoothness. Specifically, the maximum joint position errors were reduced by over 40% compared to AGITSMC, and the settling time to reach the desired trajectory was shortened by approximately 25%. Additionally, the proposed method effectively mitigated chattering in the control signal due to the use of saturation functions and gain limits, resulting in smoother actuator commands. The adaptive observer accurately estimated the lumped disturbance and fault inputs in real time, providing effective fault compensation without prior knowledge. These improvements were validated across multiple scenarios including abrupt actuator failures, nonlinear load torques, and varying trajectory speeds. The sliding surface convergence was achieved in finite time, confirming the theoretical guarantees of the method.

**Discussion.** The results validate that OFASTSMC achieves robust, high-precision tracking for robotic manipulators operating under real-world uncertainties. Its novelty lies in the integration of adaptive exponent tuning, finite-time observer feedback, and gain-limited super-twisting control into a unified and practical framework. Unlike previous methods that rely on fixed gain structures or ignore observer feedback, OFASTSMC adapts in real-time and maintains finite-time convergence guarantees with minimal chattering.

**Conclusion.** The results obtained confirm that OFASTSMC is an efficient and robust solution to the trajectory tracking problem in the presence of uncertainties. The method is computationally efficient and easy to implement in digital control systems, making it suitable for practical deployment in industrial robots, service manipulators, or surgical arms. Future research will focus on extending this method to task-space control and real hardware implementation under sensor noise and model mismatches.

**Keywords:** robotic manipulators, finite-time stability, super-twisting algorithm, sliding mode control, actuator fault, adaptive control, observer-based control

**Acknowledgements.** The author would like to thank the colleagues at the Department of Automation and Computing Techniques, Le Quy Don Technical University, for assistance in preparing the text of the article.

**For Citation.** Hoang Duc Long. Observer-Based Finite-Time Adaptive Reinforced Super-Twisting Sliding Mode Control for Robotic Manipulators. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):337–349. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2209>

**Введение.** Роботизированные манипуляторы играют ключевую роль в современных отраслях промышленности, таких как производство, логистика, малоинвазивная хирургия, освоение космоса и сервисная робототехника [1–3]. Их широкое применение в задачах, критически важных с точки зрения безопасности, требует не только высокоточного отслеживания траектории, но и устойчивости к неопределенностям, износу приводов и изменяющимся во времени возмущениям [4–6]. В условиях растущей сложности систем Industry 4.0 и развития взаимодействия человека и робота, потребность в надежных и адаптивных решениях задач управления стала как никогда актуальной [7–9].

Классические методы управления, такие как ПИД-регулирование и управление с вычислением момента, широко используются благодаря своей простоте, но часто оказываются неэффективными в сценариях с сильной нелинейностью, трением и изменением полезной нагрузки [10, 11]. Управление по модели предсказания (MPC) улучшает прогнозирование и производительность, но требует точного моделирования и значительных вычислительных ресурсов [4, 12, 13]. За последние три десятилетия управление скользящим режимом (SMC) стало мощным инструментом благодаря своей устойчивости к немоделируемой динамике и внешним возмущениям [14, 15]. Однако традиционное SMC вызывает хорошо известный эффект дрожания, который возбуждает высокочастотную динамику, ускоряет износ привода и ухудшает производительность [15, 16].

Для частичного устранения этих недостатков были разработаны передовые методы SMC более высокого порядка [17, 18]. В частности, алгоритм супер-скручивания (STA) обеспечивает непрерывное управление с уменьшенным дрожжанием. Он был расширен до адаптивных форм [19–21]. Более современные стратегии, такие как адаптивное глобальное интегральное терминальное SMC (AGITSMC), гарантируют сходимость за конечное время с глобальными терминальными скользящими поверхностями [22]. Тем не менее, эти подходы часто требуют точного знания границ возмущений, что приводит к завышенному усилинию управления и остаточным эффектам переключения.

Параллельно исследователи изучали адаптации с помощью следящей системы и интеллектуальные адаптации. Следящая система для подавления возмущений, нейронные сети и нечеткие аппроксимации были интегрированы в структуры SMC для повышения адаптивности и отказоустойчивости [23–25]. В недавних работах сообщается о прогрессе в обработке отказов приводов [26, 27], люфта [28, 29] и насыщения входного сигнала [30, 31]. Обзоры усовершенствованного управления манипуляторами [32, 33] подчеркивают, что, несмотря на значительный прогресс, выработка единого решения, которое бы уравновешивало сходимость за конечное время, обеспечивало подавление помех с помощью следящей системы, адаптивное регулирование усиления и минимизацию дрожжания, остается серьезной проблемой.

Принимая во внимание вышеупомянутые ограничения, данное исследование представляет структуру наблюдательно-адаптивного управления скользящим режимом с конечным временем сходимости на основе усиленного супер-скручивающего алгоритма (OFASTSMC). Предложенный метод интегрирует:

- расширенный наблюдатель состояния с конечным временем выполнения для оперативной оценки локальных помех и отказов привода,
- усиленную поверхность скольжения с адаптивными показателями для ускорения сходящегося процесса,
- адаптивный закон управления с супер-скручиванием с сглаживанием пограничного слоя для уменьшения дрожжания.

Основной вклад данной работы заключается в следующем.

1. Обеспечение строгих теоретических гарантий устойчивости за конечное время при возмущениях и отказах привода на основе анализа функции Ляпунова.
2. Разработка унифицированной адаптивной конструкции, сочетающей обратную связь от следящей системы, адаптивную настройку усиления и плавное управление.
3. Проведение всесторонней проверки на тестовом стенде роботизированного манипулятора с двумя степенями свободы (2-DOF), продемонстрирующего исключительную надежность, точность и отказоустойчивость по сравнению с AGITSMC.

## Материалы и методы

### 1. Математическая модель роботизированного манипулятора с n-DoF

Роботизированные манипуляторы управляются в высшей степени нелинейной и связанной динамикой, что обусловлено их механической структурой и взаимодействием с окружающей средой. Для последовательного роботизированного манипулятора с n степенями свободы (n-DoF), работающего в пространстве суставов, уравнения движения могут быть представлены в стандартной лагранжевой формулировке следующим образом [22]:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_v\dot{q} = \tau + \tau_d + \tau_f, \quad (1)$$

где  $q \in \mathbb{R}^n$  — вектор положения сустава;  $\dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$  — совместные векторы скорости и ускорения;  $H(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — определённо-положительная и симметричная матрица инерции;  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — матрица Кориолиса и центробежная матрица;  $G(q) \in \mathbb{R}^n$  — вектор гравитационного момента;  $F_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — диагональная матрица коэффициентов вязкого трения;  $\tau \in \mathbb{R}^n$  — управляющий входной крутящий момент;  $\tau_d \in \mathbb{R}^n$  — неизвестный крутящий момент внешнего возмущения;  $\tau_f \in \mathbb{R}^n$  — крутящий момент отказа привода.

**Модель отказа привода и возмущений.** В ходе моделирования практической деградации и отказов привода мы полагаем, что отказы привода  $\tau_f$  являются аддитивными, ограниченными и, возможно, изменяющимися во времени. Общий немоделируемый вход определяется как:

$$\tau_u = \tau_d + \tau_f. \quad (2)$$

Мы полагаем, что  $\tau_u(t)$  ограничен таким образом:

$$\|\tau_u(t)\| \leq a_0 + a_1 \|q(t)\| + a_2 \|\dot{q}(t)\|^2,$$

где  $a_0, a_1, a_2 > 0$  — неизвестные положительные константы.

Рис. 1.  $n$ -степенной роботизированный манипулятор

**Свойства динамики.** Динамика манипулятора удовлетворяет следующим стандартным свойствам, которые необходимы для проектирования системы управления и анализа устойчивости:

- **P1:**  $H(q)$  — симметричная и равномерно определенно-положительная.
- **P2:**  $\dot{H}(q) - 2C(q, \dot{q})$  — кососимметрична.
- **P3:** все члены  $H(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ ,  $G(q)$  — локально липшицевы и удовлетворяют полиномиальным ограничениям роста в  $q$ ,  $\dot{q}$ .

**Цель.** При заданной траектории  $q_d(t) \in C^2$  задача управления состоит в разработке устойчивого адаптивного закона управления  $\tau(t)$  таким образом, чтобы:

$$\lim_{t \rightarrow T} \|q(t) - q_d(t)\| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow T} \|\dot{q}(t) - \dot{q}_d(t)\| = 0, \quad (3)$$

за конечное время  $T < \infty$ , несмотря на наличие неизвестных ограниченных возмущений  $\tau_d$ , отказов привода  $\tau_f$  и параметрических неопределенностей.

## 2. Разработка алгоритма OFASTSMC

Определение погрешностей отслеживания:

$$e_1 = q - q_d(t), \quad e_2 = \dot{q} - \dot{q}_d(t). \quad (4)$$

Усиленная скользящая поверхность:

$$s = e_2 + \alpha_1 |e_1|^{p_1} \operatorname{sign}(e_1) + \alpha_2 |e_1|^{p_2} \operatorname{sign}(e_1) \quad (5)$$

с адаптивными показателями  $p_1(t), p_2(t) \in (0, 1)$ , основанными на величине состояния:

$$p_1(t) = \frac{1}{1 + \kappa_1 e^{-|\dot{q}|}}, \quad p_2(t) = \frac{1}{1 + \kappa_2 e^{-|\ddot{q}_d|}}. \quad (6)$$

Наблюдатель конечного времени (модифицированный ESO):

$$\hat{\tau}_d = \frac{\lambda_0 (s - s_{\text{prev}})}{dt}, \quad (7)$$

где  $\lambda_0 > 0$ ,  $s_{\text{prev}}$  является предыдущим значением  $s$ .

Законы адаптивного усиления:

$$\dot{K}_1 = \gamma_1 |s|, \quad \dot{K}_2 = \gamma_2 |s|^p. \quad (8)$$

Закон управления (OFASTSMC):

$$\tau = -\lambda s - K_1 |s|^p \operatorname{sign}(s) - \hat{\tau}_d + C(q, \dot{q}) + G(q) + F_v \dot{q} - H(q) \ddot{q}_d. \quad (9)$$

**Преимущества перед существующими подходами.** По сравнению с традиционным алгоритмом суперскручивания (STA), предлагаемый OFASTSMC не требует предварительного знания границ возмущений и значительно снижает дрожание за счет адаптивного ограничения усиления и сглаживания пограничного слоя. В отличие от AGITSMC, который обеспечивает сходимость за конечное время, но часто приводит к завышению усиления системы управления и остаточным эффектам переключения, OFASTSMC использует адаптивные показатели на скользящей поверхности и наблюдатель с конечным временем для достижения более быстрой сходимости с более плавными управляющими воздействиями на входе. Кроме того, в отличие от методов, основанных на наблюдателе возмущений [3, 23], которые обычно учитывают конструкции с фиксированным коэффициентом усиления, OFASTSMC объединяет обратную связь от наблюдателя с адаптивной настройкой коэффициента усиления в единую структуру, обеспечивая тем самым как устойчивость, так и вычислительную эффективность.

### 3. Анализ устойчивости

Допущение 1. Искомая траектория  $q_d(t) \in C^2$  ограничена ограниченными производными.

Допущение 2. Возмущение и момент сбоя ограничены:

$$\|\tau_d + \tau_f\| \leq a_0 + a_1 \|q(t)\| + a_2 \|\dot{q}(t)\|^2. \quad (10)$$

#### Лемма 1. Сходимость скользящей переменной за конечное время

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\dot{s}(t) = -k_1 s(t) - k_2 |s(t)|^\rho \operatorname{sign}(s(t)), \quad k_1, k_2 > 0, \quad 0 < \rho < 1. \quad (11)$$

Тогда переменная скольжения  $s(t)$  сходится к нулю за конечное время  $T_s$ , т. е.,  $T_s > 0$  так, что  $s(t) = 0$  для всех  $t \geq T_s$ .

**Доказательство.** Мы определяем функцию-кандидат Ляпунова:

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2. \quad (12)$$

Производная  $V(s)$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= s \dot{s} = s(-k_1 s - k_2 |s|^\rho \operatorname{sign}(s)) \\ &= s(-k_1 s - k_2 |s|^\rho \operatorname{sign}(s)) \\ &= -k_1 s^2 - k_2 |s|^{1+\rho} \\ &= -2k_1 V - k_2 (2V)^{\frac{1+\rho}{2}} \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть  $\alpha = \frac{1+\rho}{2} \in (0, 5; 1)$ , тогда:

$$\dot{V}(s) \leq -2k_1 V - k_2 (2V)^\alpha. \quad (14)$$

Это дифференциальное неравенство в виде:

$$\dot{V}(t) \leq -aV(t) - bV^\alpha(t), \quad a, b > 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (15)$$

Согласно стандартной теории устойчивости за конечное время [23–25], это означает, что:  $V(t) \rightarrow 0$  за конечное время. Оценим время стабилизации. Игнорируя линейный член  $-2k_1 V$ , при консервативной оценке:

$$\dot{V} \leq -k_2 (2V)^\alpha = -CV^\alpha, \quad C = k_2 2^\alpha. \quad (16)$$

Отдельные переменные:

$$\frac{dV}{V^\alpha} \leq -C dt. \quad (17)$$

Следовательно:

$$\int_{V(0)}^0 \frac{dV}{V^\alpha} \leq -C \int_0^{T_s} dt \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha} \left[ V^{1-\alpha} \right]_{V(0)}^0 = \frac{V^{1-\alpha}(0)}{1-\alpha} \geq CT_s \Rightarrow T_s \leq \frac{V^{1-\alpha}(0)}{C(1-\alpha)} = \frac{\left( \frac{s^2(0)}{2} \right)^{1-\alpha}}{k_2 2^\alpha (1-\alpha)}, \quad (18)$$

где  $V(0)$  — это начальное значение Ляпунова, а  $T_s$  — максимальное время стабилизации. Таким образом,  $s(t) \rightarrow 0$  за конечное время.

#### Теорема 1. Устойчивость погрешности отслеживания за конечное время

Для нелинейной системы робота-манипулятора (1) при управлении с помощью наблюдательно-адаптивного управления скользящим режимом с конечным временем сходимости на основе усиленного супер-скручивающего алгоритма (OFASTSMC) (9) с поверхностью скольжения (5) и адаптивными коэффициентами усиления (8), погрешность слежения  $e_1 = q - q_d$  сходится к нулю за конечное время.

**Доказательство.** Из (4):

$$\dot{e}_2 = \ddot{q} - \ddot{q}_d = H^{-1} (\tau + \tau_d + \tau_f - C\dot{q} - G - F_v) - \ddot{q}_d. \quad (19)$$

Подставим закон управления (9) в (19), тогда:

$$\ddot{q} = H^{-1} (-\lambda s - K_1 s - K_2 |s|^\rho \operatorname{sign}(s) - \hat{\tau}_d + \tau_d + \tau_f). \quad (20)$$

Из (5), производная  $s(t)$ :

$$\dot{s} = \ddot{q} - \ddot{q}_d + (\alpha_1 p_1 |e_1|^{p_1-1} + \alpha_2 p_2 |e_1|^{p_2-1}) e_2. \quad (21)$$

Тогда:

$$\dot{s} = -H^{-1} \left( \lambda s + K_1 s + K_2 |s|^\rho \operatorname{sign}(s) + \tilde{\tau}_d \right) + \left( \alpha_1 p_1 |e_1|^{p_1-1} + \alpha_2 p_2 |e_1|^{p_2-1} \right) e_2, \quad (22)$$

где  $\tilde{\tau}_d = \hat{\tau}_d - (\tau_d + \tau_f)$ .

Мы выбираем функцию-кандидат Ляпунова:

$$V(s) = \frac{1}{2} s^T s. \quad (23)$$

Производная  $V(s)$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= s^T \dot{s} = s^T \left( -H^{-1} \left( \lambda s + K_1 s + K_2 |s|^\rho \operatorname{sign}(s) + \tilde{\tau}_d \right) + \left( \alpha_1 p_1 |e_1|^{p_1-1} + \alpha_2 p_2 |e_1|^{p_2-1} \right) e_2 \right), \\ &= -s^T H^{-1} \left( \lambda s + K_1 s + K_2 |s|^\rho \operatorname{sign}(s) \right) - s^T H^{-1} \tilde{\tau}_d + s^T \Psi(q, \dot{q}, e_1) \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\Psi(q, \dot{q}, e_1) = \left( \alpha_1 p_1 |e_1|^{p_1-1} + \alpha_2 p_2 |e_1|^{p_2-1} \right) e_2$ .

Теперь проанализируем каждый терм.

**Терм 1.** Определенно-отрицательная диссипация:

$$-s^T H^{-1} \left( \lambda s + K_1 s + K_2 |s|^\rho \operatorname{sign}(s) \right) \leq -\mu \lambda \|s\|^2 - \mu K_1 \|s\|^2 - \mu K_2 \|s\|^{1+\rho}. \quad (25)$$

Здесь  $\mu = \lambda_{min}(H^{-1}) > 0$ .

**Терм 2.** Погрешность оценки:

$$|s^T H^{-1} \tilde{\tau}_d| \leq \|s\| \|H^{-1}\| \|\tilde{\tau}_d\| \leq \mu_{\max} \|s\| \|\tilde{\tau}_d\|. \quad (26)$$

Здесь и возникает погрешность оценки. Если наблюдатель хорошо спроектирован, тогда:

$$\|\tilde{\tau}_d\| \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Таким образом, это ограниченный и исчезающий терм, в конечном итоге определяемый сильным отрицательным рассеянием в Терме 1.

**Терм 3.** Нелинейный «ограниченный» терм  $s^T \Psi$ :

$$|s^T \Psi| = \left| s^T \left( \alpha_1 p_1 |e_1|^{p_1-1} + \alpha_2 p_2 |e_1|^{p_2-1} \right) e_2 \right| \leq \|s\| \|e_2\| \left( \alpha_1 p_1 |e_1|^{p_1-1} + \alpha_2 p_2 |e_1|^{p_2-1} \right). \quad (28)$$

Пусть  $\eta(q, \dot{q}, t) = \left( \alpha_1 p_1 |e_1|^{p_1-1} + \alpha_2 p_2 |e_1|^{p_2-1} \right) \|e_2\|$ . Тогда:

$$|s^T \Psi| \leq \|s\| \eta(q, \dot{q}, t) = \delta_1 \|s\|. \quad (29)$$

Объединим (25), (26), (29) и (24):

$$\dot{V}(s) \leq -\mu(\lambda + K_1) \|s\|^2 - \mu K_2 \|s\|^{1+\rho} + \mu_{\max} \|s\| \|\tilde{\tau}_d\| + \delta_1 \|s\|. \quad (30)$$

В результате  $\|\tilde{\tau}_d\| \rightarrow 0$ ,  $K_1, K_2$  растут адаптивно, первые два отрицательных терма преобладают над последними двумя, а  $\dot{V}(s) < 0$  — сходимость достигается за конечное время.

Из (30):

$$\dot{V}(t) \leq -2\mu(\lambda + K_1) \left( \frac{1}{2} \|s\|^2 \right) - 2^{\frac{1+\rho}{2}} \mu K_2 \left( \frac{1}{2} \|s\|^2 \right)^{\frac{1+\rho}{2}} = -c_1 V(t) - c_2 V^{\frac{1+\rho}{2}}(t), \quad (31)$$

где  $c_1 = 2\mu(\lambda + K_1)$ ;  $c_2 = 2^{(1+\rho)/2} \mu K_2 > 0$ ;  $0 < \rho < 1$ .

Затем, интегрируя неравенство с помощью теорем сравнения, получаем конечное время стабилизации  $T$ , таким образом, что  $V(t) = 0$  для всех  $t \geq T$ , где:

$$T \leq \frac{1}{c_1} \ln \left( 1 + \frac{c_1}{c_2 \left( 1 - \frac{1+\rho}{2} \right)} V^{\frac{1-\rho}{2}}(0) \right). \quad (32)$$

Или, более консервативно, если мы проигнорируем линейный терм  $-c_1 V(t)$ , тогда:

$$\dot{V}(t) \leq -c_2 V^\alpha(t), \quad \alpha = \frac{1+\rho}{2} \in (0.5, 1). \quad (33)$$

Как следует из леммы 1, интегрирование этого дает явное время сходимости за конечное время:

$$T \leq \frac{V^{1-\alpha}(0)}{c_2(1-\alpha)}. \quad (34)$$

**Результаты.** Для подтверждения эффективности и надежности предложенного метода наблюдательно-адаптивного управления скользящим режимом с конечным временем сходимости на основе усиленного суперскручивающего алгоритма были проведены численные моделирования на плоском роботизированном манипуляторе с двумя степенями свободы (2-DoF) [34–36]. Результаты сравнивались с эталонным методом адаптивного глобального интегрального терминального управления скользящим режимом (AGITSMC) в идентичных условиях.

При заданных массах  $m_1, m_2$ , длинах  $l_1, l_2$ , и силе тяжести звеньев  $g$ , матрицы имеют следующий вид:

– матрица инерции  $M(q)$ :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos q_2) & m_2 (l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2) \\ m_2 (l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

– матрица Кориолиса и центробежная матрица  $C(q, \dot{q})$ :

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2 & m_2 (l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2) \\ m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

– гравитационный вектор  $G(q)$ :

$$G(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 \sin q_1 + m_2 g l_2 \sin (q_1 + q_2) \\ m_2 g l_2 \sin (q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Внешнее возмущение, действующее на каждый сустав, определяется как:

$$\tau_d(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 0,5 \cos(2t) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Модель отказа привода предполагает потерю эффективности, которая происходит в момент времени  $t = 3$  (сек). Момент отказа определяется как:

$$\tau_f(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & t \leq 3 \\ \begin{bmatrix} -0,4u_1(t) \\ -0,3u_2(t) \end{bmatrix} & t > 3 \end{cases}. \quad (39)$$

Для проверки точности отслеживания в условиях динамического опорного движения была выбрана желаемая траектория движения сустава, которая должна быть плавной, ограниченной и нелинейной:

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} 1,5 - e^{-t} \\ 1 + 0,5 \sin(0,5t) \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Физические параметры плоскостного манипулятора с двумя степенями свободы (2-DoF), использованного в моделировании, следующие:  $m_1 = 0,5(\text{kg})$ ;  $m_2 = 1,5(\text{kg})$ ;  $l_1 = 1,0(\text{kg})$ ;  $l_2 = 0,85(\text{m})$ ;  $g = 9,81(\text{m/s}^2)$ . Параметры OFASTSMC:  $\lambda = 10$ ;  $\alpha_1 = 5$ ;  $\alpha_2 = 3$ ;  $\rho = 0,5$ ;  $\gamma_1 = 10$ ;  $\gamma_2 = 3$ ;  $\kappa_1 = 2$ ;  $\kappa_2 = 2$ ;  $\phi = 0,05$ ;  $K_1(0) = 5$ ;  $K_2(0) = 5$ . Параметры AGITSMC:  $\beta = 3$ ;  $k_1 = 10$ ;  $k_2 = 4$ ;  $k_3 = 2$ ;  $\gamma_3 = 5/3$ ;  $\gamma_4 = 3/5$ .

Углы суставов:

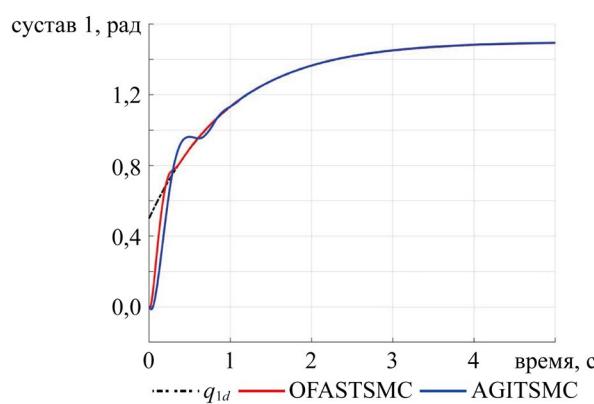


Рис. 2. Угол сустава 1

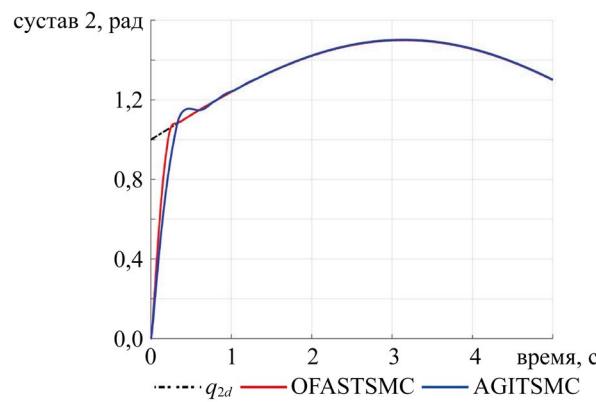


Рис. 3. Угол сустава 2

Погрешности отслеживания суставов:

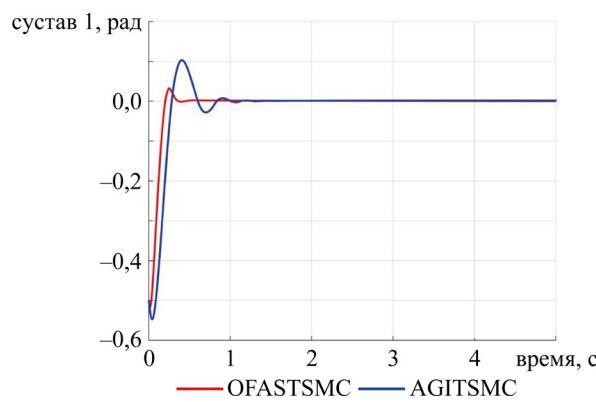


Рис. 4. Погрешность отслеживания сустава 1

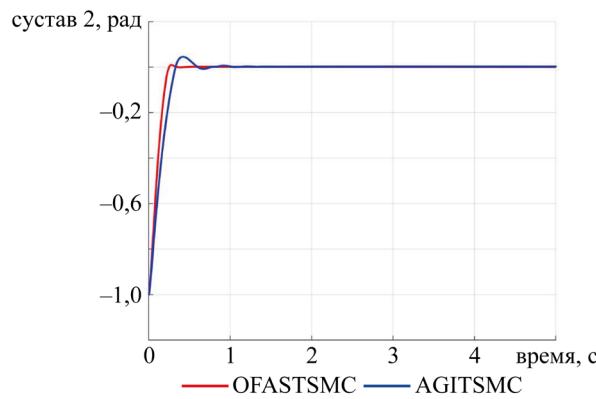


Рис. 5. Погрешность отслеживания сустава 2

Скользящие поверхности суставов:

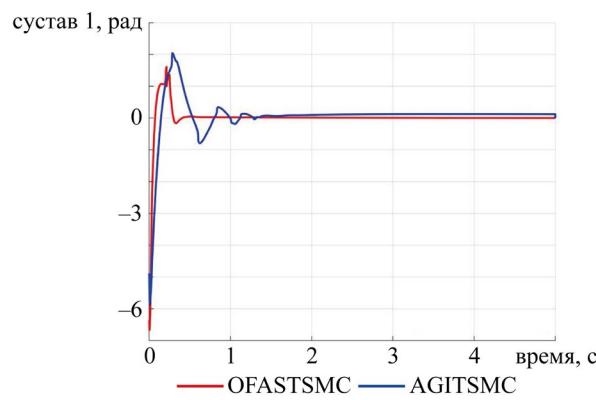


Рис. 6. Скользящая поверхность сустава 1

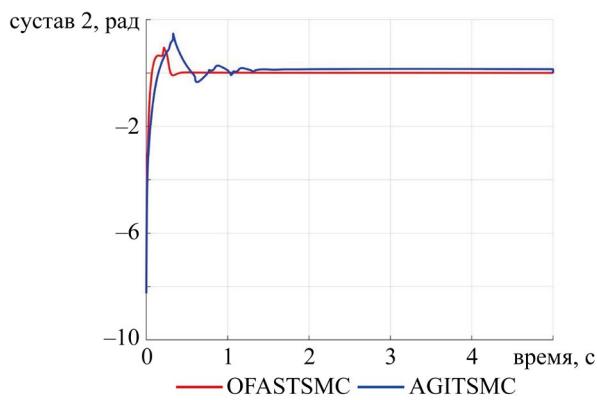


Рис. 7. Скользящая поверхность сустава 2

Законы управления суставами:

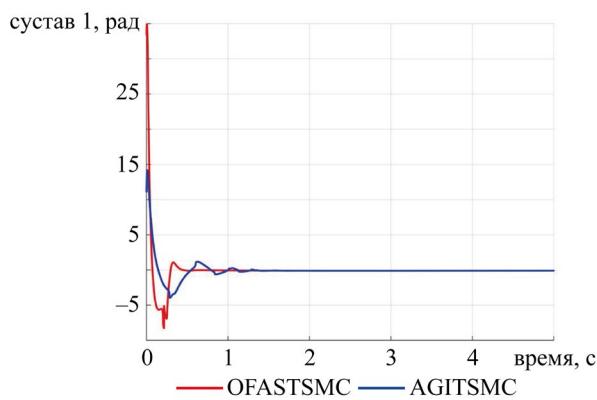


Рис. 8. Закон управления суставом 1

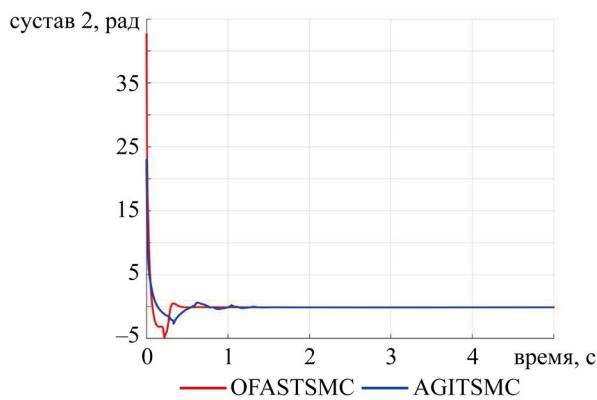


Рис. 9. Закон управления суставом 2

**Обсуждение.** Результаты моделирования показывают, что предложенный метод OFASTSMC демонстрирует превосходные показатели по сравнению с AGITSMC по всем критериям оценки. На рис. 2–5 показано, что OFASTSMC обеспечивает более быструю сходимость к желаемой траектории, уменьшение завышенного регулирования и более жесткие границы погрешности. На рис. 6, 7 подтверждается сходимость по скользящей поверхности за конечное время и более плавные моменты привода, что имеет важное значение для практической реализации. Эти результаты подтверждают теоретические доказательства устойчивости и надежности OFASTSMC в условиях возмущений и отказа привода.

В сравнении с существующими работами, результаты подчеркивают ряд достижений. Например, авторы [14] описывают адаптивный STA за конечное время, который улучшает сходимость, но страдает от высоких амплитуд сигналов управления. Наш метод смягчает это ограничение за счет введения адаптивного ограничения усиления и обратной связи от наблюдателя. Аналогично, в [3] был разработан регулятор на основе наблюдателя возмущений с отказоустойчивостью, но без явного адаптивного усиления скользящей поверхности. OFASTSMC расширяет эту концепцию, объединяя оценку возмущений в реальном времени с

нелинейными адаптивными показателями. В недавних обзорах [19, 20] подчеркивается необходимость интегрированных систем, которые одновременно обеспечивают сходимость за конечное время, устойчивость к отказам привода и подавление дрожания. Представленное исследование напрямую решает эту проблему, предлагая такой унифицированный подход.

**Заключение.** На основании проведенного исследования можно сделать следующие основные выводы:

1. Теоретический вклад. Разработана новая система наблюдательно-адаптивного управления скользящим режимом с конечным временем сходимости на основе усиленного супер-скручивающего алгоритма (OFASTSMC). Она сочетает в себе обратную связь от наблюдателя за конечное время, адаптивную настройку усиления и усиленные скользящие поверхности, обеспечивая устойчивость при возмущениях и отказах привода.

2. Увеличение производительности. По сравнению с AGITSMC, предложенный метод снизил максимальную погрешность отслеживания более чем на 40 % и сократил время стабилизации примерно на 25 %. Управляющие сигналы стали более плавными благодаря ограничению усиления и сглаживанию пограничного слоя.

3. Надежность и отказоустойчивость. Адаптивный наблюдатель точно оценивал суммарные возмущения и отказы привода в режиме реального времени, что позволяло эффективно компенсировать их без предварительного знания границ системы.

4. Научная новизна. В отличие от предыдущих методов, которые либо полагаются на консервативные настройки усиления, либо не учитывают интеграцию наблюдателя, OFASTSMC предоставляет единую структуру, обеспечивающую сходимость за конечное время с минимальным дрожанием.

**Практическое значение.** Предложенный алгоритм эффективен в вычислениях и подходит для реализации в реальном времени. Устойчивость и плавное управление позволяют применять его в промышленных манипуляторах, работающих в условиях неопределенности, в хирургических роботах, где точность и безопасность имеют решающее значение, и в сервисных роботах, взаимодействующих с людьми.

#### Направления будущих исследований:

- Расширение возможностей OFASTSMC для управления сложными многостепенными манипуляторами в зоне выполнения заданий.
- Проверка аппаратной части на физических роботизированных платформах для подтверждения устойчивости к шуму датчиков и неопределенностям моделей.
- Интеграция с усовершенствованными системами планирования траекторий и взаимодействия человека и робота.
- Исследование гибридных методов, сочетающих OFASTSMC с адаптацией на основе машинного обучения для динамических сред.

Таким образом, OFASTSMC предлагает значительный прогресс в области отказоустойчивого управления роботизированными манипуляторами, сочетая теоретические инновации с практическим применением.

#### Список литературы / References

1. Tianli Li, Gang Zhang, Tan Zhang, Jing Pan. Adaptive Neural Network Tracking Control of Robotic Manipulators Based on Disturbance Observer. *Processes*. 2024;12(3):499. <https://doi.org/10.3390/pr12030499>
2. Aohua Liu, Bo Zhang, Weiliang Chen, Yiang Luo, Shuxian Fang, Ouyang Zhang. Reinforcement Learning Based Control for Uncertain Robotic Manipulator Trajectory Tracking. In: *Proc. China Automation Congress (CAC)*. New York City: IEEE; 2022. P. 2740–2745. <https://doi.org/10.1109/CAC57257.2022.10055583>
3. Zeeshan Anjum, Zhe Sun, Bo Chen. Disturbance-Observer-Based Fault-Tolerant Control of Robotic Manipulator: A Fixed-Time Adaptive Approach. *IET Control Theory and Applications*. 2024;18(11):1398–1413. <https://doi.org/10.1049/cth2.12672>
4. Pertuz SA, Podlubne A, Goehringer D. An Efficient Accelerator for Nonlinear Model Predictive Control. In: *Proc. IEEE 34th International Conference on Application-specific Systems, Architectures and Processors (ASAP)*. New York City: IEEE; 2023. P. 180–187. <https://doi.org/10.1109/ASAP57973.2023.00038>
5. Cruz-Ortiz D, Chairez I, Poznyak A. Adaptive Sliding-Mode Trajectory Tracking Control for State Constraint Master–Slave Manipulator Systems. *ISA Transactions*. 2022;127:273–282. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2021.08.023>
6. Yung-Hsiang Chen. Nonlinear Adaptive Fuzzy Hybrid Sliding Mode Control Design for Trajectory Tracking of Autonomous Mobile Robots. *Mathematics*. 2025;13(8):1329. <https://doi.org/10.3390/math13081329>
7. Marinelli M. From Industry 4.0 to Construction 5.0: Exploring the Path towards Human–Robot Collaboration in Construction. *Systems*. 2023;11(3):152. <https://doi.org/10.3390/systems11030152>
8. Jinhua Xiao, Kaile Huang. A Comprehensive Review on Human–Robot Collaboration Remanufacturing towards Uncertain and Dynamic Disassembly. *Manufacturing Review*. 2024;11:17. <https://doi.org/10.1051/mfreview/2024015>
9. Dhanda M, Rogers BA, Hall S, Dekoninck E, Dhokia V. Reviewing Human–Robot Collaboration in Manufacturing: Opportunities and Challenges in the Context of Industry 5.0. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2025;93:102937. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2024.102937>

10. Mohamed MJ, Oleiwi BK, Aboot LH, Azar AT, Hameed IA. Neural Fractional Order PID Controllers Design for 2-Link Rigid Robot Manipulator. *Fractal and Fractional*. 2023;7(9):693. <https://doi.org/10.3390/fractfract7090693>
11. Eltayeb A, Ahmed G, Imran IH, Alyazidi NM, Abubaker A. Comparative Analysis: Fractional PID vs. PID Controllers for Robotic Arm Using Genetic Algorithm Optimization. *Automation*. 2024;5(3):230–245. <https://doi.org/10.3390/automation5030014>
12. Gold T, Völz A, Graichen K. Model Predictive Interaction Control for Robotic Manipulation Tasks. *IEEE Transactions on Robotics*. 2023;39(1):76–89. <https://doi.org/10.1109/TRO.2022.3196607>
13. Jinxin Zhang, Hongze Wang. Online Model Predictive Control of Robot Manipulator with Structured Deep Koopman Model. *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2023;8(5):3102–3109. <https://doi.org/10.1109/LRA.2023.3264816>
14. Zu-Ren Feng, Rui-Zhi Sha, Zhi-Gang Ren. A Chattering-Reduction Sliding Mode Control Algorithm for Affine Systems with Input Matrix Uncertainty. *IEEE Access*. 2022;10:58982–58996. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3179580>
15. Zeinali M. Adaptive Chattering-Free Sliding Mode Control Design Using Fuzzy Model of the System and estimated uncertainties and its application to robot manipulators. In: *Proc. International Workshop on Recent Advances in Sliding Modes (RASM)*. New York City: IEEE; 2015. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/RASM.2015.7154652>
16. Boiko I. Chattering in Mechanical Systems under Sliding-Mode Control. In book: Oliveira TR, Fridman L, Hsu L (eds). *Sliding-Mode Control and Variable-Structure Systems. Studies in Systems, Decision and Control*. Cham: Springer; 2023. P. 337–356. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-37089-2\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-031-37089-2_13)
17. Minghao Liu, Qirong Tang, Yinghao Li, Changhui Liu, Min Yu. A Chattering-Suppression Sliding Mode Controller for an Underwater Manipulator Using Time Delay Estimation. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023;11(9):1742. <https://doi.org/10.3390/jmse11091742>
18. Rehman FU, Mufti MR, Din SU, Afzal H, Qureshi MI, Khan M. Adaptive Smooth Super-Twisting Sliding Mode Control of Nonlinear Systems with Unmatched Uncertainty. *IEEE Access*. 2020;8:177932–177940. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3027194>
19. Mondal S, Mahanta Ch. Adaptive Integral Higher Order Sliding Mode Controller for Uncertain Systems. *Journal of Control Theory and Applications*. 2013;11:61–68. <https://doi.org/10.1007/s11768-013-1180-5>
20. Mirzaei MJ, Hamida MA, Plestan F, Taleb M. Super-Twisting Sliding Mode Controller with Self-Tuning Adaptive Gains. *European Journal of Control*. 2022;68:100690. <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2022.100690>
21. Shtessel YuB, Moreno JA, Plestan F, Fridman LM, Poznyak AS. Super-Twisting Adaptive Sliding Mode Control: A Lyapunov Design. In: *Proc. 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. New York City: IEEE; 2010. P. 5109–5113. <https://doi.org/10.1109/CDC.2010.5717908>
22. Jiabin Hu, Xue Zhang, Dan Zhang, Yun Chen, Hongjie Ni, Huageng Liang. Finite-Time Adaptive Super-Twisting Sliding Mode Control for Autonomous Rrobotic Manipulators with Actuator Faults. *ISA Transactions*. 2024;144:342–351. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2023.10.028>
23. Xinyue Hu, Ban Wang, Yanyan Shen, Yifang Fu, Ni Li. Disturbance Observer-Enhanced Adaptive Fault-Tolerant Control of a Quadrotor UAV against Actuator Faults and Disturbances. *Drones*. 2023;7(8)541. <https://doi.org/10.3390/drones7080541>
24. Jiqing Chen, Qingsong Tang, Chaoyang Zhao, Haiyan Zhang. Adaptive Sliding Mode Control for Robotic Manipulators with Backlash. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2023;237(24):5842–5852. <https://doi.org/10.1177/09544062231167555>
25. Jiqian Xu, Lijin Fang, Huaizhen Wang, Qiankun Zhao, Yingcai Wan, Yue Gao. Observer-Based Finite-Time Prescribed Performance Sliding Mode Control of Dual-Motor Joints-Driven Robotic Manipulators with Uncertainties and Disturbances. *Actuators*. 2024;13(9):325. <https://doi.org/10.3390/act13090325>
26. Shanchao Yi, Junyong Zhai. Adaptive Second-Order Fast Nonsingular Terminal Sliding Mode Control for Robotic Manipulators. *ISA Transactions*. 2019;90:41–51. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2018.12.046>
27. Tinoco V, Silva MF, Santos FN, Morais R, Magalhães SA, Moura P. A Review of Advanced Controller Methodologies for Robotic Manipulators. *International Journal of Dynamics and Control*. 2025;13:36. <https://doi.org/10.1007/s40435-024-01533-1>
28. Romero S, Valero J, Garcia AV, Rodriguez CF, Montes AM, Marin C, et al. Trajectory Planning for Robotic Manipulators in Automated Palletizing: A Comprehensive Review. *Robotics*. 2025;14(5):55. <https://doi.org/10.3390/robotics14050055>
29. Kharrat M, Alhazmi H. Fixed-Time Adaptive Control for Nonstrict-Feedback Nonlinear Systems with Input Delay and Unknown Backlash-Like Hysteresis. *Neural Processing Letters*. 2025;57:52. <https://doi.org/10.1007/s11063-025-11749-7>
30. Huanqing Wang, Zhu Meng. Fixed-Time Adaptive Neural Tracking Control for High-Order Nonlinear Switched Systems with Input Saturation and Dead-Zone. *Applied Mathematics and Computation*. 2024;480:128904. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.128904>
31. Bhat SP, Bernstein DS. Finite-Time Stability of Continuous Autonomous Systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*. 2000;38(3):751–766. <https://doi.org/10.1137/S0363012997321358>

32. Amato F, Ambrosino M, Ariola M, Consentino C, De Tommasi G. *Finite-Time Stability and Control*. New York, NY: Springer; 2013. 146 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-5664-2>
33. Honglei Xu. Finite-Time Stability Analysis: A Tutorial Survey. *Complexity*. 2020;9:1–12. <https://doi.org/10.1155/2020/1941636>
34. Khalid K, Zaidi AA, Ayaz Y. Optimal Placement and Kinematic Design of 2-DoF Robotic Arm. In: *Proc. International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technologies (IBCAST)*. New York City: IEEE; 2021. P. 552–559. <https://doi.org/10.1109/IBCAST51254.2021.9393255>
35. Hameed WN, Khawwaf JO. Robust Sliding Mode Control for 2-Dof Robot Manipulator Position Control System. In: *Proc. 2nd International Conference on Emerging Trends and Applications in Artificial Intelligence*. 2024;2024(34):282–288. <https://doi.org/10.1049/icp.2025.0096>
36. Bouzid R, Gritli H, Narayan J. Optimized Inverse Kinematics of a 2-DoF Robotic Manipulator Using a Hybrid Approach Combining an ANN with a Metaheuristic Algorithm. In: *Proc. IEEE International Conference on Artificial Intelligence & Green Energy (ICAIGE)*. New York City: IEEE; 2024. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICAIGE62696.2024.10776675>

**Об авторе:**

**Хоанг Дык Лонг**, PhD, преподаватель кафедры «Автоматизация и вычислительная техника» Технического университета имени Ле Куи Дона (10065, Вьетнам, Ханой, ул. Хоанг Куок Вьет, 236), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [longhd@lqdtu.edu.vn](mailto:longhd@lqdtu.edu.vn)

**Конфликт интересов:** автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.**

**About the Author:**

**Hoang Duc Long**, PhD, Lecturer of the Department of Automation and Computing Techniques, Le Quy Don Technical University (236, Hoang Quoc Viet, Hanoi, 10065, Vietnam), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [longhd@lqdtu.edu.vn](mailto:longhd@lqdtu.edu.vn)

**Conflict of Interest Statement:** the author declares no conflict of interest.

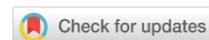
**The author has read and approved the final manuscript.**

**Поступила в редакцию / Received** 01.09.2025

**Поступила после рецензирования / Reviewed** 26.09.2025

**Принята к публикации / Accepted** 10.10.2025

ИНФОРМАТИКА,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ  
INFORMATION TECHNOLOGY,  
COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT



УДК 656.11

Оригинальное эмпирическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2215>

**Сравнительный анализ нейросетевой и машинной моделей для краткосрочного прогнозирования транспортного потока на скоростной автомагистрали Мэйгуан Шэньчжэня**



EDN: DWKVUM

И.В. Топилин , М. Хань , А.А. Феофилова , Н.А. Бескопыльный

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

[ivan\\_top@mail.ru](mailto:ivan_top@mail.ru)

**Аннотация**

**Введение.** При растущей загруженности автомагистралей эффективность интеллектуальных транспортных систем зависит от качественного краткосрочного прогнозирования потоков. Статистические методы недостаточно точно учитывают нелинейные и динамические изменения трафика. Более перспективны модель долгой краткосрочной памяти (LSTM) и метод опорных векторов (SVR). Однако они не ранжированы в плане корректности, так как нет работ по комплексному сопоставлению их адекватности для краткосрочного прогнозирования потоков. Представленное исследование восполняет этот пробел. Цель работы — сравнительный анализ точности LSTM и SVR и выбор оптимального подхода для прогнозирования транспортного потока на автомагистрали Мэйгуан Шэньчжэня.

**Материалы и методы.** Данные детекторов транспорта собраны в июне 2021 года на автомагистрали Мэйгуан. Использовались методы предварительной обработки данных, включая заполнение взвешенным средним и нормализацию. Для извлечения признаков применили автокорреляционный анализ, а также создание переменной взаимодействия скорости и занятости детектора. Модели обучались и тестировались на данных, полученных с детекторов с 5-минутными интервалами.

**Результаты исследования.** Показатели LSTM лучше на 17,86 % по среднеквадратической, на 19,82 % — по средней абсолютной и на 25,78 % — по средней абсолютной процентной ошибке. В периодах с наименьшей ошибкой прогнозирования интенсивности потока RMSE, MAE и MAPE для модели LSTM оказались меньше на 36,5 %, 34,3 % и 42,3 % соответственно. В периодах с наибольшей ошибкой RMSE, MAE и MAPE для LSTM оказались меньше на 73,2 %, 65,4 % и 64,4 % соответственно. Критерий Уилкоксона  $<0,05$  подтвердил статистическую значимость различий.

**Обсуждение.** Лучшие прогнозные возможности LSTM обусловлены ее архитектурой, а именно комбинированием переменных взаимодействия и лаговых показателей. LSTM лучше учитывает временные зависимости потока, адаптируется к его сложным, долгосрочным динамическим изменениям и остается точной даже при значительных колебаниях. Меньшая прогнозная эффективность SVR обусловлена слабой, нелинейной аппроксимирующей способностью. При резких изменениях потока существенно увеличиваются показатели ошибок.

**Заключение.** При краткосрочном прогнозировании транспортного потока на скоростной автомагистрали, выбирая между нейросетевой и машинной моделью, следует предпочесть нейросетевую — например, LSTM. Результаты исследования целесообразно использовать в предиктивных стратегиях снижения заторов. Краткосрочное прогнозирование на основе LSTM может быть базой для оптимизации управления дорожным движением, снижения заторов и загрязняющих выбросов, а также для оптимизации интеллектуальных транспортных систем. Перспективное направление — разработка гибридных архитектур, интегрирующих контекстные данные (погода, инфраструктура, аварии) для улучшения прогнозов в режиме реального времени.

**Ключевые слова:** краткосрочное прогнозирование транспортных потоков, ошибка прогнозирования интенсивности потока, модель долгой краткосрочной памяти (LSTM), метод опорных векторов для регрессии (SVR)

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность редакции и рецензентам за внимательное отношение к статье и замечания, которые позволили повысить ее качество.

**Для цитирования.** Топилин И.В., Хань М., Феофилова А.А., Бескопыльный Н.А. Сравнительный анализ нейросетевой и машинной моделей для краткосрочного прогнозирования транспортного потока на скоростной автомагистрали Мэйгуан Шэнъчжэня. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):350–362. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2215>

Original Empirical Research

## Comparative Analysis of Neural Network and Machine Learning Models for Short-Term Traffic Flow Prediction on Shenzhen Expressway

Ivan V. Topilin ✉, Mengyi Han , Anastasia A. Feofilova , Nikita A. Beskopylny 

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ [ivan\\_top@mail.ru](mailto:ivan_top@mail.ru)

### Abstract

**Introduction.** With highway congestion increasing, the efficiency of intelligent transportation systems depends on high-quality short-term traffic prediction. Statistical methods do not adequately account for nonlinear and dynamic traffic changes. Long short-term memory (LSTM) and support vector machines (SVR) offer more promising solutions. However, they are not ranked in terms of accuracy, as there are no studies comprehensively comparing their adequacy for short-term traffic flow prediction. The proposed study fills this gap. The research objective is to compare the accuracy of LSTM and SVR, and select the optimal approach for traffic flow prediction on Shenzhen Meiguang Expressway.

**Materials and Methods.** Traffic detector data was collected on the Meiguan Expressway in June 2021. Data preprocessing methods were used, including weighted mean imputation and normalization. Autocorrelation analysis was used for feature extraction, along with the creation of an interaction variable between speed and detector occupancy. Models were trained and tested on data collected from detectors at 5-minute intervals.

**Results.** LSTM performed 17.86% better in terms of root mean square error, 19.82% better in terms of mean absolute error, and 25.78% better in terms of mean absolute percentage error. In periods with the lowest flow rate prediction error, RMSE, MAE, and MAPE for the LSTM model were 36.5%, 34.3%, and 42.3% lower, respectively. In periods with the highest error, RMSE, MAE, and MAPE for the LSTM model were 73.2%, 65.4%, and 64.4% lower, respectively. The Wilcoxon signed-rank test  $<0.05$  confirmed the statistical significance of the differences.

**Discussion.** The superior predictive performance of LSTM stems from its architecture, namely, the combination of interaction variables and lag metrics. LSTM accounts better for flow time dependences, adapts to complex, long-term dynamic changes, and remains accurate even with significant fluctuations. The lower predictive performance of SVR stems from its weak, nonlinear approximation ability. Sudden flow changes increase significantly error rates.

**Conclusion.** When choosing between a neural network and a machine learning model for short-term traffic flow prediction on an expressway, the neural network model, such as LSTM, should be preferred. These research results can be useful in predictive strategies for reducing congestion. Short-term prediction based on LSTM can serve as a basis for optimizing traffic management, reducing congestion and pollutant emissions, and for optimizing intelligent transportation systems. A promising direction is the development of hybrid architectures that integrate contextual data (weather, infrastructure, accidents) to improve real-time predictions.

**Keywords:** short-term traffic flow prediction, traffic flow prediction error, long short-term memory (LSTM) model, support vector machine for regression (SVR)

**Acknowledgements.** The authors would like to thank the Editorial board and the reviewers for their attentive attitude to the article and the specified comments that helped the authors to improve its quality.

**For Citation.** Topilin IV, Han M, Feofilova AA, Beskopylny NA. Comparative Analysis of Neural Network and Machine Learning Models for Short-Term Traffic Flow Prediction on Shenzhen Expressway. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):350–362. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2215>

**Введение.** Решение актуальной общемировой проблемы эффективного управления транспортными потоками базируется на точном анализе и прогнозировании трафика. Развитие урбанизации и глобализации трансформирует и перегружает дорожно-транспортные системы, для регулирования которых требуются качественно новые и универсальные подходы. Очевидно, что таковыми могут быть нейросетевые решения и адекватные машинные модели. Их тестирование и обучение должно базироваться на данных, полученных в условиях скоростных магистралей мегаполисов. В этом случае результаты можно экстраполировать на аналогичные системы, т.е. крупные трассы с оживленным движением.

В рамках представленной научной работы использовалась информация, полученная в условиях Шэньчжэня. Это крупный город на юго-востоке Китая. Численность населения превышает 17,5 млн человек, автомобилизация ежегодно растет на 8 %. Как следствие, в мегаполисе обостряется проблема дорожных заторов на автотрассах, общая протяженность которых достигла 386 км<sup>1</sup>. Стремительное развитие дорожной сети, с одной стороны, способствовало значительному экономическому росту самого молодого китайского мегаполиса, с другой — перегрузило транспортную сеть, привело к сбоям в ее работе [1]. Таким образом, проблема Шэньчжэня — это не локальная аномалия, а типичный пример «болезни успеха», с которой сталкиваются мегаполисы по всему миру. Сложившаяся ситуация прямо противоречит перечисленным ниже ключевым целям устойчивого развития (ЦУР) ООН<sup>2</sup>.

ЦУР 3 «Хорошее здоровье и благополучие». Заторы — это не только потеря времени. Это источник хронического стресса, повышенного шума и, что самое важное, загрязнения воздуха (твердые частицы PM2.5, NOx). По данным ВОЗ, загрязнение воздуха — один из главных факторов риска для здоровья.

Здесь важно отметить, что электрификация транспорта, которую активно продвигает Шэньчжэнь, — это лишь часть решения. Необходима еще и декарбонизация за счет сокращения числа личных автомобилей.

ЦУР 9 «Индустриализация, инновации и инфраструктура». Хронические заторы снижают экономическую конкурентоспособность города. Потери от заторов увеличивают логистические издержки, снижают производительность труда и делают территории менее привлекательными для инвестиций.

ЦУР 11 «Устойчивые города и населенные пункты». Заторы делают города неустойчивыми. Они снижают эффективность городских систем, увеличивают временные и экономические издержки на перемещение, ухудшают доступ к основным услугам (здравоохранение, образование) и снижают качество жизни.

ЦУР 13 «Борьба с изменением климата». Транспортный сектор — один из основных источников парниковых газов. Заторы значительно увеличивают выбросы CO<sub>2</sub> на пассажиро-километр или тонно-километр для пассажирского и грузового транспорта соответственно.

Глобальный масштаб проблемы стимулирует научные изыскания в данной сфере. Одна из базовых задач эффективного управления транспортными потоками — их качественное оперативное (краткосрочное) прогнозирование. В настоящее время эта задача не решена, что доказывает представленный ниже анализ литературных источников. Изложенные в них данные в большинстве случаев или фрагментарны, или не учитывают специфику высокоскоростных магистралей.

Краткосрочное прогнозирование транспортных потоков (STTFP) как ключевая задача интеллектуальных транспортных систем (ИТС) позволяет проактивно управлять заторами через динамическое ценообразование, оптимизацию маршрутов и оперативное реагирование на дорожные происшествия [2]. Однако нелинейный, сезонный и стохастический характер дорожного движения ограничивает эффективность традиционных статистических методов прогнозирования [3]. В качестве примеров можно привести интегрированную модель авторегрессии — скользящего среднего ARIMA [4] и *k* ближайших соседей (*k*NN), которые далеко не всегда адекватно отражают сложные пространственно-временные зависимости [5].

Последние достижения в области глубокого машинного обучения произвели революцию в краткосрочном прогнозировании транспортных потоков. Модели долгой краткосрочной памяти (LSTM) с архитектурой ячеек памяти превосходно воспроизводят последовательные данные и идеально подходят для прогнозирования дорожного движения [6]. Есть свои преимущества и у метода опорных векторов для регрессии (SVR) [7]. Он основан на ядрах, надежен и вычислительно эффективен в многомерных пространствах [8]. Развитие машинного обучения также способствовало активному использованию SVR, применяющего приемы ядра для работы с нелинейными зависимостями [9]. Модели глубокого обучения, особенно LSTM, доминируют в последних исследованиях STTFP [10].

Сравнительный анализ LSTM и SVR показал хорошую применимость этих методов при различных неравномерностях интенсивности дорожного движения. Кроме того, доказана высокая точность прогнозирования скорости транспортного потока [11].

<sup>1</sup> China Statistical Yearbook 2023. URL: <https://www.stats.gov.cn/sj/ndsj/2023/indexeh.htm> (дата обращения: 06.10.2025).

<sup>2</sup> Цели в области устойчивого развития. Организация объединенных наций. URL: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/ru/sustainable-development-goals/> (дата обращения: 21.10.2025).

Несмотря на широкое применение этих методов, все еще мало сравнительных исследований для автомагистралей с интенсивными, высокоскоростными потоками. Есть некоторая информация о точечных объектах — городских перекрестках или локальных участках автомагистралей. При этом недостаточно исследований с комплексным анализом сети магистралей.

Представленная работа призвана восполнить этот пробел. Для сопоставления LSTM и SVR в качестве примера взяли автомагистраль Мэйгуан в китайском мегаполисе Шэнъчжэнь. Цель работы — сравнительный анализ точности моделей LSTM и SVR и выбор оптимального подхода для прогнозирования транспортного потока на скоростной автомагистрали Мэйгуан Шэнъчжэня. Для достижения цели авторы сформировали комплексный подход к предварительной обработке данных и извлечению признаков. Исследовался потенциал практического применения моделей в системах ИТС.

**Материалы и методы.** Автомагистраль Мэйгуань (рис. 1), расположенная в г. Шэнъчжэнь (провинция Гуандун, Китай), представляет собой участок протяженностью 19,3 км в составе скоростной автомагистрали G94 (кольцевая дорога дельты Жемчужной реки). Расчетная скорость движения — 100 км/ч.

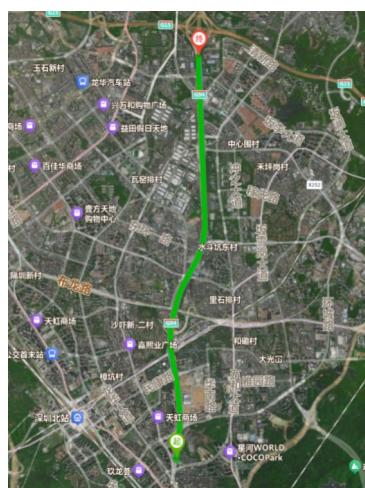


Рис. 1. Опытный отрезок скоростной автомагистрали Мэйгуань (скриншот карты из открытых источников)

Объект исследования — направление автомагистрали Мэйгуань с юга на север. Данные собирались с помощью шести индукционных петлевых детекторов (ILD), установленных на внутренних и внешних полосах движения.

С 5-минутным интервалом регистрировались следующие параметры:

- интенсивность дорожного движения (ед./5 минут);
- занятость детектора (%);
- средняя скорость (км/ч);
- дата и временной интервал (5 минут);
- период наблюдения: 7 дней (с 15 по 21 июня 2021 года).

Общий объем данных: 1144 записи.

Для повышения качества анализа и моделирования провели предварительную обработку данных [12]. Ниже перечислены ее этапы.

1. Скрининг данных. Выборка из набора для идентификации данных — валидных и соответствующих модели. Первоначально исходный набор данных разделяется по датам для отбора записей с наиболее полными данными, без явных пропусков. Удаляются невалидные, с явными пропусками. Из отобранных дат с полными данными выбираются последовательные даты для исследования временных вариаций потока.

2. Восполнение недостающих данных. Для обеспечения корректного сбора данных оборудование должно работать бесперебойно. Этому препятствуют такие случайные факторы, как неисправности, сбой в работе детектора транспорта, погодные условия, перебои с электроснабжением и др. Поэтому собранные данные иногда неполны и содержат пропуски. Однако в них может быть важная информация о закономерностях процесса. В итоге модель прогнозирования не получает достаточно данных, становится нестабильной, что снижает надежность прогнозирования. Таким образом, перед построением модели прогнозирования необходимо восполнить недостающие данные.

Для восполнения периодически возникающих временных пропусков в данных о транспортном потоке в представленной работе применяется метод взвешенного среднего [13].

Шаг 1. Получение среднего значения интенсивности дорожного движения за  $n$  моментов времени, предшествующих текущему моменту:

$$f_1(t) = \frac{f^k(t-1) + f^k(t-2) + \dots + f^k(t-n)}{n}.$$

Шаг 2. Среднее значение интенсивности дорожного движения на текущий момент, за предыдущие  $m$  дней:

$$f_2(t) = \frac{f^{(k-m)}(t) + f^{(k-(m-1))}(t) + \dots + f^{(k-1)}(t)}{m}.$$

Шаг 3. Восполнение недостающих данных:

$$f^{(k)}(t) = af_1(t) + (1-a)f_2(t),$$

где  $f^{(k)}(t)$  — восстановление данных о транспортном потоке на момент  $t$  дня  $k$ ,  $a$  — весовой коэффициент,  $a = 0,6$ .

Метод является основным при работе с пропущенными данными. Он учитывает такие свойства данных об интенсивности дорожного движения, как:

— циклическая природа —  $f_1(t)$ ;

— временная природа —  $f_2(t)$ , т.е. влияние данных об интенсивности дорожного движения из предыдущих временных моментов.

3. Нормализация. Данные о транспортном потоке могут значительно варьироваться в зависимости от времени суток, участка дороги и других факторов, что приводит к большому разбросу значений. Функция активации некоторых нейронных узлов принимает значения в диапазоне  $[0, 1]$ . Поэтому перед обучением проводится нормализация [14]. Она позволяет устраниить влияние выбросов в данных (образцов, значительно отклоняющихся от других), а также ускоряет обучение сети, улучшает сходимость.

Основные методы нормализации: линейная, нелинейная и нормализация к 0-среднему. Функция активации принимает значения от 0 до 1, поэтому в представленной статье используется метод максимума-минимума линейной нормализации для преобразования значений транспортного потока в диапазон  $[0, 1]$ :

$$f(t) = \frac{f - f_{min}}{f_{max} - f_{min}},$$

где  $f$  — необработанные данные о транспортных потоках;  $f_{min}$  — минимальное значение в данных о транспортном потоке;  $f_{max}$  — максимальное значение в данных о транспортном потоке;  $f(t)$  — нормализованное значение транспортного потока.

Обработанные данные редуцируются с использованием формулы обратной нормализации после вывода диагностической модели:

$$f = (f_{max} - f_{min})f(t) + f_{min}.$$

Частота выборки данных — 5 минут, итоговый объем предобработанных данных — 3168 записей. Некоторые из них, полученные 17 июня 2021 года, представлены в таблице 1.

Таблица 1  
Примеры предобработанных экспериментальных данных

Интенсивность дорожного движения, ед./5 мин	Занятость детектора, %	Скорость транспортного потока, км/ч	Временной интервал, 5 мин
258	13,93	83,62	1
255	14,48	79,88	2
223	12,08	82,25	3
340	18,39	82,04	4
254	13,86	83,3	5
263	13,98	84,87	6
231	12,49	85,89	7
151	7,87	84,94	8
223	11,96	83,81	9
226	11,95	86,92	10
166	8,59	86,17	11
140	7,45	83,29	12

Интенсивность дорожного движения, ед./5 мин	Занятость детектора, %	Скорость транспортного потока, км/ч	Временной интервал, 5 мин
143	7,85	83,99	13
231	12,67	84,71	14
147	7,55	89,53	15
96	4,90	90,74	16
128	7,02	83,94	17
106	5,75	81,99	18
128	7,24	79,4	19
136	6,99	84,57	20

Извлечение признаков — ключевой этап построения эффективной модели прогнозирования транспортных потоков. Анализ и обработка данных о дорожном движении дают ключевую информацию о признаках, что позволяет повысить производительность и точность модели.

#### 1. Извлечение признаков с временным лагом.

Данные одних временных рядов зависят от других временных рядов, и функция автокорреляции (ACF) описывает корреляцию временного ряда с различными лагами (Lag), то есть степень линейной корреляции между самим рядом и его собственными лагированными значениями [15]. Так определяется взаимосвязь между текущими и прошлыми значениями. При анализе временных рядов представляет интерес взаимосвязь между текущим значением  $Y_{t-k}$  и его значением  $Y_t$  в некоторый прошлый момент времени. Период лага  $k$  (Lag  $k$ ) — это временной интервал между текущей точкой времени  $t$  и  $k$ -й точкой времени в прошлом  $t-k$ .

При прогнозировании транспортных потоков ACF использовалась для определения периодичности и тренда во временных рядах данных. Это позволило выбрать подходящий шаг лага в качестве признака и отразить динамику изменения параметров транспортных потоков (рис. 2).

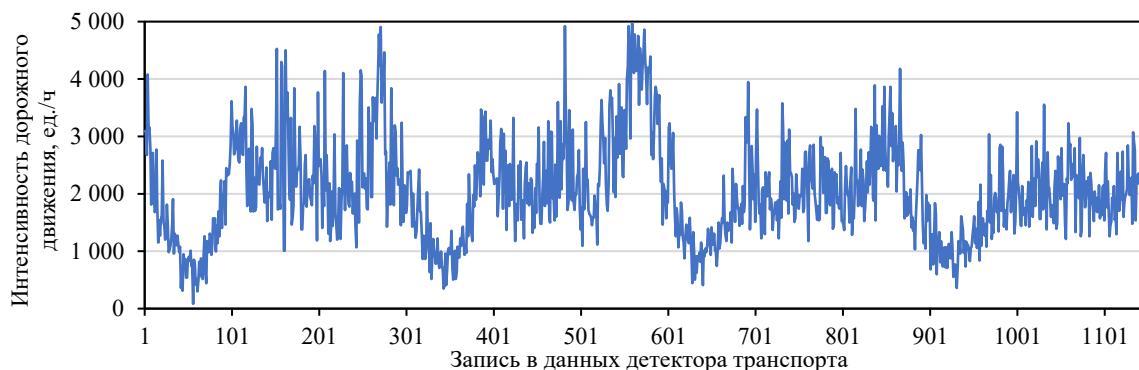


Рис. 2. Динамика интенсивности дорожного движения на автомагистрали Мэйгуань

Для временного ряда данных о транспортном потоке рассчитали ACF и проанализировали корреляцию между различными временными лагами (например,  $t-1, t-2, \dots, t-n$ ) и текущим моментом  $t$ . Результаты вычислений представлены на рис. 3.

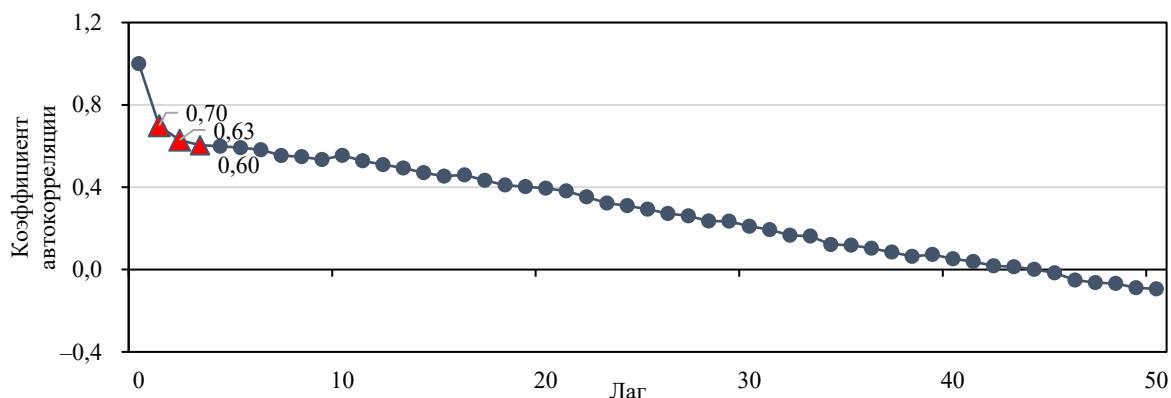


Рис. 3. Коэффициенты автокорреляции для различных шагов лага

Методом пороговой фильтрации ACF отобрали три временных лага с коэффициентом автокорреляции  $>0,6$ : (Lag 1: 0,70, Lag 2: 0,63, Lag 3: 0,60). Эти лаги выбрали в качестве входных признаков модели. Такой подход усиливает способность модели улавливать временные закономерности и обеспечивает надежную основу данных для последующих прогнозных моделей.

## 2. Взаимодействие скорости и занятости детектора.

Произведение скорости и занятости детектора используется как комплексный показатель для представления закономерности пространственно-временного изменения транспортного потока [16]. Занятость детектора и скорость — важные метрики транспортного потока. Их произведение можно использовать как термин «взаимодействие признаков». То есть формируется новый признак, который лучше отражает сложность и динамику транспортного потока. Добавление терминов взаимодействия может улучшить выразительные и аппроксимирующие возможности моделей машинного обучения, особенно таких, как LSTM и SVR. Термины взаимодействия дают больше информации, помогают модели лучше понимать закономерности и взаимосвязи в данных.

### Архитектура модели и оценочные показатели

1. Метод опорных векторов для регрессии (SVR) основан на расширении алгоритма метода опорных векторов (SVM) [17]. Модель SVR подходит для решения сложных задач нелинейной регрессии. Она хорошо адаптирует нелинейные характеристики данных о транспортных потоках, обладает высокой устойчивостью к выбросам и может адаптироваться к различным характеристикам данных, благодаря настройке функции ядра и параметров регуляризации. Поэтому в данной статье модель SVR используется в качестве сравнительной модели для прогнозирования транспортных потоков.

2. Модель нейронной сети долгой краткосрочной памяти (LSTM) — это вариант рекуррентной нейронной сети, которая специально разработана для решения задач с долгосрочными временными зависимостями [18]. Ориентированная рекуррентная нейронная сеть LSTM способна глубже выявлять временные зависимости в задачах прогнозирования и эффективно аппроксимировать нелинейные данные. Она также может длительное время сохранять информацию из временных рядов [19]. Так обеспечивается высокая эффективность модели при работе с данными, имеющими большие временные интервалы и высокую задержку. Известны преимущества LSTM в прогнозировании временных рядов и ее высокая точность в долгосрочных прогнозах [20]. Одновременно модель обладает хорошей робастностью и гибкостью, что позволяет применять ее для прогнозирования транспортных потоков в условиях координации «транспортное средство — дорога». Важно отметить, что в структуре LSTM комбинировались переменные взаимодействия и лаговые показатели для повышения точности прогнозирования.

В данной статье оценивается эффективность прогнозирования модели с использованием следующих представительных метрик производительности:

- средняя абсолютная ошибка;
- средняя абсолютная процентная ошибка;
- среднеквадратическая ошибка [21].

Такой подход позволяет:

- количественно оценить точность моделей LSTM и SVR;
- визуализировать расхождение между фактическим транспортным потоком и результатами его прогнозирования, полученными с помощью LSTM.

Для проверки статистически значимой разницы между ошибками прогнозирования моделей LSTM и SVR в данной работе используется знаковый ранговый тест Уилкоксона [22]. Это непараметрический тест в статистике для парных данных. Он особенно полезен для небольших выборок и когда данные не подчиняются нормальному распределению. Исходная гипотеза ( $H_0$ ) теста заключается в том, что нет значимой разницы между ошибками прогнозирования моделей LSTM и SVR.  $P$ -значение — это значение вероятности, используемое для выявления значимой разницы между двумя связанными выборками. Если  $P$  меньше заданного уровня значимости (обычно 0,05), нулевая гипотеза отвергается. В этом случае предполагается, что распределение разницы между двумя выборками различно, то есть сумма рангов значимо различается. В рамках данной работы это докажет значимую разницу в эффективности прогнозирования LSTM и SVR. Ниже описаны шаги расчета.

Шаг 1: Вычисление разности ошибок прогнозирования между двумя моделями. Разность ошибок прогнозирования для каждого наблюдения вычисляется по формуле:

$$d_i = e_i^{(LSTM)} - e_i^{(SVR)}.$$

Шаг 2: Вычисление абсолютных значений разностей и их ранжирование.

Шаг 3: Вычисление сумм положительных и отрицательных рангов.

Шаг 4: Вычисление вероятности  $P$  по Уилкоксону и сравнение этого значения с критическим.

**Результаты.** В рамках представленного исследования для предобработки данных о транспортном потоке используется язык Python. Экспериментальная выборка — это данные о транспортном потоке с 17 по 20 июня 2021 года (таблица 2). Данные регистрировались с 5-минутными интервалами и содержат 1 144 записи. Для прогнозирования транспортного потока и оценки моделей данные разделены на обучающую и тестовую выборки.

Таблица 2  
Статистическая информация о наборах данных

Индикатор	Интенсивность дорожного движения (ед./ч)
Минимальное значение	84
Максимальное значение	4968
Среднее значение	2052
Медиана	1944
Стандартное отклонение	864

Минимальное значение интенсивности дорожного движения — 84, а максимальное — 4968, что указывает на значительный разброс данных. Это свидетельствует о крайне низкой интенсивности движения в отдельные периоды суток (например, ранним утром) и чрезвычайно высокой — в часы пик. Среднее значение равно 2052, а медиана — 1944. Тот факт, что медиана немного меньше среднего значения, указывает на правостороннюю асимметрию распределения данных. Значит, в большинстве временных промежутков интенсивность движения высока, тогда как некоторые периоды с низкой интенсивностью (в основном ранним утром и поздней ночью) снижают общее среднее значение. Стандартное отклонение, равное 864, подтверждает значительные колебания потока и резкие изменения интенсивности движения. Таким образом, набор данных пригоден для исследования долгосрочных зависимостей и нелинейных характеристик временных рядов и может служить экспериментальной выборкой для прогнозирования транспортных потоков.

Как отмечалось выше, для повышения эффективности прогнозирования в данном исследовании в качестве входных признаков взяли лаговую характеристику и переменную взаимодействия скорости и занятости детектора. Это позволяет полностью учесть взаимосвязи между информацией временного ряда и характеристиками потока.

Метод SVR использует радиальную базисную функцию (RBF-ядро) в качестве ядра для регистрации нелинейных взаимосвязей.

Ключевые параметры:

- 1) штрафной коэффициент  $C = 2$  (контроль допустимой ошибки);
- 2) максимальное количество итераций — 120.

Ниже описаны параметры LSTM, использованные в данном исследовании.

- 1) Входной слой: временной шаг — это шаг задержки извлечения признаков, который равен 1, 2, 3.
- 2) Скрытый слой: однослойная структура LSTM, содержащая 150 ячеек, использующая функцию активации  $\tanh$ .
- 3) Регуляризация: используется механизм исключения 10 % для предотвращения переобучения.
- 4) Выходной слой: полно связанный слой, использующий линейную функцию активации для обеспечения непрерывности прогнозируемых значений.

5) Стратегия обучения: оптимизатор Adam, скорость обучения — 0,08, размер пакета — 128, количество раундов обучения (эпох) — 120.

На рис. 4 и 5 показаны результаты сравнения прогнозируемых и истинных значений для моделей LSTM и SVR.

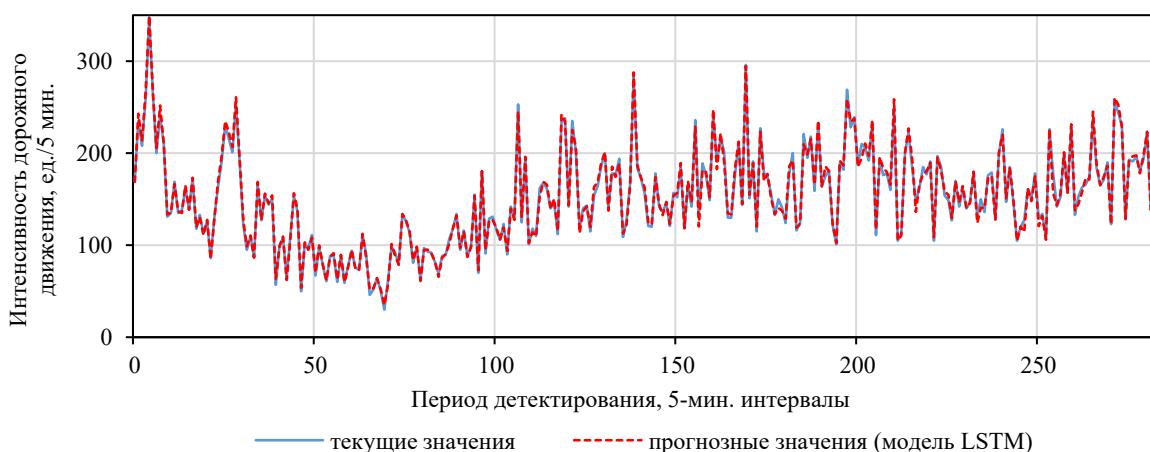


Рис. 4. Сравнение прогнозируемых и истинных значений LSTM

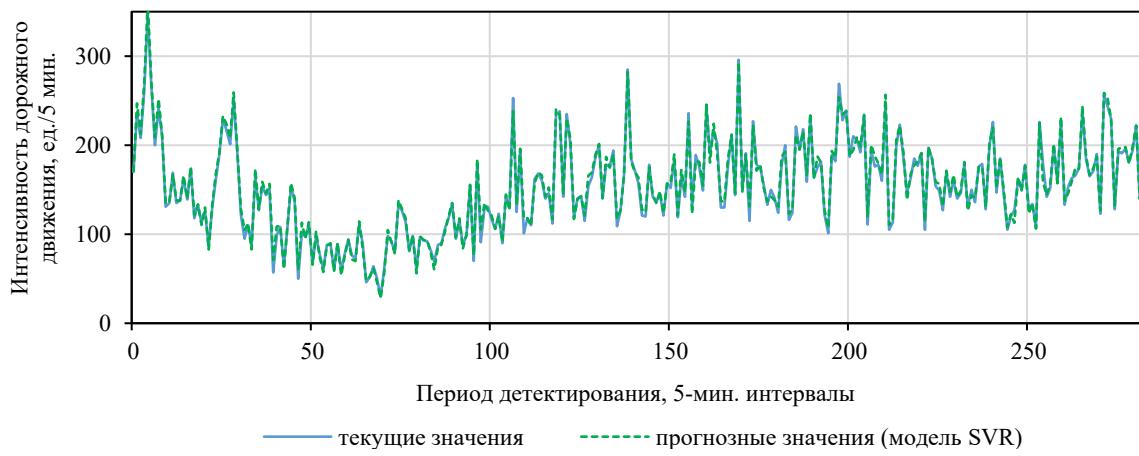


Рис. 5. Сравнение прогнозируемых и истинных значений SVR

Из графиков видно, что прогнозные значения моделей LSTM и SVR хорошо воспроизводят реальную динамику транспортного потока, диапазон ошибок прогнозирования небольшой. Поэтому указанные модели выбрали в качестве контрольных для дальнейшей оценки эффективности различных методов при прогнозировании транспортного потока.

Для повышения достоверности экспериментальных результатов и дополнительной проверки эффективности прогнозных моделей в рамках данного исследования провели 10 запусков обучения с различными случайными начальными значениями. В каждом эксперименте регистрировали результаты по среднеквадратическим ошибкам (RMSE), средним абсолютным ошибкам (MAE) и средним абсолютным процентным ошибкам (MAPE).

Для более наглядной оценки прогнозной эффективности в качестве основного показателя выбрали RMSE. Из 10 экспериментов для каждой модели отобрали пять лучших результатов, по которым рассчитывались средние значения для сравнительного анализа.

По данным таблицы 3 можно судить о точности прогнозирования моделей LSTM и SVR. Ошибки RMSE, MAE и MAPE для модели LSTM оказались меньше на 17,86 %, 19,82 % и 25,78 % соответственно, что позволяет говорить о ее более высокой прогнозной точности. MAPE отражает процент ошибки прогноза относительно реальных значений. Более низкий показатель MAPE свидетельствует о меньших относительных ошибках LSTM на различных уровнях потока. LSTM демонстрирует стабильность прогнозов как в пиковые, так и в минимальные периоды, тогда как SVR более чувствителен к экстремальным значениям.

Таблица 3

## Ошибки прогнозирования моделей LSTM и SVR

Модель	RMSE	MAE	MAPE
LSTM	4,6	3,48	2,39 %
SVR	5,6	4,34	3,22 %

На рис. 6 показана абсолютная процентная ошибка прогнозных значений относительно реальных для каждого временного интервала вдоль временного ряда потока. Четко видно, что абсолютная процентная ошибка модели LSTM ниже в большинстве временных точек.

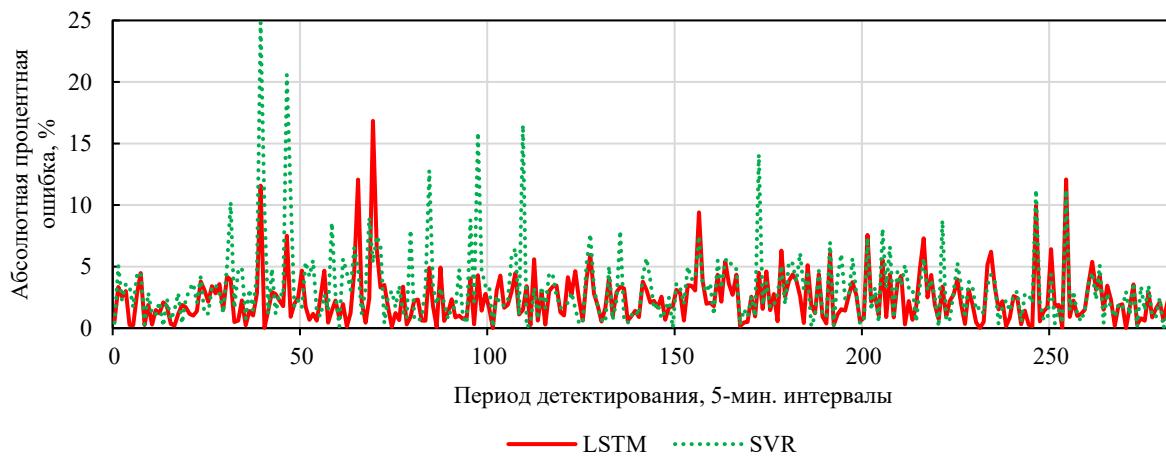


Рис. 6. Абсолютная процентная ошибка для различных временных срезов LSTM и SVR

Сопоставление рис. 6 с рис. 4 (реальные значения) показывает, что пики на графике с большими ошибками прогнозирования соответствуют временным интервалам с резкими изменениями интенсивности потока. LSTM дает более стабильные результаты прогнозирования и превосходит SVR в захвате пиков потока с нелинейными динамическими изменениями.

Из рис. 6 извлекли временные интервалы с наибольшей ошибкой (36–72) и с наименьшей ошибкой (108–144). Цифры — это номера интервалов длительностью 5 минут. Данные с указанных двух периодов использовали в обучении моделей и прогнозировании транспортного потока для сравнения способности LSTM и SVR к захвату динамических характеристик транспортного потока. На рис. 7 представлены результаты прогнозирования моделей LSTM и SVR для двух указанных временных периодов в сравнении с фактическими значениями.

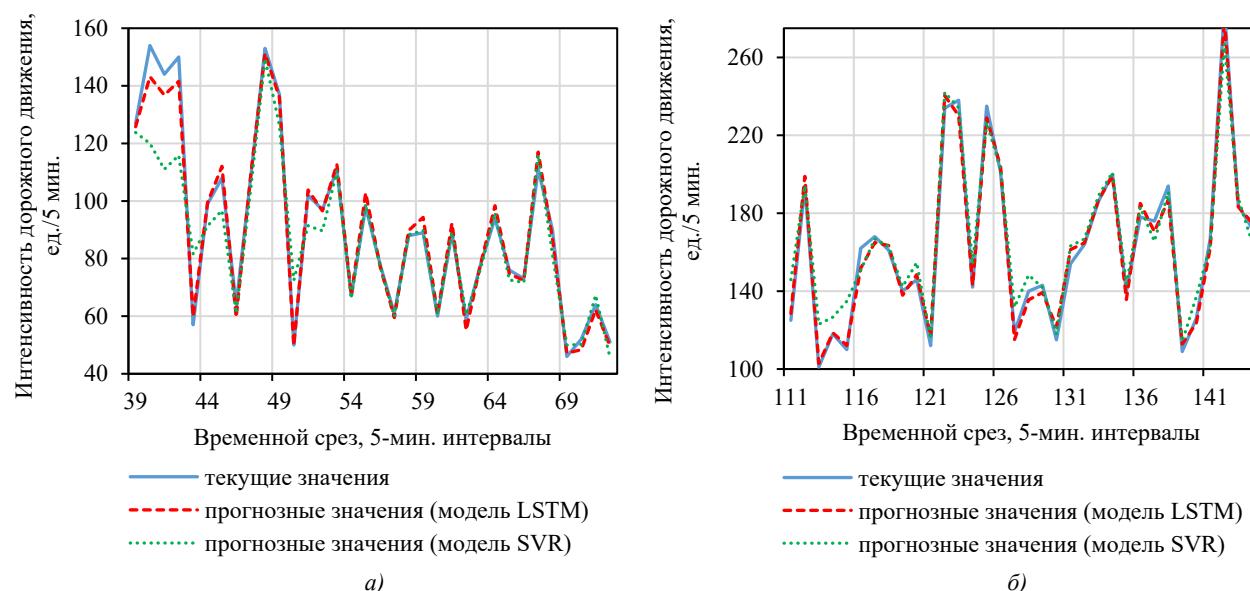


Рис. 7. Кривые прогнозов по временным периодам:

а — для временных срезов с наибольшей ошибкой; б — для временных срезов с наименьшей ошибкой

В таблице 4 представлены результаты прогнозирования двух моделей по периодам с наибольшими и наименьшими ошибками.

Таблица 4

Данные о наименьших и наибольших ошибках прогнозирования LSTM и SVR

Период	Model	RMSE	MAE	MAPE
С наименьшей ошибкой	LSTM	6,14	4,84	2,99 %
	SVR	9,67	7,37	5,19 %
С наибольшей ошибкой	LSTM	3,32	2,57	2,88 %
	SVR	12,39	7,43	8,09 %

Сравнение показывает, что LSTM демонстрирует лучшую точность в периодах с наименьшей ошибкой прогнозирования интенсивности потока: ошибки RMSE, MAE и MAPE для модели LSTM оказались меньше на 36,5 %, 34,3 % и 42,3 % соответственно. В периодах с наибольшей ошибкой прогнозирования интенсивности потока преимущество LSTM особенно заметно: ошибки RMSE, MAE и MAPE для модели LSTM оказались меньше на 73,2 %, 65,4 % и 64,4 % соответственно. Это свидетельствует о более высокой адаптивности данной модели.

Для статистической проверки значимости различий между моделями применили критерий знаковых рангов Уилкоксона. Результат ( $P = 2,44\text{e-}15$ ) существенно меньше 0,05. Значит, следует отвергнуть нулевую гипотезу об отсутствии различий в ошибках прогнозирования. Это доказывает статистически значимое различие в эффективности моделей.

В сочетании с оценкой по RMSE, MAE и MAPE подтверждается, что ошибка LSTM намного меньше, а распределение ошибок более сконцентрировано, что свидетельствует о более высокой стабильности прогнозов. Результаты убедительно демонстрируют преимущества LSTM при работе с данными временных рядов транспортных потоков.

**Обсуждение.** Итак, качество прогноза зависит от архитектуры модели. Комбинирование переменных взаимодействия и лаговых показателей в структуре LSTM обусловило лучшую точность прогнозирования. Эксперименты позволили установить, что LSTM превосходит SVR по среднеквадратическим, средним абсолютным и средним абсолютным процентным ошибкам. Это подтверждает ее более высокую прогнозную способность при различных состояниях транспортного потока. Стабильность потока влияет на точность прогноза, однако LSTM, благодаря лучшим возможностям моделирования временных рядов, способна более эффективно учитывать временные зависимости потока и сохранять высокую точность даже в условиях значительных колебаний. Отметим, что LSTM не только эффективно учитывает временную зависимость транспортного потока, но и адаптируется к его сложным, долгосрочным динамическим изменениям. Отсюда — более точные результаты краткосрочного прогнозирования.

Преимущества LSTM оказались значительно нагляднее в периодах с наибольшей ошибкой прогнозирования интенсивности потока. Так, выигрыш этой модели по абсолютной процентной ошибке в периодах с наименьшей ошибкой достиг 42,3 %, с наибольшей — 64,4 %. Для RMSE и MAE разница двукратная или почти двукратная. Показатели для RMSE — 36,5 % (периоды с наименьшей ошибкой) и 73,2 % (с наибольшей). Соответствующие показатели для MAE — 34,3 % и 65,4 %.

Метод SVR хорошо адаптирует нелинейные характеристики данных о транспортных потоках, устойчива к выбросам и может адаптироваться к различным характеристикам данных, благодаря настройке функции ядра и параметров регуляризации. Его вычислительная эффективность выше. Однако такая модель более чувствительна к шуму данных из-за сложности моделирования долгосрочной временной зависимости, что снижает стабильность прогнозирования, особенно в условиях динамических колебаний транспортного потока с большими ошибками. Прогнозная эффективность SVR ограничена более слабой, нелинейной аппроксимирующей способностью при резких изменениях потока из-за ограничений собственной архитектуры, и этим обусловлен существенный рост ошибок.

**Заключение.** В данном исследовании проведен сравнительный анализ производительности сетей долгой краткосрочной памяти (LSTM) и метода опорных векторов для регрессии (SVR) для задачи краткосрочного прогнозирования транспортного потока на скоростной автомагистрали Мэйгуань в Шэньчжэне. Модель LSTM оказалась на 17,86 % лучше SVR по среднеквадратической ошибке, на 19,82 % — по средней абсолютной ошибке и на 25,78 % — по средней абсолютной процентной ошибке.

В пользу LSTM говорит и ее более высокая точность в периодах как с наименьшей ошибкой, так и с наибольшей. В первом случае в сравнении с SVR ошибки LSTM оказались меньше на 34,3–42,3 %, во втором — на 64,4–73,2 %.

Таким образом, при краткосрочном прогнозировании транспортного потока на скоростной автомагистрали, выбирая между нейросетевой и машинной моделью, следует предпочесть нейросетевую — в данном случае LSTM.

Обозначим три основных итога данного исследования для решения проблемы качественного краткосрочного прогнозирования транспортных потоков в крупных городах.

- На примере скоростной автомагистрали Шэньчжэня экспериментально доказано, что LSTM как часть интеллектуальной транспортной системы достаточно надежно прогнозирует транспортные потоки.

- Количественно оценены различия в точности прогнозирования между моделями LSTM и SVR, что обеспечивает объективную основу для выбора алгоритмов при построении систем управления дорожным движением. Статистический анализ подтвердил значимость различий.

- Ниже сформулированы выводы, важные для практики управления дорожным движением на автотрассах крупных городов.
  - LSTM эффективно адаптируется к временным характеристикам транспортных потоков на магистралях.
  - LSTM обеспечивает точные прогнозы даже в условиях резких колебаний интенсивности движения.
  - Результаты исследования позволяют разрабатывать предиктивные стратегии снижения заторов.

Краткосрочное прогнозирование транспортного потока на основе LSTM позволяет относительно точно предсказывать интенсивность дорожного движения. Это может быть базой для оптимизации стратегий управления дорожным движением, снижения заторов и выбросов загрязняющих веществ, а также для оптимизации интеллектуальных транспортных систем.

Перспективное направление дальнейших исследований — разработка гибридных архитектур, интегрирующих контекстные данные (например, сведения о погодных условиях, дорожных инцидентах или особенностях инфраструктуры). Это позволит повысить достоверность и устойчивость прогнозов в режиме реального времени.

#### Список литературы / References

- Garg T, Kaur G. A Systematic Review on Intelligent Transport Systems. *Journal of Computational and Cognitive Engineering*. 2022;2(3):175–188. <https://doi.org/10.47852/bonviewJCCE2202245>

2. Vlahogianni EI, Matthew GK, Golias JC. Short-Term Traffic Forecasting: Where We Are and Where We're Going. *Transportation Research. Part C: Emerging Technologies*. 2014;43(1):3–19. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2014.01.005>
3. Williams BM, Hoel LA. Modeling and Forecasting Vehicular Traffic Flow as a Seasonal ARIMA Process: Theoretical Basis and Empirical Results. *Journal of Transportation Engineering*. 2003;129(6):664–672. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-947X\(2003\)129:6\(664\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-947X(2003)129:6(664))
4. Lippi M, Bertini M, Frasconi P. Short-Term Traffic Flow Forecasting: An Experimental Comparison of Time-Series Analysis and Supervised Learning. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2013;14(2):871–882. <https://doi.org/10.1109/TITS.2013.2247040>
5. Zhenjin Huang, Hao Ouyang, Yiming Tian. Short-Term Traffic Flow Combined Forecasting Based on Nonparametric Regression. In: *Proc. International Conference of Information Technology, Computer Engineering and Management Sciences*. New York City: IEEE; 2011. P. 316–319. <https://doi.org/10.1109/ICM.2011.89>
6. Polson NG, Sokolov VO. Deep Learning for Short-Term Traffic Flow Prediction. *Transportation Research. Part C: Emerging Technologies*. 2017;79:1–17. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2017.02.024>
7. Ceperic E, Ceperic V, Baric A. A Strategy for Short-Term Load Forecasting by Support Vector Regression Machines. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2013;28(4):4356–4364. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2013.2269803>
8. Weiwei Zhu, Jinglin Wu, Ting Fu, Junhua Wang, Jie Zhang, Qiangqiang Shangguan. Dynamic Prediction of Traffic Incident Duration on Urban Expressways: A Deep Learning Approach Based on LSTM and MLP. *Journal of Intelligent and Connected Vehicles*. 2021;4(2):80–91. <https://doi.org/10.1108/JICV-03-2021-0004>
9. Peng Chen, Yong-zai Lu. Extremal Optimization for Optimizing Kernel Function and Its Parameters in Support Vector Regression. *Journal of Zhejiang University Science C*. 2011;12:297–306. <https://doi.org/10.1631/jzus.C1000110>
10. Feihu Ma, Shiqi Deng, Sang Mei. A Short-Term Highway Traffic Flow Forecasting Model Based on CNN-LSTM with an Attention Mechanism. *Journal of Physics: Conference Series*. 2023;2491:012008. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2491/1/012008>
11. Liu Mingyu, Wu Jianping, Wang Yubo, He Lei. Traffic Flow Prediction Based on Deep Learning. *Journal of System Simulation*. 2018;30(11):4100–4106. URL: <https://dc-china-simulation.researchcommons.org/journal/vol30/iss11/7> (accessed 09.09.2025).
12. García S, Ramírez-Gallego S, Luengo J, Benítez JM, Herrera F. Big Data Preprocessing: Methods and Prospects. *Big Data Analytics*. 2016;1:9. <https://doi.org/10.1186/s41044-016-0014-0>
13. Robin Kuok Cheong Chan, Joanne Mun-Yee Lim, Rajendran Parthiban. A Neural Network Approach for Traffic Prediction and Routing with Missing Data Imputation for Intelligent Transportation System. *Expert Systems with Applications*. 2021;171:114573. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.114573>
14. Chahinez Ounoughi, Sadok Ben Yahia. Sequence to Sequence Hybrid Bi-LSTM Model for Traffic Speed Prediction. *Expert Systems with Applications*. 2024;236:121325. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.121325>
15. Rong Chen, Lijian Yang, Christian Hafner. Nonparametric Multistep-Ahead Prediction in Time Series Analysis. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B: Statistical Methodology*. 2004;66(3):669–686. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2004.04664.x>
16. Aqib M, Mehmood R, Alzahrani A, Katib I, Albeshri A, Altowajri SM. Smarter Traffic Prediction Using Big Data, In-Memory Computing, Deep Learning and GPUs. *Sensors*. 2019;19(9):2206. <https://doi.org/10.3390/s19092206>
17. Xianyao Ling, Xinxin Feng, Zhonghui Chen, Yiwen Xu, Haifeng Zheng. Short-Term Traffic Flow Prediction with Optimized Multi-kernel Support Vector Machine. In: *Proc. IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. New York City: IEEE; 2017. P. 294–300. <https://doi.org/10.1109/CEC.2017.7969326>
18. Zhou Zhao, Ashok Srivastava, Lu Peng, Qing Chen. Long Short-Term Memory Network Design for Analog Computing. *ACM Journal on Emerging Technologies in Computing Systems (JETC)*. 2019;15(1):1–27. <https://doi.org/10.1145/3289393>
19. Srivastava N, Hinton G, Krizhevsky A, Sutskever I, Salakhutdinov R. Dropout: A Simple Way to Prevent Neural Networks from Overfitting. *Journal of Machine Learning Research*. 2014;15:1929–1958. URL: [https://www.jmlr.org/papers/volume15/srivastava14a/srivastava14a.pdf?utm\\_content=buffer79b4](https://www.jmlr.org/papers/volume15/srivastava14a/srivastava14a.pdf?utm_content=buffer79b4) (accessed: 21.10.2025).
20. Yang Zhu, Yijun Gao, Zhenhao Wang, Guansen Cao, Renjie Wang, Song Lu, et al. A Tailings Dam Long-Term Deformation Prediction Method Based on Empirical Mode Decomposition and LSTM Model Combined with Attention Mechanism. *Water*. 2022;14(8):1229. <https://doi.org/10.3390/w14081229>
21. Pan B, Demiryurek U, Shahabi C. Utilizing Real-World Transportation Data for Accurate Traffic Prediction. In: *Proc. IEEE 12th International Conference on Data Mining*. New York City: IEEE; 2012. P. 595–604. <https://doi.org/10.1109/ICDM.2012.52>
22. Moors G, Vriens I, Gelissen JP, Vermunt JK. Two of a Kind. Similarities Between Ranking and Rating Data in Measuring Values. *Survey Research Methods*. 2016;10(1):15–33. <https://doi.org/10.18148/srm/2016.v10i1.6209>

***Об авторах:***

**Иван Владимирович Топилин**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Организация перевозок и дорожного движения» Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ivan\\_top@mail.ru](mailto:ivan_top@mail.ru)

**Мэнни Хань**, аспирант кафедры «Организация перевозок и дорожного движения» Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ORCID](#), [hanmengyi@mail.ru](mailto:hanmengyi@mail.ru)

**Анастасия Александровна Феофилова**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Организация перевозок и дорожного движения» Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [afeofilova@donstu.ru](mailto:afeofilova@donstu.ru)

**Никита Алексеевич Бескопыльный**, аспирант кафедры «Организация перевозок и дорожного движения» Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ResearchGate](#), [ScopusID](#), [nbeskopylnyi@donstu.ru](mailto:nbeskopylnyi@donstu.ru)

***Заявленный вклад авторов:***

**И.В. Топилин**: разработка концепции, научное руководство.

**А.А. Феофилова**: валидация результатов, написание рукописи – рецензирование и редактирование.

**М. Хань**: проведение исследования, анализ результатов, подготовка черновика научной статьи.

**Н.А. Бескопыльный**: проведение исследования, анализ результатов, подготовка черновика научной статьи.

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.**

***About the Authors:***

**Ivan V. Topilin**, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Organization of Transportation and Road Traffic Management, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ivan\\_top@mail.ru](mailto:ivan_top@mail.ru)

**Mengyi Han**, Postgraduate student of the Department of Organization of Transportation and Road Traffic Management, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [ORCID](#), [hanmengyi@mail.ru](mailto:hanmengyi@mail.ru)

**Anastasia A. Feofilova**, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Organization of Transportation and Road Traffic Management, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [afeofilova@donstu.ru](mailto:afeofilova@donstu.ru)

**Nikita A. Beskopylny**, Postgraduate student of the Department of Organization of Transportation and Road Traffic Management, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ResearchGate](#), [ScopusID](#), [nbeskopylnyi@donstu.ru](mailto:nbeskopylnyi@donstu.ru)

***Claimed Contributorship:***

**IV Topilin**: conceptualization, supervision.

**AA Feofilova**: validation, writing – review & editing.

**M Han**: investigation, validation, writing – original draft preparation.

**NA Beskopylny**: investigation, validation, writing – original draft preparation.

***Conflict of Interest Statement:* the authors declare no conflict of interest.**

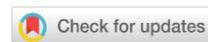
***All authors have read and approved the final manuscript.***

**Поступила в редакцию / Received** 18.08.2025

**Поступила после рецензирования / Reviewed** 11.09.2025

**Принята к публикации / Accepted** 29.09.2025

ИНФОРМАТИКА,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ  
INFORMATION TECHNOLOGY,  
COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT



УДК 519.6:316.472.45

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2208>

Оригинальное эмпирическое исследование

**Идентификация функции активности пользователей социальной сети в линейной диффузионной модели**

М.А. Толстых , В.К. Толстых

Донецкий государственный университет, г. Донецк, Донецкая Народная Республика

[✉ physicisto@yandex.ru](mailto:physicisto@yandex.ru)



EDN: CCULZU

**Аннотация**

**Введение.** Повышение точности математических моделей распространения информации в социальных сетях напрямую связано с возможностью корректной идентификации их параметров. Во многих работах фундаментальную сложность этой задачи фактически обходят, подменяя прямую идентификацию искомых функций подбором параметров их эвристических аппроксимаций, что неизбежно приводит к снижению как точности, так и универсальности модели. В линейной диффузионной модели, описывающей пространственно-временную динамику распространения информации, одним из ключевых параметров выступает функция, характеризующая активность пользователей. Целью данного исследования является разработка и численная реализация алгоритма прямой параметрической идентификации функции активности пользователей на основе прямого экстремального подхода, позволяющего полностью отказаться от эвристических аппроксимаций, а также оценка его вычислительной эффективности в сопоставлении с классическим градиентным методом.

**Материалы и методы.** Для решения задачи параметрической идентификации был использован прямой экстремальный подход. В отличие от классического метода наискорейшего спуска, предложенный метод с регулируемым направлением спуска адаптирует траекторию поиска к локальным особенностям функционала качества за счет введения параметра регулирования. Численное решение прямой и сопряженной задач осуществлено по неявной конечно-разностной схеме. Верификация метода проводилась на синтетических данных.

**Результаты исследования.** Для алгоритма идентификации получено аналитическое выражение градиента целевого функционала через решение сопряженной задачи. Установлены границы идентифицируемости искомого параметра, обусловленные инерционностью диффузионного процесса и временем установления реакции сети. Проведено сравнительное исследование градиентных алгоритмов. Классический метод наискорейшего спуска продемонстрировал медленную и неравномерную сходимость, потребовав для достижения критерия остановки 13 217 итераций, тогда как метод с регулируемым направлением спуска обеспечил сходимость к тому же уровню точности за 376 итераций.

**Обсуждение.** Полученные результаты подтверждают теоретические предпосылки о необходимости учета пространственной неоднородности градиента функционала при решении бесконечномерных задач оптимизации. Классический градиентный метод демонстрирует низкую эффективность при восстановлении нестационарных параметров вследствие неоднородности градиента, в то время как метод с регулируемым направлением спуска позволяет достичь равномерной и быстрой сходимости. Это свидетельствует о том, что адаптация алгоритма к специфике бесконечномерной задачи является ключевым фактором успеха. Основной вклад исследования заключается в развитии вычислительного аппарата для прямого определения функциональных параметров, что расширяет методологический арсенал анализа систем, описываемых уравнениями в частных производных.

**Заключение.** Основными результатами работы являются разработка и верификация эффективного алгоритма прямой идентификации функции активности пользователей в линейной диффузионной модели социальной сети. Практическая значимость состоит в создании более точных и интерпретируемых инструментов для моделирования информационных потоков без привлечения априорных аппроксимаций. Разработанный алгоритм продемонстрировал значительное преимущество по скорости и характеру сходимости. Тем не менее, интерпретация физического смысла идентифицируемой функции в рамках данной модели требует дальнейшего развития. Перспективным направлением является применение метода к более совершенным моделям, учитывающим пространственную нероднородность активности пользователей, а также его расширение на идентификацию вектора функций.

**Ключевые слова:** социальные сети, диффузионная модель, идентификация параметров, прямой экстремальный подход, бесконечномерная оптимизация

**Благодарности.** Авторы выражают признательность научному коллективу кафедры «Компьютерные технологии» Донецкого государственного университета за плодотворное обсуждение материалов работы.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра на проведение фундаментальных научных исследований (Соглашение от 27.02.2025 № 075-02-2025-1608).

**Для цитирования.** Толстых М.А., Толстых В.К. Идентификация функции активности пользователей социальной сети в линейной диффузионной модели. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):363–370.  
<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2208>

Original Empirical Research

## Identification of the Activity Function of Social Network Users in a Linear Diffusion Model

Margarita A. Tolstykh  , Victor K. Tolstykh 

Donetsk State University, Donetsk, Donetsk People's Republic

✉ [physicisto@yandex.ru](mailto:physicisto@yandex.ru)

### Abstract

**Introduction.** Improving the accuracy of mathematical models for disseminating information in social networks is directly related to the ability to correctly identify their parameters. In numerous papers, the fundamental complexity of this problem is actually bypassed by substituting the direct identification of the desired functions for the selection of parameters for their heuristic approximations, which inevitably leads to a decrease in both the accuracy and universality of the model. In the linear diffusion model describing the spatiotemporal dynamics of information, one of the key parameters is the function characterizing user activity. The objective of this study includes the development and numerical implementation of an algorithm for direct parametric identification of user activity functions based on a direct extreme approach, which makes it possible to completely abandon heuristic approximations, and the evaluation of its computational efficiency in comparison to the classical gradient method.

**Materials and Methods.** A direct extreme approach was used to solve the parametric identification problem. Unlike the classical steepest descent technique, the proposed method with adjustable descent direction adapted the search trajectory to local features of the quality functional through introducing a control parameter. The numerical solution to the direct and adjoint problems was implemented using an implicit finite-difference scheme. The method was verified using synthetic data.

**Results.** For the identification algorithm, an analytical expression of the gradient of the target functional was obtained through the solution to the adjoint problem. The identifiability limits of the desired parameter conditioned by the inertia of the diffusion process and the network response time were determined. A comparative study of gradient algorithms was conducted. The classical steepest descent approach demonstrated slow and uneven convergence, requiring 13,217 iterations to reach the stopping criterion, whereas the method with adjustable descent direction provided convergence to the same level of accuracy in 376 iterations.

**Discussion.** The obtained results confirm the theoretical assumptions about the need to take into account the spatial heterogeneity of the functional gradient when solving infinite-dimensional optimization problems. The classical gradient technique exhibits low efficiency in reconstructing nonstationary parameters due to gradient nonuniformity, while the method with adjustable descent direction reaches uniform and rapid convergence. This demonstrates that adapting the algorithm to the specifics of an infinite-dimensional problem is a key success factor. The main contribution of the research is the development of a computing apparatus for the direct determination of functional parameters, which expands the methodological arsenal for analyzing systems described by partial differential equations.

**Conclusion.** The key findings of this research are the development and verification of an efficient algorithm for direct identifying user activity functions in a linear diffusion model of a social network. The practical significance consists in the creation of more accurate and interpretable tools for modeling information flows without resorting to a priori approximations. The developed algorithm has demonstrated significant advantages in speed and convergence. However, the interpretation of the physical meaning of the identified function within this model requires further development. A promising direction is the application of the method to more sophisticated models that take into account the spatial heterogeneity of user activity, as well as its extension to the identification of the function vector.

**Keywords:** social networks, diffusion model, parameter identification, direct extreme approach, infinite-dimensional optimization

**Acknowledgements.** The authors would like to thank the research team of the Department of Computer Technologies, Donetsk State University, for fruitful discussions of the research materials.

**Funding Information.** The work is done with the financial support from the Azov-Black Sea Mathematics Center for conducting fundamental scientific research (Agreement No. 075-02-2025-1608 dated February 27, 2025).

**For Citation.** Tolstykh MA, Tolstykh VK. Identification of the Activity Function of Social Network Users in a Linear Diffusion Model. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):363–370. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2208>

**Введение.** Социальные сети стали неотъемлемым элементом современного общества, осуществляя не только развлекательную функцию, но и выступая инструментом формирования общественного мнения и среды для создания различных сообществ, объединенных интересами (бытовыми, политическими, экстремистскими и т.д.). В связи с этим задачи изучения, прогнозирования и регулирования распространения информации, а также выделения и классификации сообществ в социальных сетях приобретают повышенную актуальность. Решение указанных задач требует разработки точных математических моделей таких процессов.

Существует большое разнообразие социальных платформ, каждая из которых отличается собственной структурой и механизмами передачи информации. Постоянная эволюция и появление новых алгоритмов функционирования социальных сетей приводят к значительному разнообразию их математических моделей. Эпидемические модели SI, SIR, SEIR [1] и их современные усложненные версии в виде моделей среднего поля [2] классифицируют узлы (пользователей) в социальной сети по состояниям и описывают количественное изменение узлов определенного класса. В то же время графовые модели в виде линейной пороговой и каскадной [3] акцентируют внимание на кумулятивном эффекте распространения информации и зачастую используются для поиска лидеров мнений в социальной сети. Каждая из упомянутых моделей описывает лишь частные аспекты распространения информации, не охватывая этот процесс в его пространственно-временной полноте.

В последние годы широкой популярностью стали пользоваться модели на основе машинного обучения, способные с высокой точностью прогнозировать динамику распространения информации [4]. Однако подобные модели, как правило, функционируют по принципу «чёрного ящика» и не предоставляют интерпретируемых параметров (например, виральности, пропускной способности сети или активности пользователей). Отсутствие таких параметров ограничивает возможности исследователей в оценке кластеров социальной сети и управлении процессами распространения информации, что ставит под угрозу применение моделей в задачах, требующих понимания внутренних механизмов диффузии.

В работах [5, 6] отмечается целесообразность построения принципиально общей модели, не привязанной к постоянно изменяющимся алгоритмам функционирования социальных сетей. В исследовании [7] с целью достижения этой цели предлагается использование математического аппарата уравнений в частных производных, а именно — линейной диффузионной модели:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rhv = 0, \quad x, t \in \Omega = (x_a, x_b) \times (t_0, t_1), \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $x$  — расстояние в графе сети, измеряемое минимальным количеством рёбер, по которым может быть передана информация  $V(x, t) \in L_2(\Omega)$  (например, в виде количества репостов определенной новости);  $L_2$  — евклидово пространство функций с интегрируемым квадратом.

Авторы определяют параметры модели следующим образом:  $p$  — популярность информации (виральность, скорость диффузии информации в сети);  $h$  — пропускная способность социальной сети (максимальное количество пользователей, которые могут принять участие в распространении информации);  $r$  — активность пользователей (скорость роста информации в сети).

Модель (1) учитывает пространственно-временные закономерности распространения информации, а её параметры могут быть настроены для отражения особенностей конкретных социальных сетей [7]. Ключевой проблемой в данном случае становится задача параметрической идентификации модели. В общем случае все указанные параметры должны быть функциями:  $p(x)$ ,  $h(x)$ ,  $r(t)$ . Авторы модели (1) предлагают аппроксимировать эти функции различными эвристическими зависимостями, что приводит к задаче параметрической идентификации набора коэффициентов-чисел, входящих в эти зависимости [8, 9]. Такое упрощение не позволяет достичь максимальной точности, которая возможна только при идентификации непосредственно указанных функций, а не их аппроксимаций, поскольку для разных социальных сетей и даже кластеров одной социальной сети может существенно различаться набор входящих в модель параметров. Авторы работы [10] справедливо указывают, что аналитически найти оптимальные параметры-функции зачастую невозможно, и классические численные методы оказываются неэффективными.

В работе [11] рассматривается задача прямой идентификации функции  $h(x)$ . Для поиска её оптимального значения применяется прямой экстремальный подход [12], основывающийся на непосредственной минимизации критерия качества идентификации  $J(h)$  экстремальными алгоритмами градиентом  $\nabla J(h; x)$ . Хотя в работе [11] была сделана попытка прямой идентификации  $h(x)$ , задача идентификации временной функции  $r(t)$  для подобных моделей в литературе систематически не исследована. Целью настоящей работы является восполнение указанного пробела путём разработки и численной реализации алгоритма прямой параметрической идентификации функции активности пользователей в линейной диффузионной модели (1) на основе прямого экстремального подхода. Основная задача заключается в оценке эффективности градиентных алгоритмов для достижения данной цели. Решение этой задачи создаст методологическую основу для последующей идентификации других параметров (например,  $p(x)$  или одновременной идентификации вектора параметров-функций) и перехода к более сложным нелинейным моделям. Параметры  $h(x)$  и  $p(x)$  в рамках данной работы считаются известными и взяты из работы [5] для изоляции и детального анализа целевой задачи.

**Материалы и методы.** Для моделирования процессов распространения информации по уравнению (1) в исследуемом кластере графа сети были заданы граничные условия первого и второго рода:

$$v = 1 \text{ на } \Gamma_a = x_a \times (t_0, t_1), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ на } \Gamma_b = x_b \times (t_0, t_1).$$

Здесь предполагается, что источник информации находится в узле  $x_a$  и в момент времени  $t = t_0$  генерирует информацию  $v(x_a, t_0)$  в виде одной новости. Значение  $x_b$  определяет расстояние, на котором поток информации исчезает.

Начальное условие соответствует отсутствию обсуждаемой новости в сети:

$$v = 0 \text{ на } \Gamma_0 = (x_a, x_b] \times t_0.$$

Критерий качества идентификации модели был задан в виде отклонения модельного состояния  $v$  от экспериментально наблюдаемого  $v_e$  в реальной сети на всей пространственно-временной области  $\Omega$  в виде следующего функционала:

$$J(r) = \iint_{\Omega} (v - v_e)^2 dx dt. \quad (2)$$

Задача параметрической идентификации оптимального значения функции  $r_*(t)$  формулируется как экстремальная задача:

$$r_* = \arg \min_{r \in L_2(S)} J(r).$$

Для решения данной задачи использовался бесконечномерный градиентный алгоритм:

$$r^{k+1}(t) = r^k(t) - b^k \alpha(t) \nabla J(r^k; t), \quad t \in S_\Delta \subset S, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где  $k$  — номер итерации;  $b^k$  — шаговый множитель (выбирался методом золотого сечения);  $\alpha(t)$  — параметр регулирования направления спуска. Если  $\alpha(t) = 1$ , то алгоритм (3) сводится к классическому методу наискорейшего спуска (МНС). В противном случае данный алгоритм представляет собой метод с регулируемым направлением спуска (МРНС) [12]. Параметр  $\alpha(t)$  выполняет регулировку направления спуска к оптимуму для обеспечения равномерной сходимости функций  $r^{k+1}(t)$  к  $r_*(t)$  на  $S_\Delta \subset S$ , где в принципе возможна равномерная сходимость. Для МРНС, согласно [12], параметр регулирования направления спуска можно задать:

$$\alpha(t) = \frac{r^0(t)}{|\nabla J(r^0; t)|}.$$

Для реализации алгоритма (3) необходимо нахождение аналитического выражения градиента целевого функционала (2), зависящего от управления неявно, что является основной сложностью при бесконечномерной идентификации. Градиент находится через решение сопряженной задачи, техника получения которой широко описана в литературе [13, 14].

Для оценки эффективности решения задачи параметрической идентификации функции активности пользователей в модели (1) посредством прямого экстремального подхода (3) была поставлена следующая тестовая задача.

Исходное и сопряженное линейные параболические уравнения решались численно по неявной конечно-разностной схеме Кранка-Николсона методом прогонки. Пространственно-временная сетка задавалась значениями  $n = 50$ ,  $m = 500$ . Это соответствовало расстоянию в пять рёбер графа сети на которое распространялась новость от источника, и времени  $t_1 - t_0 = 72$  часа. Было принято  $t_\Delta = 5$  часов.

Для построения синтетических данных  $v_e$  параметры  $p$  и  $h$  считались известными и были взяты из работы [5]:

$$p(x) = e^{-x}, \quad h(x) = -0,03x^2 + 0,2x.$$

Задавалось тестовое оптимальное значение, которое также предлагалось в работе [5]:

$$r_*(t) = \frac{0,0059}{1,5526} - e^{-1,5526t} \left( \frac{0,0059}{1,5526} - 1 \right).$$

Решалась прямая задача для модели (1). Полученное состояние  $v(x, t)$  принималось как «экспериментальное»  $v_e(x, t)$ . Далее задавалось начальное приближение  $r^0(t) = 0,3$  и начинался итерационный процесс решения обратной задачи идентификации экстремальным алгоритмом (3) для восстановления функции  $r_*(t)$ .

Условием остановки итераций был следующий критерий практического прекращения сходимости:

$$\frac{u^k - u^{k-1}}{u^{k-1}} \leq 10^{-5}.$$

**Результаты исследования.** Для алгоритма (3) был найден градиент:

$$\nabla J(r; t) = - \int_{x_a}^{x_b} hyfdx \in L_2(S_\Delta). \quad (4)$$

Он определяется через решение следующей сопряжённой задачи  $f$ :

$$-\frac{\partial f}{\partial t} - p \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - frh + 2(v - v_e) = 0, \quad x, t \in \Omega, \quad (5)$$

с соответствующими граничными и начальным (терминальным) условиями:

$$pf = 0 \text{ на } \Gamma_a, \quad p \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ на } \Gamma_b, \quad f = 0 \text{ на } \Gamma_1 = [x_a, x_b] \times t_1.$$

Сопряжённая задача решается в обратном по времени направлении от начального нулевого состояния  $f$  на  $\Gamma_1$ . При неоптимальном значении  $r(t)$ , через некоторое время  $t_\Delta$  за счёт свободного члена  $2(v - v_e)$  в уравнении (5) формируется ненулевое состояние  $f$ . Если провести анализ управляемости, то получим множество управляемости, на котором может быть идентифицирована функция  $r(t)$ :

$$S_\Delta = (t_0 + t_\Delta, t_1 - t_\Delta), \quad (6)$$

где  $t_\Delta$  с одной стороны — время выждания начала реакции пользователей сети на опубликованную новость. Идентификация активности пользователей до начала их реакции невозможна. С другой стороны — это время начала влияния члена  $2(v - v_e)$  в сопряжённой задаче на всю пространственную область рассматриваемого кластера сети.

На рис. 1 показано начальное значение градиента. Результаты идентификации представлены на рис. 2 а. Сходимость метода завершилась на итерации  $k = 13\,217$  с неравномерной на  $S_\Delta$  сходимостью. Штрихпунктирная кривая — это пример значения функции  $r^{20}(t)$  на 20-й итерации.

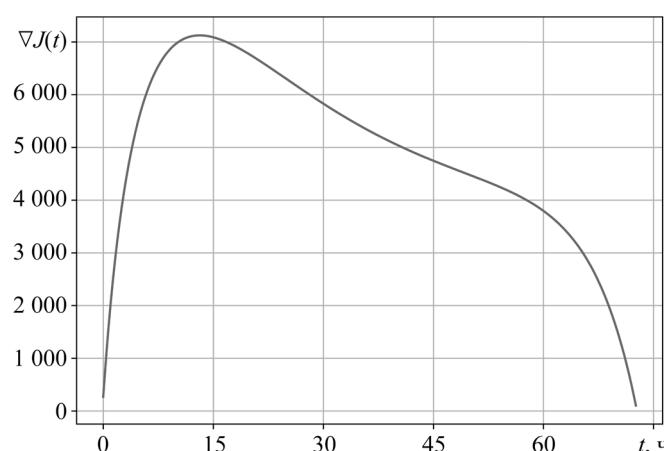


Рис. 1. Начальное значение градиента  $\nabla J(r^0; t)$

Результаты идентификации МРНС представлены пунктирной кривой на рис. 2 б. Сходимость завершилась за  $k = 376$  итераций. Полученная функция  $r^{376}(t)$  визуально совпадает с точным тестовым значением  $r_*(t)$ . Штрихпунктирная линия — это пример  $r(t)$  на итерации  $k = 20$ . Конечное значение целевого функционала в обеих методах было примерно одинаковое.

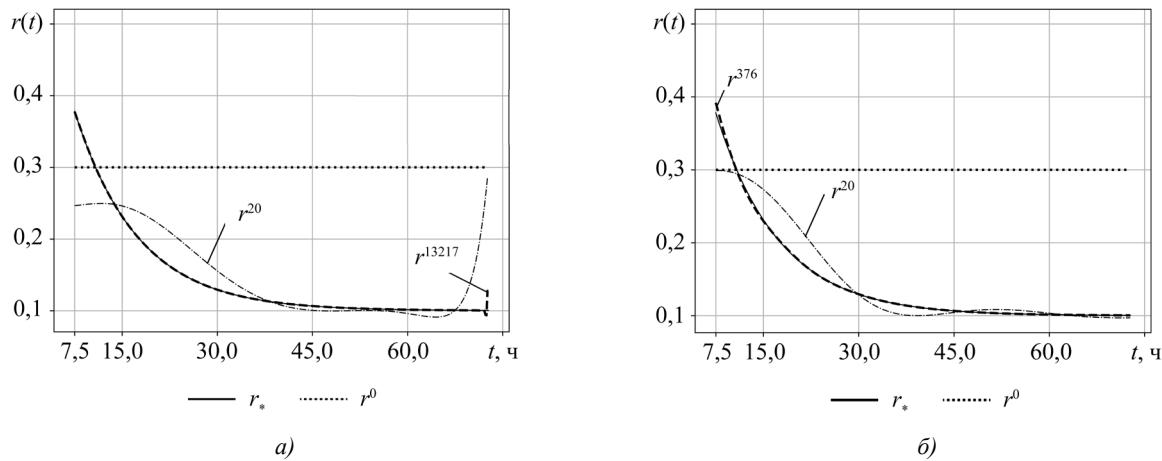


Рис. 2. Идентификация  $r(t)$ :  
а — посредством МНС; б — посредством МРНС

**Обсуждение.** Полученные результаты позволяют сделать ряд важных выводов о природе задачи идентификации и эффективности предложенного метода. Значительная неравномерность начального градиента  $\nabla J(r^0; t)$  (рис. 1) при равномерном начальном приближении  $r^0(t)$  является прямым следствием пространственно-временной динамики модели (1) и ограниченной управляемости (6) системы на краях интервала  $S$ . Это объясняет, почему классический МНС, не учитывающий данную неоднородность, демонстрирует медленную и неравномерную сходимость (рис. 2 а). Алгоритм тратит значительные вычислительные ресурсы на компенсацию особенностей градиента, что и приводит к необходимости 13 217 итераций.

В свою очередь, МРНС эффективно компенсирует эту неоднородность за счет параметра  $a(t)$ , адаптируя направление поиска к локальным особенностям функционала. Это подтверждается равномерной сходимостью  $r^k(t) \rightarrow r_*(t)$  на всем множестве  $S_\Delta$  (рис. 2 б) и сокращением числа итераций на два порядка (376 против 13 217). Данный результат хорошо согласуется с теоретическими предпосылками, изложенными в [12], и подтверждает, что для бесконечномерных задач ключевым фактором является не просто минимизация, а учет неоднородности функционала градиента.

Что касается согласования с предыдущими исследованиями, успех в прямой идентификации  $r(t)$  развивает идеи, заложенные в [11] для идентификации  $h(x)$ , и демонстрирует универсальность прямого экстремального подхода для функциональных параметров в распределенных системах. В то же время наш подход предлагает решение проблемы, обозначенной в [10], где констатировалась неэффективность классических численных методов. Для сравнения: в работе [15] рассмотрены похожие проблемы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при идентификации вектора чисел. Было показано, что проблема не в самой задаче, а в необходимости применения специализированных адаптивных алгоритмов. Установление области идентифицируемости  $S_\Delta$  также является важным методологическим вкладом. Этот результат подчеркивает фундаментальное ограничение, связанное с инерционностью процесса диффузии и временем установления реакции сети, что должно учитываться при корректной постановке подобных обратных задач.

**Заключение.** В данной работе была решена актуальная задача прямой параметрической идентификации функции активности пользователей  $r(t)$  в линейной диффузионной модели (1), описывающей распространение информации в социальной сети. Разработанный и верифицированный алгоритм на основе прямого экстремального подхода с регулируемым направлением спуска продемонстрировал более чем двукратное превосходство в скорости сходимости по сравнению с классическим градиентным методом, доказав свою высокую эффективность для этого класса задач.

Практическая значимость исследования заключается в создании вычислительного инструмента, который позволяет отказаться от априорных эвристических аппроксимаций параметров и перейти к прямому восстановлению функций, что значительно повышает точность и адекватность моделей распространения информации. Это открывает возможности для разработки более надежных систем прогнозирования и управления информационными потоками в социальных сетях.

Основным ограничением в текущей работе является использование синтетических данных для валидации метода. Также интерпретация физического смысла и размерности самой функции  $r(t)$  требует дальнейшего углубленного изучения. Дальнейшие исследования будут направлены на развитие модельных представлений и адаптацию доказавшего эффективность метода к более сложным нелинейным моделям. В качестве ключевой задачи на будущее рассматривается расширение метода для одновременной идентификации нескольких функциональных параметров, что представляет собой более сложную, но и более практически ценную задачу.

### Список литературы / References

1. Mei Li, Xiang Wang, Kai Gao, Shanshan Zhang. A Survey on Information Diffusion in Online Social Networks: Models and Methods. *Information*. 2017;8(4):118. <https://doi.org/10.3390/info8040118>
2. Глухов А.И., Шишленин М.А., Трусов Н.В. Моделирование динамики социальных протестов: игры среднего поля и обратные задачи. *Дифференциальные уравнения*. 2025;61(6):802–822. <https://doi.org/10.7868/S3034503025060067>
- Glukhov AI, Shishlenin MA, Trusov NV. Modeling the Dynamics of Social Protests: Mean Field Games and Inverse Problems. *Differential Equations*. 2025;61(6):802–822. <https://doi.org/10.7868/S3034503025060067>
3. Alshahrani M, Zhu Fuxi, Sameh A, Mekouar S, Sheng Huang. Efficient Algorithms Based on Centrality Measures for Identification of Top-K Influential Users in Social Networks. *Information Sciences*. 2020;527:88–107. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2020.03.060>
4. Dritsas E, Trigka M. Machine Learning in Information and Communications Technology: A Survey. *Information*. 2025;16(1):8. <https://doi.org/10.3390/info16010008>
5. Haiyan Wang, Feng Wang, Kuai Xu. *Modeling Information Diffusion in Online Social Networks with Partial Differential Equations*. Cham: Springer; 2020. 144 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.0505>
6. Ying Hu, Rachel Jeungeun Song, Min Chen. Modeling for Information Diffusion in Online Social Networks via Hydrodynamics. *IEEE Access*. 2017;5:128–135. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2016.2605009>
7. Feng Wang, Haiyan Wang, Kuai Xu, Jianhong Wu, Xiaohua Jia. Characterizing Information Diffusion in Online Social Networks with Linear Diffusive Model. In: *Proc. IEEE 33rd International Conference on Distributed Computing Systems*. New York City: IEEE; 2013. P. 307–316. <https://doi.org/10.1109/ICDCS.2013.14>
8. Звонарева Т.А., Кабанихин С.И., Криворотко О.И. Численный алгоритм определения источника диффузионно-логистической модели по данным интегрального типа, основанный на тензорной оптимизации. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023;63(9):1513–1523. <https://doi.org/10.31857/S0044466923090193>
- Zvonareva TA, Kabanikhin SI, Krivorotko OI. Numerical Algorithm for Source Determination in a Diffusion–Logistic Model from Integral Data Based on Tensor Optimization. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2023;63(9):1513–1523. <https://doi.org/10.31857/S0044466923090193>
9. Krivorotko O, Kabanikhin S, Shuhua Zhang, Kashtanova V. Global and Local Optimization in Identification of Parabolic Systems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2020;28(6):899–913. <https://doi.org/10.1515/jip-2020-0083>
10. Zoppoli R, Sanguineti M, Gnecco G, Parisini Th. The Basic Infinite-Dimensional or Functional Optimization Problem. In book: *Neural Approximations for Optimal Control and Decision*. Cham: Springer; 2020. P. 1–38. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-29693-3\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-29693-3_1)
11. Толстых В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами. Донецк: Юго-Восток; 1997. 177 с.
- Tolstykh VK. *Direct Extreme Approach for Optimizing Distributed Parameter Systems*. Donetsk: Yugo-Vostok; 1997. 177 p. (In Russ.)
12. Tolstykh MA. Identifying the Capacity of a Social Network. *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. 2024;48:59–64. <https://doi.org/10.3103/S0278641924010084>
13. Miele A. *Theory of Optimum Aerodynamic Shapes*. New York: Academic Press; 1965. 455 p.
14. Марчук Г.И., Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. *Труды института математики и механики УрО РАН*. 2011;17(2):136–150. <https://doi.org/10.1134/S0081543812020113>
- Marchuk GI, Shutyaev VP. Adjoint Equations and Iterative Algorithms in Problems of Variational Data Assimilation. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplement Issues)*. 2012;276(2):138–152. <https://doi.org/10.1134/S0081543812020113>
15. Кабанихин С.И., Криворотко О.И. Оптимизационные методы решения обратных задач иммунологии и эпидемиологии. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020;60(4):590–600. <https://doi.org/10.31857/S0044466920040109>
- Kabanikhin SI, Krivorotko OI. Optimization Methods for Solving Inverse Problems of Immunology and Epidemiology. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2020;60(4):590–600. <https://doi.org/10.31857/S0044466920040109>

*Об авторах:*

**Маргарита Анатольевна Толстых**, младший научный сотрудник, научно-образовательный математический центр «Математический центр Донецкого государственного университета» (283001, Донецкая Народная Республика, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ResearchGate](#), [physicisto@yandex.ru](mailto:physicisto@yandex.ru)

**Виктор Константинович Толстых**, доктор физико-математических наук, доктор технических наук, профессор кафедры «Компьютерные технологии» Донецкого государственного университета (283001, Донецкая Народная Республика, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [mail@tolstykh.com](mailto:mail@tolstykh.com)

*Заявленный вклад авторов:*

**М.А. Толстых:** курирование данных, проведение исследования, визуализация, написание черновика рукописи.

**В.К. Толстых:** разработка методологии, написание рукописи — внесение замечаний и исправлений.

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.**

*About the Authors:*

**Margarita A. Tolstykh**, Junior Research Associate, Mathematics Center, Donetsk State University (24, Universitetskaya Str., Donetsk, 283001, Donetsk People's Republic), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ResearchGate](#), [physicisto@yandex.ru](mailto:physicisto@yandex.ru)

**Victor K. Tolstykh**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Dr.Sci. (Eng.), Professor of the Computer Technology Department, Donetsk State University (24, Universitetskaya Str., Donetsk, 283001, Donetsk People's Republic), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), [mail@tolstykh.com](mailto:mail@tolstykh.com)

*Claimed Contributorship:*

**MA Tolstykh:** data curation, investigation, visualization, writing – original draft preparation.

**VK Tolstykh:** methodology, writing – review & editing.

**Conflict of Interest Statement:** the authors declare no conflict of interest.

**All authors have read and approved the final manuscript.**

**Поступила в редакцию / Received** 04.09.2025

**Поступила после рецензирования / Reviewed** 23.09.2025

**Принята к публикации / Accepted** 01.10.2025

ИНФОРМАТИКА,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ  
INFORMATION TECHNOLOGY,  
COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT



УДК 004.75

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2238>

**Концепция многоуровневой сетевой инфраструктуры  
мониторинга агропромышленных объектов  
на основе беспроводных сенсорных сетей**



EDN: CLJRZJ

В.В. Самойленко<sup>ID</sup>

Ставропольский государственный аграрный университет, г. Ставрополь, Российская Федерация

✉ [samoilenko.vv@stgau.ru](mailto:samoilenko.vv@stgau.ru)

**Аннотация**

**Введение.** В условиях цифровизации агросектора точное земледелие становится ключевым драйвером устойчивости: беспроводные сенсорные сети (БСС) обеспечивают непрерывный мониторинг почвенно-климатических параметров и состояния растений, поддерживая прогнозирование урожайности и ресурсную оптимизацию при снижении операционных рисков. Несмотря на значительный прогресс в исследованиях энергоэффективности, маршрутизации и топологии БСС, проблема их системной надежности в реальных агросценариях освещена фрагментарно. Существующие теоретические подходы опираются на теорию графов, марковские и квазидетерминированные модели для оценки связности и отказоустойчивости, но недостаточно учитывают деградацию батарей, вариативность радиоканала и внешние факторы (микроклимат, помехи), а также их совместное влияние. Цель данной статьи — разработать методический подход к повышению надежности БСС для мониторинга агрообъектов посредством многоуровневой модели, интегрирующей сетевые параметры, свойства аппаратуры и внешние воздействия.

**Материалы и методы.** Для разработки модели были применены методы системного анализа, в т.ч. анализа и синтеза ранее известных моделей и алгоритмов управления БСС для различных уровней сетевого взаимодействия. На первом этапе рассмотрены аналитические модели каждого уровня: технического состояния радиоустройств; физического канала с помехами и аппаратурными искажениями; энергопотерь узлов в канале с переменными характеристиками среды; линейной БСС с гетерогенными участками радиосвязи и кластеризации БСС. На втором этапе произведен анализ алгоритмов управления БСС: выбора режима передачи с минимальными искажениями сигналов; оптимизации структуры сигнала с минимальным BER; управления длиной пакета данных и мощностью передатчика; маршрутной балансировки энергопотерь в узлах ретрансляции, а также маршрутизации с минимальными потерями времени и энергии. На третьем этапе произведен синтез полученных результатов, представлена иерархическая инфраструктура мониторинга агропромышленного объекта, учитывающая все уровни взаимодействия БСС, параметры сенсорных узлов и влияние внешних факторов.

**Результаты исследования.** Предложен и обоснован методический многоуровневый подход к повышению надежности БСС для мониторинга агрообъектов, интегрирующий сетевые параметры, свойства аппаратуры и внешние воздействия, подтвержденный моделированием повышения энергоэффективности, снижения задержек и роста отказоустойчивости. В рамках этого разработана пятииерархическая концепция многоуровневой сетевой инфраструктуры для мониторинга агропромышленных объектов на базе БСС, интегрирующая модели и алгоритмы на уровнях: устройства, физического канала, канала передачи данных, линейного маршрута и сети. Получены одноуровневые и межуровневые зависимости, связывающие показатели эффективности, дестабилизирующие факторы и управляемые параметры.

**Обсуждение.** Представленный подход устраняет выявленный в литературе разрыв между энергетическими моделями и учетом динамических/информационных ограничений узлов, а также учитывает реальное техническое состояние модемов и термозависимость источников питания. Многоуровневая интеграция критериев (от корреляционных показателей формы сигнала до сетевых вероятностных метрик целостности БСС) позволяет согласовывать локальные оптимизации и системные цели, уменьшая риск конфликтов между уровнями. Принцип согласования уровней и внешнего дополнения обеспечивает итеративную корректировку требований и параметров, что повышает устойчивость принятия решений к неопределенности среды и гетерогенности каналов.

Ограничениями текущей работы являются: необходимость калибровки моделей под конкретные аппаратные профили, зависимость эффективности от доступных режимов PHY/MAC и протоколов ARQ, а также чувствительность к точности оценок помеховой обстановки и температурных режимов.

**Заключение.** Разработанные модели и алгоритмы на пяти уровнях обеспечивают достижение заданных показателей помехоустойчивости, времени доставки и энергопотребления при минимально необходимом задействовании ресурсов, что повышает живучесть и срок службы БСС. Предложенный подход создает основу для перехода к системно спроектированным, воспроизводимым решениям в точном земледелии, снижает ресурсные затраты и экологическую нагрузку, а также повысит устойчивость и рентабельность агропроизводства. Для масштабирования необходимы полевые испытания и публикация эталонных конфигураций и кодов для воспроизводимости.

**Ключевые слова:** беспроводная сенсорная сеть, агропромышленный объект, надежность, сетевая инфраструктура, физический канал передачи данных, искажение сигнала, алгоритмы маршрутизации

**Благодарности.** Автор выражает благодарность редакции и рецензентам за внимательное отношение к статье и указанные замечания, которые позволили повысить ее качество.

**Для цитирования.** Самойленко В.В. Концепция многоуровневой сетевой инфраструктуры мониторинга агропромышленных объектов на основе беспроводных сенсорных сетей. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):371–382. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2238>

Original Empirical Research

## Concept of a Multilevel Network Infrastructure for Monitoring Agricultural Facilities Based on Wireless Sensor Networks

Vladimir V. Samoylenko 

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, Russian Federation

✉ [samoilenko.vv@stgau.ru](mailto:samoilenko.vv@stgau.ru)

### Abstract

**Introduction.** In the context of digitalization of the agricultural sector, precision farming becomes a key driver of sustainability: wireless sensor networks (WSN) provide continuous monitoring of edaphoclimatic parameters and plant health, supporting yield forecasting and resource optimization while reducing operational risks. Despite significant progress in research on energy efficiency, routing, and topologies of WSN, the issue of their systemic reliability in real agricultural scenarios has been addressed only fragmentarily. Existing theoretical approaches rely on graph theory, Markov and quasi-deterministic models to assess connectivity and fault tolerance but do not sufficiently account for battery degradation, radio channel variability, and external factors (microclimate, interference), as well as their combined effects. The objective of this article is to develop a methodological approach to enhance the reliability of WSN for monitoring agricultural objects through a multilevel model that integrates network parameters, hardware properties, and external actions.

**Materials and Methods.** To develop the model, methods of system analysis were used, including analysis and synthesis of previously known models and algorithms for controlling the WSN for various levels of network interaction. At the first stage, analytical models of each level were examined: operating conditions of radio devices; physical channels with interference and hardware distortions; energy losses of nodes in channels with variable environmental characteristics; linear WSN with heterogeneous radio communication segments and clustering of WSN. At the second stage, an analysis of WSN control algorithms was conducted: selection of transmission modes with minimal signal distortion; optimization of signal structure with minimal Bit Error Rate (BER); control of data packet length and transmitter power; balancing of energy losses in relay nodes, as well as routing with minimal time and energy losses. At the third stage, the synthesis of the obtained results was performed, presenting a hierarchical monitoring infrastructure for the agricultural object that considered all levels of WSN interaction, parameters of sensor nodes, and the external actions.

**Results.** A methodological multilevel approach to increasing the reliability of WSN for monitoring agricultural facilities has been proposed and substantiated. This approach integrates network parameters, equipment properties, and external actions. It is validated by modeling the improvement of energy efficiency, reduction of delays, and increase in fault tolerance. Within this framework, a five-tier hierarchical concept of multilevel network infrastructure for monitoring agro-industrial objects based on WSN has been developed. It incorporates models and algorithms at the levels of: devices, physical channels, data transmission channels, linear routes, and networks. Single-level and inter-level dependences linking performance indicators, destabilizing factors, and controllable parameters have been established.

**Discussion.** The presented approach addresses the gap between energy models and the consideration of dynamic/information constraints of nodes, while also taking into account the actual operating condition of modems, and the thermal dependence of power sources. The multilevel integration of criteria (from signal shape correlation indicators to network probabilistic metrics of WSN integrity) allows for the alignment of local optimization and system goals, reducing the risk of conflicts between levels. The principle of level matching and external augmentation provides iterative adjustments of requirements and parameters, which increases the robustness of decision-making to environmental uncertainty and channel heterogeneity. Constraints of the current work include the need to calibrate models for specific hardware profiles, the dependence of efficiency on available PHY/MAC modes and ARQ protocols, and sensitivity to the accuracy of interference environment and temperature assessments.

**Conclusion.** The developed models and algorithms across five levels provide the specified metrics of interference resilience, delivery time and energy consumption with the minimum required involvement of resources, which increases the survivability and service life of the WSN. The proposed approach creates the basis for the transition to systemically designed, reproducible solutions in precision agriculture. It reduces resource costs and environmental impact, and also increases the sustainability and profitability of agricultural production. Scaling requires field testing and publication of reference configurations and codes for reproducibility.

**Keywords:** wireless sensor network, agricultural facility, reliability, network infrastructure, physical data transmission channel, signal distortion, routing algorithms

**Acknowledgements.** The author would like to thank the Editors and reviewers for their attentive attitude to the article and the comments they made, which allowed us to improve its quality.

**For Citation.** Samoylenko VV. Concept of a Multilevel Network Infrastructure for Monitoring Agricultural Facilities Based on Wireless Sensor Networks. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(4):371–382. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-4-2238>

**Введение.** Развитие сельскохозяйственной индустрии неотъемлемо связано с внедрением современных цифровых систем управления, использующих концепцию Интернета вещей (Internet of Things, IoT) [1]. Одной из ключевых технологических концепций точного земледелия являются беспроводные сенсорные сети (БСС) [2]. Применение данной технологии позволяет перейти от реактивного к прогнозному и прецизионному управлению. БСС активно используется для мониторинга сельскохозяйственных объектов, включая:

- мониторинг состояния почвы [3] (измерение влажности, температуры, уровня pH, содержания NPK (азот, фосфор, калий) и уровня засоленности) [4, 5];
- контроль микроклимата в теплицах и овощехранилищах (измерение температуры воздуха, относительной влажности, уровня освещенности, концентрации CO<sub>2</sub>) [6];
- мониторинг состояния растений, выявление заболеваний и вредителей, а также прогнозирование продуктивности (измерения индекса листовой поверхности (LAI), уровня хлорофилла и температурного стресса) [7];
- управление животноводческими предприятиями (определение местоположения животных (GPS, RFID), измерение физической активности, температуры тела и частоты сердечных сокращений) [8].

Основные преимущества цифровизации сельскохозяйственного производства включают оптимизацию расхода энергоресурсов, что позволяет снизить затраты на воду, электроэнергию, удобрения и пестициды до 20–30 % и повысить урожайность и качество продукции на 10–15 %. В рамках экологического аспекта прецизионное управление позволяет сократить выбросы парниковых газов за счет оптимизации логистики и внесения агрохимикатов. Системный подход к цифровизации агропромышленных предприятий обеспечивает удаленный мониторинг и управление, а также принятие решений на основе объективных данных.

Несмотря на достижения, проблема обеспечения надежности БСС до настоящего времени не нашла полного решения в большинстве прикладных задач, несмотря на то, что первые исследования в данной области относятся к началу 2000-х годов [9]. Общим недостатком существующих исследований надежности сетей БСС является акцент на динамических и информационных ограничениях узловых модулей, а не на их энергетическом потенциале.

Это приводит к неполному учету факторов, влияющих на надежность. Например, в работе [10], несмотря на рассмотрение модели энергопотребления и учета емкости источника питания, объем данных и энергозатраты на связь остаются без должного внимания в связи с их влиянием на межуровневые показатели функционирования БСС.

С другой стороны, завышенная оценка влияния дестабилизирующих факторов внешней среды приводит к нерациональному и избыточному потреблению энергоресурсов. Часть этих недостатков была учтена в работе [11], где оценка надёжности основана на методе иерархической базы правил доверия. Тем не менее остаётся значительное число факторов, влияющих на надёжность БСС, среди которых:

- ограниченная вычислительная мощность и ёмкость сенсорных узлов;
- невозобновляемый характер источников питания в большинстве практических приложений;
- простая архитектура и программное обеспечение узлов, не позволяющие выполнять сложные вычислительные задачи;
- уязвимость БСС к атакам вследствие использования открытых методов связи;
- размещение сенсорных узлов в сложных эксплуатационных условиях, приводящее к их преждевременному выходу из строя.

При этом во многих исследованиях не учитывается реальное техническое состояние сенсорных узлов. Технология массового производства недорогих электронных устройств не обеспечивает высокой точности и воспроизводимости их характеристик. Основной проблемой при развертывании БСС остаётся ограниченный запас энергии сенсорных узлов при отсутствии возможности подзарядки или быстрой замены элементов питания. Поэтому уже на этапе проектирования сети первостепенное значение приобретают задачи минимизации энергопотребления. Вопросы повышения энергетической эффективности узлов сенсорной сети являются приоритетными [12].

Научные исследования в области анализа времени работы узла БСС показывают, что наиболее энергозависимыми режимами работы являются режимы активной передачи трафика [13]. Связано это с работой сетевого интерфейса при приеме, передаче и ожидании данных.

Безотказность источников питания играет одну из ключевых ролей, поскольку во многих случаях их резервирование отсутствует. Отказ источника, в частности снижение его емкости, может вывести из строя локальный сенсорный узел и, как следствие, повлиять на работоспособность всей сети. Проблема усугубляется ограниченной максимальной емкостью применяемых аккумуляторных батарей и кратной разницей в стоимости более емких источников.

Для снижения энергопотребления сенсорных узлов предлагается ряд методов, в частности: подходы, направленные на экономию энергии за счет оптимизации циклов работы передатчика; способы адаптации передатчика и приемника к изменяющимся внешним условиям; методы оптимизации маршрутизации и коррекции топологии сети с учетом энергозатрат каждого узла [14]. Для выравнивания потребляемой мощности всеми узлами сети применяются различные методы энергетической балансировки. Кроме того, одним из вариантов решения указанной проблемы является оптимизация покрытия БСС, в том числе с использованием кластерных и некластерных подходов [15].

Тем не менее, в известных работах отсутствует достаточный научный задел в области многоуровневого исследования БСС, предназначенных для мониторинга агропромышленных объектов. В работе [16] представлен метод анализа локальных и глобальных состояний иерархических многокомпонентных систем в условиях неопределенности. Однако без адаптивного отслеживания границ неопределенного воздействия факторов внешней среды затруднено формирование решений по экономическому расходованию общесетевых ресурсов. Методология многоуровневого синтеза, разработанная в [17], предлагает комплекс итеративных процедур для сквозного проектирования системы — от формирования исходного облика до рабочей детализации, — однако её применимость ограничена начальными фазами жизненного цикла, включающими разработку и проектирование.

Ряд принципов и моделей принятия согласованных решений для различных уровней и стадий функционирования БСС представлен в работе [18]. Большинство этих исследований опирается на принцип вертикальной декомпозиции «сверху-вниз», согласно которому характеристики синтезируемой системы определяются при помощи многоуровневой процедуры: от общесистемной модели с соответствующими показателями, параметрами условий, ограничений и управления — до моделей нижнего уровня с их показателями и параметрами. Недостатком такого подхода является жесткость и низкая эффективность управления, поскольку процесс принятия решений не включает предварительного детального анализа ресурсного потенциала элементов нижних уровней.

Современные исследования [19] предлагают осуществлять многоуровневый синтез БСС на основе принципов согласования уровней и внешнего дополнения. Согласно первому принципу, требования, сформированные на любом уровне системы, выступают в качестве ограничений при выборе моделей и определении функциональных возможностей нижележащих уровней. При невозможности выполнения этих требований осуществляется итеративная корректировка условий и результатов моделирования на вышестоящих уровнях. Принцип внешнего дополнения предполагает получение результатов на нижнем уровне, их верификацию с использованием данных и методов вышестоящих уровней и, при необходимости, уточнение этих результатов при переходе к синтезу системы вышележащего уровня.

Несмотря на значительные преимущества использования современных цифровых технологий для интенсификации агропромышленного производства, включая снижение себестоимости продукции на 20–30 % и повышение урожайности на 10–15 %, активное внедрение таких решений сдерживается отсутствием системного подхода к технической реализации цифровой инфраструктуры. Каждое из рассмотренных в литературе решений вносит свой вклад в повышение энергоэффективности БСС, однако, в контексте поставленных в данном исследовании задач, их прямое применение затруднено или оказывается невозможным.

Проведенный литературный обзор выявил существенный пробел в научных знаниях, заключающийся в отсутствии комплексных многоуровневых моделей систем точного земледелия на платформе БСС. Такие модели должны быть ориентированы на комплексное решение проблем, связанных с исчерпанием энергетических ресурсов и ограничениями радиопередающих элементов сенсорных узлов.

Целью настоящего исследования является разработка нового методического подхода к обеспечению надежности БСС. Подход основан на создании комплексной многоуровневой модели сетевой инфраструктуры мониторинга агропромышленных объектов, учитывающей не только параметры БСС и внешние факторы, но и синергетический эффект их взаимодействия, включая структурно-энергетические, частотно-динамические и топологодинамические аспекты.

**Материалы и методы.** Для достижения цели, заключавшейся в разработке комплексной многоуровневой модели сетевой инфраструктуры мониторинга агропромышленных объектов (рис. 1), был использован системный подход. Декомпозиция иерархической модели на пять уровней составила основу исследования. Для каждого уровня ранее были разработаны специальные модели и алгоритмы, обеспечивающие синергетический эффект. Методологическая база исследования включала оригинальные результаты, полученные и опубликованные авторами. Далее представлены ключевые модели и алгоритмы, обобщенные в разработанной модели.

На уровне устройства применялась модель технического состояния объектов. В качестве критерия оценки состояния радиосредства использовался коэффициент взаимной корреляции эталонного и искаженного сигналов [20]. Этот показатель демонстрирует высокую чувствительность к типам деградации, таким как межсимвольные искажения и аддитивные шумы. Для оптимизации энергопотребления на данном уровне использовали алгоритмы выбора режима передачи с минимальными искажениями. Эти алгоритмы в реальном времени анализируют качество канала связи и динамически переключают модуляцию и мощность передатчика, обеспечивая баланс между надежностью связи и эффективным использованием ресурсов. Такой подход позволяет повысить как надежность работы устройства, так и продолжительность его автономной работы.

На уровне физического канала использовалась модель канала с помехами и аппаратурными искажениями сигнала [21]. Аналитические модели каналов связи БСС представляли собой зависимости вероятности битовой ошибки при некогерентном приеме сообщений от энергетических и стохастических параметров искаженного сигнала и аддитивной помехи на входе приемника. Эти модели обеспечивают высокую точность прогнозирования качества связи в условиях нестабильных замираний и импульсных шумов. Для данного уровня применяется алгоритм оптимизации структуры сигнала с минимальной частотой битовой ошибки (BER). Его работа основывается на адаптивном подборе длительности символа и применении скрытой помехоустойчивой кодировки, что гарантирует надежную передачу данных при сохранении общей пропускной способности канала.

На уровне канала передачи данных использовалась модель энергопотерь узлов в канале с переменными характеристиками среды [22]. Данная модель устанавливает аналитическую связь между вероятностью битовой ошибки (BER), температурой нагрева узла, глубиной замирания сигнала в канале (К-фактор Райса) и отношением сигнал/шум (SNR). Учет теплового состояния узла позволяет прогнозировать его энергопотребление и надежность в процессе работы. Для управления длиной пакета данных и мощностью передатчика применялся специализированный алгоритм, который динамически находил компромисс между необходимостью повторной передачи коротких пакетов и энергозатратами на передачу длинных, минимизируя совокупные энергопотери в условиях изменяющейся помеховой обстановки. Это существенно увеличивает время автономной работы сети без ущерба для достоверности передаваемой информации.

На уровне маршрута применялась модель линейной БСС с гетерогенными участками радиосвязи и алгоритмы маршрутной балансировки энергопотерь в узлах ретрансляции [23]. Аналитические модели потерь времени и энергии учитывают межузловые расстояния, мощности передатчиков и особенности многолучевого распространения сигналов. На основе зависимостей потерь времени от числа ретрансляторов использовались алгоритмы развертывания гетерогенной БСС с критерием минимизации задержки сети, которые не ограничивали ресурсы. Это обеспечивало гибкость планирования как для задач с избыточными, так и с ограниченными ресурсами. Алгоритмы балансировки перераспределяли нагрузку между узлами, предотвращая преждевременный выход из строя из-за истощения энергии и удлиняя общий срок службы сети. Таким образом, этот комплекс моделей и алгоритмов позволил оптимизировать ключевые показатели сети — энергоэффективность, задержку и живучесть.

На сетевом уровне использовалась модель кластеризации БСС, учитывая взаимные помехи в каналах и остаточный заряд узловых батарей, а также алгоритмы маршрутизации с минимальными потерями времени и энергии [24]. Проведенные исследования позволили сформировать достаточное количество соединений между узлами, соответствующих критериям надежности связи, нормированным в соответствии с требованиями к помехоустойчивости и своевременности передачи пакетов данных. Алгоритмы маршрутизации динамически адаптировались к изменению уровня помех и остаточной энергии узлов, выбирая путь, который обеспечивал баланс между скоростью доставки и энергозатратами. Результаты моделирования позволили реализовывать алгоритмы управления топологией и кластеризацией сети. Эти алгоритмы обеспечили самовосстановление сети при выходе из строя ключевых узлов и позволили перераспределять нагрузку для предотвращения перегрузки отдельных кластеров. Такой подход повысил отказоустойчивость и общую продолжительность жизни сети в условиях динамической помеховой обстановки.

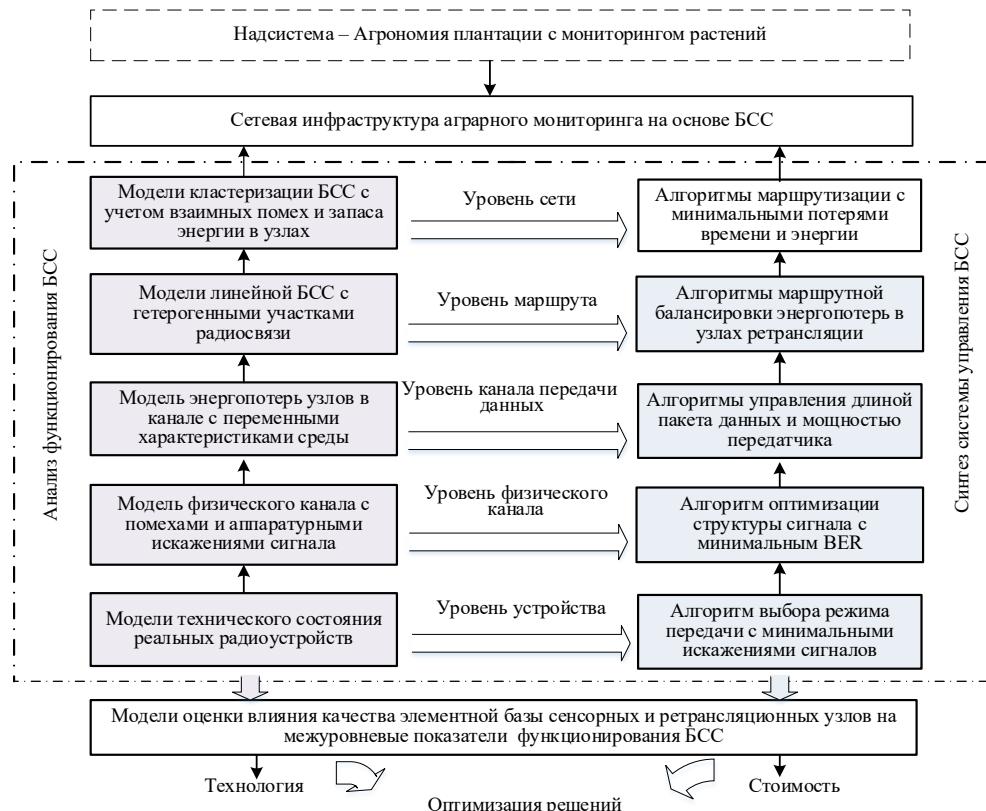


Рис. 1. Схема многоуровневой сетевой инфраструктуры мониторинга агропромышленных объектов на основе беспроводных сенсорных сетей

**Результаты исследования.** Результатом исследований стала многоуровневая сетевая инфраструктура мониторинга агропромышленных объектов. Составляющие данной системы представлены в таблице 1.

Таблица 1

Составляющие системы многоуровневого управления надежностью БСС  
с учетом различных дестабилизирующих факторов

Уровень $v$	Факторы дестабилизации $\xi^{(v)}$	Показатели качества функционирования $\varphi^{(v)}$	Управление оптимизируемыми параметрами $\omega^{(v)}$	Ограничения ресурсов $\Omega_v$	Дополнительные (предлагаемые для учета) условия $\zeta^{(v)}$
1 – устройства	Аппаратурные дефекты, искажающие сигнал	Относительный показатель степени искажения сигнала	Перераспределение энергии в полосе частот сигнала	Режимные	Радиочастотные отпечатки модемов при различных дефектах
2 – физического канала	Внешетевые помехи с переменной частотой	Вероятность битовой ошибки (BER)	Подбор фазокодовой структуры сигнала	Структурно-кодовые	Неравномерность спектров сигнала и помехи

3 – канала передачи данных	Вариативность температуры среды, многолучевость сигналов	Вероятность потери пакета (PER), частота повторной передачи. Энергопотери узла за раунд связи	Фрагментация пакетов данных. Оптимизация уровня мощности передачи	Энергетические; наличие протокола ARQ	Термозависимые разрядные характеристики батарей
4 – линейного маршрута	Гетерогенность различных участков маршрута	Сквозная задержка передаваемого пакета. Энергетический баланс узлов	Адаптивное чередование активностью узлов	Аппаратурные; динамические	Особенности распространения радиоволн
5 – сети	Взаимные помехи от соседних узлов	Количество альтернативных маршрутов передачи данных	Управление топологией и кластеризацией сети	Топологические	Топографические условия размещения узлов

На основании полученных результатов метод многоуровневого синтеза БСС определяется как итеративный процесс, заключающийся в последовательном определении параметров сигналов, функциональных и мобильных режимов сетевых узлов при учете ограниченности ресурсов каждого уровня.

Как следует из рис. 1, в данном исследовании представлены следующие уровни анализа и синтеза БСС:  $\Theta_1$  — устройства;  $\Theta_2$  — физического канала;  $\Theta_3$  — передачи данных;  $\Theta_4$  — линейного маршрута;  $\Theta_5$  — сетевой.

Каждая группа характеристик  $\Theta_v = \{\varphi^{(v)}, \xi^{(v)}, \varpi^{(v)}\}$ , где  $v = 1, 2, 3, 4, 5$ , включает следующие показатели:

1) **показатели эффективности**  $\varphi^{(v)} \in \Phi_v$ , определяющие уровень достижения целевых показателей помехозащищенности в результате применения синтезированных алгоритмов. В контексте рассматриваемой предметной области к числу таких показателей относятся:  $\varphi^{(1)}$  — коэффициенты взаимной корреляции искаженного и опорного сигналов (характеризующие степень их перекрытия в частотно-временной области);  $\varphi^{(2)}$  — вероятность битовой ошибки;  $\varphi^{(3)}$  — частота повторной передачи пакета при обнаружении искаженного бита;  $\varphi^{(4)}$  — сквозная задержка передаваемого пакета, энергетический баланс узлов на маршруте;  $\varphi^{(5)}$  — вероятность того, что время целостного состояния БСС не меньше требуемого надсистемой периода (например, периода вегетации агрокультуры);

2) **основные дестабилизирующие факторы**  $\xi^{(v)} \in \Xi_v$ , оказывающие непосредственное влияние на значения показателей  $\varphi^{(v)}$ :  $\xi^{(1)}$  — аппаратурные дефекты узлового модема, искажающие сформированный сигнал;  $\xi^{(2)}$  — помеха со спектром в пределах полосы пропускания приемника;  $\xi^{(3)}$  — изменяющаяся температура внешней среды и условия распространения радиоволн;  $\xi^{(4)}$  — неоднородность различных участков линейного маршрута;  $\xi^{(5)}$  — взаимные помехи от соседних узлов;

3) **управляемые параметры**  $\varpi^{(v)} \in \Omega_v$ , т.е. параметры алгоритмов распределения ресурсов определенного уровня, позволяющие компенсировать дестабилизирующее воздействие среды, отраженное условиями выбора:  $\varpi^{(1)}$  — вектор перераспределения энергии между ортогональными составляющими сигнала на уровне изменения режима работы модема;  $\varpi^{(2)}$  — подбор фазо-кодовой структуры сигнала с режекцией участка спектра, пораженного помехой;  $\varpi^{(3)}$  — фрагментация длины пакета либо выбор оптимальной градации мощности передатчика с целью снижения энергопотерь узла;  $\varpi^{(4)}$  — график очередности смены состояний активности узла «сон-бодрствование»;  $\varpi^{(5)}$  — матрица выбора координат очередного местоположения узлов БСС и график смены глав кластеров;

4) **ограничения на ресурсы**  $\Omega_v$  управляемых параметров:  $\Omega_1$  — виды сменяемых режимов модема;  $\Omega_2$  — номенклатура сигнально-кодовых структур;  $\Omega_3$  — форматы пакета данных, градации мощности передатчика;  $\Omega_4$  — официальные возможности управления активностью радиотракта;  $\Omega_5$  — ресурс подвижных средств и возможных мест размещения узлов БСС.

Параметры верхнего уровня, заданные выражением  $\{\varpi^{(v+1)}\}$ , являются ограничениями для нижнего уровня:

$$\Omega_v \subset \{\varpi^{(v+1)}\} \in \Omega_{v+1}. \quad (1)$$

Параметры  $\Phi_v$ ,  $\Xi_v$ ,  $\Omega_v$  являются областями допустимых значений соответствующих показателей. Модель системы радиосвязи представляет собой систему детерминированных и статистических взаимосвязей, объединяющих показатели эффективности, эксплуатационные условия и управляемые параметры всех иерархических уровней.

Выделяются следующие типы зависимостей.

**Одноуровневые зависимости**, которые устанавливают взаимосвязь между показателями эффективности  $\varphi^{(v)}$ , условиями  $\xi^{(v)}$  и параметрами выбора  $\varpi^{(v)}$  на каждом  $v$ -м уровне:

$$\varphi^{(v)} = f_v [\varpi^{(v)}, \xi^{(v)}]. \quad (2)$$

Несмотря на широкое применение данных зависимостей для решения локальных задач обеспечения помехозащищенности в пределах отдельного уровня, их использование создает существенные трудности при разработке решений по оптимальному распределению ограниченных системных ресурсов между уровнями.

**Межуровневые зависимости**, которые определяют взаимосвязь между показателями эффективности  $v$ -го и  $(v - 1)$ -го уровней, условиями  $v$ -го и  $(v + 1)$ -го уровней и параметрами выбора  $v$ -го уровня:

$$\varphi^{(v)} = f_{v, v-1, v+1} \left[ \varphi^{(v-1)} \geq \varphi_{mp}^{(v-1)}, \varpi^{(v)} \in \Omega_v \subset \{\varpi^{(v+1)}\}, \xi^{(v)} \right]. \quad (3)$$

Показатель эффективности  $\varphi^{(v-1)}$  нижележащего уровня может быть учтен при синтезе по схеме «снизу-вверх», характерной для этапа эксплуатации (включая обеспечение надежности БСС), в отличие от проектной стадии, использующей синтез «сверху-вниз» [25].

На каждом иерархическом уровне синтез объекта реализуется посредством оптимизации управляемых переменных  $\varpi^{(v)}$  в рамках установленных ограничений  $\Omega_v$ . Данные ограничения формируются значениями параметров смежного верхнего уровня  $\{\varpi^{(v+1)}\}$ . Необходимость перехода на вышестоящий уровень возникает при невозможности обеспечения требуемой энергетической надежности локальными ресурсами, что обуславливает привлечение ресурсов системы. Данное решение принимается с комплексным учетом факторов среды синтезируемого уровня, включая температурный режим и помеховую обстановку.

Следуя принятой в системном подходе процедуре математического описания сложных объектов [26], ключевым этапом моделирования является формирование системы показателей эффективности и оптимизационных критериев. Эти параметры служат основанием для синтеза оптимальных алгоритмов распределения ресурсов, обеспечивающих требуемую надежность БСС и позволяющих оценивать результативность управлеченческих решений в условиях многоуровневого внешнего воздействия. При этом выбранные показатели и критерии должны обеспечивать количественную оценку степени реализации базовых функций сетевыми узлами на всех иерархических уровнях, гарантируя достижение установленных целевых значений в соответствии с системным предназначением системы.

Критерий функционирования объекта в системе  $v$ -го уровня задает область допустимых значений показателя эффективности  $\Phi_v^*$ , где  $\varphi^{(v)} \in \Phi_v^*$ . В контексте обеспечения надежности БСС целесообразно выделение двух критериев: пригодности и оптимальности.

При ограниченных ресурсах и скалярном показателе  $\varphi^{(v)}$  критерий пригодности  $\varphi^{(v)} \geq \varphi_{\text{доп}}^{(v)}$  определяет целевую область  $\Phi_v^* = [\varphi_{\text{доп}}^{(v)}, 1]$ , где  $\varphi_{\text{доп}}^{(v)}$  — допустимое значение показателя. Это позволяет сформулировать задачу синтеза алгоритмов энергоэффективности как обратную задачу оптимизации — найти минимальные значения ресурсов  $\varpi^{(v)} \in \Omega_v$ , обеспечивающие достижение допустимых значений показателей эффективности.

Для критерия оптимальности  $\varphi^{(v)}$  →  $\max_{\varpi^{(v)} \in \Omega_v}$  область  $\Phi_v^*$  вырождается в точку, соответствующую максимальному значению  $\varphi^{(v)}$  при допустимых значениях параметров выбора  $\varpi^{(v)} \in \Omega_v$  и заданных условиях выбора. В данном контексте разработка управляющих алгоритмов сводится к решению прямой задачи оптимального распределения ресурсов.

Локальное использование анализируемых критериев не позволяет осуществить комплексный учет особенностей процессов обеспечения надежности БСС при вариациях рабочих режимов сетевых узлов. В связи с этим многоуровневый процесс управления надежностью целесообразно реализовывать на основе принципа достаточности, обеспечивающего улучшение характеристик системы при минимальных дополнительных ресурсных затратах.

Практическая реализация принципа достаточности основана на итерационном процессе выбора параметров, где миграция между иерархическими уровнями происходит при возрастании ресурсных затрат, необходимых для обеспечения заданных показателей надежности. На каждом шаге выполняется проверка достаточности вырабатываемых решений для выполнения установленных нормативов эффективности. Инструментарий для реализации данного подхода включает в себя аппарат критериев пригодности и иерархический набор моделей, обеспечивающих информационную поддержку при принятии проектных решений на всех этапах синтеза сложной системы.

К числу **дополнительных условий выбора решений**  $\zeta^{(v)}$ , учитываемых в данной работе, относятся:  $\zeta^{(1)}$  — радиочастотные отпечатки модемов при различных дефектах;  $\zeta^{(2)}$  — неравномерность спектров сигнала и помехи;  $\zeta^{(3)}$  — термозависимые разрядные характеристики батарей;  $\zeta^{(4)}$  — особенности распространения радиоволн;  $\zeta^{(5)}$  — топографические условия размещения узлов.

С учетом иерархической организации ресурсов, описываемой цепочкой вложенных множеств:

$$\dots, \varpi^{(v-1)} \in \Omega_{v-1} \subset \{\varpi^{(v)}\}, \varpi^{(v)} \in \Omega_v \subset \{\varpi^{(v+1)}\}, \varpi^{(v+1)} \in \Omega_{v+1} \subset \{\varpi^{(v+2)}\}, \dots,$$

где с ростом уровня системы наблюдается увеличение объемов и стоимости ресурсов, выбор решений по обеспечению заданной помехозащищенности предполагает первоочередное использование ресурсов нижних уровней. В этом случае общая постановка проблемы имеет следующий вид:

— на основе известных и разработанных одноуровневых и многоуровневых моделей вида (2) и (3) системы радиосвязи, учитывающих как основные условия  $\zeta^{(v)}$  — факторы дестабилизации, так и дополнительные условия  $\zeta^{(v)}$  выбора решения, определить минимальный уровень  $v^*$  исследуемой системы, на котором за счет оптимального распределения ресурса  $\varpi^{(v)} \in \Omega_v$  обеспечивается показатель качества функционирования БСС  $\phi^{(v)*}$  не ниже допустимого (требуемого) значения  $\phi_{\text{доп}}^{(v)}$ . При этом значение  $\phi_{\text{доп}}^{(v)}$  рассчитывается с учетом требуемой надежности БСС, определяемой надсистемой.

В математической постановке данная задача имеет вид:

требуется определить

$$v^* = \min \left\{ v = f^{-1} \left[ \max_{\varpi^{(v)} \in \Omega_v} \left\{ \phi^{(v)} \right\} \geq \phi_{\text{доп}}^{(v)}, \varpi^{(v)*}, \xi^{(v)}, \zeta^{(v)} \right] \right\}, \quad (4)$$

при котором

$$\begin{aligned} \varphi^{(v-1)*} &= \max_{\varpi^{(v-1)} \in \Omega_{v-1}} \left\{ \phi^{(v-1)} \left[ \varphi^{(v-2)}, \varpi^{(v-1)}, \xi^{(v-1)}, \zeta^{(v-1)} \right] \right\} < \phi_{\text{доп}}^{(v-1)}; \\ \varphi^{(v)*} &= \max_{\varpi^{(v)} \in \Omega_v} \left\{ \phi^{(v)} \left[ \varphi^{(v-1)}, \varpi^{(v)}, \xi^{(v)}, \zeta^{(v)} \right] \right\} \geq \phi_{\text{доп}}^{(v)}; \\ \varphi^{(v+1)*} &= \max_{\varpi^{(v+1)} \in \Omega_{v+1}} \left\{ \phi^{(v+1)} \left[ \varphi^{(v)}, \varpi^{(v+1)}, \xi^{(v+1)}, \zeta^{(v+1)} \right] \right\} \geq \phi_{\text{доп}}^{(v+1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Общая научная проблема решается поэтапного (в соответствии с рассматриваемыми уровнями обеспечения надежности БСС) путем последовательной проверки выполнения неравенств (5). Левая часть каждого из неравенств (5) представляет собой решение частной задачи исследования, при постановке которой используется критерий оптимальности. С учетом определенных характеристик многоуровневого представления БСС частными задачами исследования являются:

1) минимизация аппаратурных искажений формы сигнала относительно опорного сигнала:

$$\phi^{(1)} \left[ \varpi^{(1)}, \xi^{(1)}, \zeta^{(1)} \right] \rightarrow \max_{\varpi^{(1)}}, \varpi^{(1)} \in \Omega_1; \quad (6)$$

2) оптимальное распределение энергии сигнала между ортогональными составляющими с учетом вероятностного распределения частоты помехи в спектре сигнала:

$$\phi^{(2)} \left[ \varphi^{(1)}, \varpi^{(2)}, \xi^{(2)}, \zeta^{(2)} \right] \rightarrow \max_{\varpi^{(2)}}, \varphi^{(1)} \geq \phi_{\text{доп}}^{(1)}; \varpi^{(2)} \in \Omega_2; \quad (7)$$

3) оптимизация мощности передатчика и длины пакета с целью снижения энергозатрат узла за раунд связи:

$$\phi^{(3)} \left[ \varphi^{(2)}, \varpi^{(3)}, \xi^{(3)}, \zeta^{(3)} \right] \rightarrow \max_{\varpi^{(3)}}, \varphi^{(2)} \geq \phi_{\text{доп}}^{(2)}; \varpi^{(3)} \in \Omega_3; \quad (8)$$

4) оптимизация графика чередования активностью узлов в режимах «сон/бодрствование» с целью маршрутной балансировки энергопотребления:

$$\phi^{(4)} \left[ \varphi^{(3)}, \varpi^{(4)}, \xi^{(4)}, \zeta^{(4)} \right] \rightarrow \max_{\varpi^{(4)}}, \varphi^{(3)} \geq \phi_{\text{доп}}^{(3)}; \varpi^{(4)} \in \Omega_4; \quad (9)$$

5) оптимальная кластеризация сети, обеспечивающая требуемое число альтернативных маршрутов с допустимым снижением узловых энергоресурсов:

$$\phi^{(5)} \left[ \varphi^{(4)}, \varpi^{(5)}, \xi^{(5)}, \zeta^{(5)} \right] \rightarrow \max_{\varpi^{(5)}}, \varphi^{(4)} \geq \phi_{\text{доп}}^{(4)}; \varpi^{(5)} \in \Omega_5; \quad (10)$$

Как следует из выражений (6)–(10), диапазоны изменения варьируемых параметров  $\varpi^{(v)}$  ограничены ресурсными возможностями системы  $\Omega_v$  на соответствующем уровне управления  $v$ , в частности:

1) на уровне устройств — наличием режимов коррекции (предискажения) спектра формируемых сигналов для оптимального перераспределения энергии в полосе пропускания модема;

2) на физическом уровне — возможностью подбора фазо-кодовых конструкций с прямым расширением спектра для минимизации влияния помех и аппаратурных искажений на достоверность приема сообщений;

3) на уровне канала передачи данных — наличием протокола повторного запроса пакетов (ARQ) в случае выявления на приеме искаженных битов с последующей оптимизацией режима передачи;

4) на уровне маршрута — ограниченностью аппаратурного и динамического ресурсов, позволяющих обеспечивать адаптивное управление активностью узлов (в режимах сна/бодрствования);

5) на сетевом уровне — возможностью реконфигурации структуры сети при формировании кластеров и резервных маршрутов передачи данных (таблица 1).

Интеграция дополнительных условий  $\zeta^{(v)}$ , не учитывавшихся ранее в одноуровневых моделях, в процедуру оптимизации алгоритмов обеспечения надежности БСС способствует развитию методологического аппарата, подтверждает научную новизну формулировки и решения прикладных исследовательских задач.

**Обсуждение.** Проведенный аналитический анализ показал, что традиционные методологии исследования энергетической надежности беспроводных сенсорных систем часто страдают от фрагментарности, что снижает их эффективность. Основной проблемой этих подходов является игнорирование влияния технических состояний низкоуровневых узлов на выходные показатели систем верхнего уровня. В результате это снижает точность оценки и приводит к неоптимальному распределению ресурсов.

В представленной работе эта проблема решена за счёт итерационного многоуровневого подхода, основанного на принципе достаточности. Его ключевым преимуществом является поиск минимального иерархического уровня  $v$ , на котором распределение ресурсов  $\sigma(v)$  обеспечивает требуемое значение показателя качества  $\phi(v) \geq \phi_{\text{доп}}(v)$ . По сравнению с известными методами [16], применение данного подхода позволяет достигать целевых показателей надежности с минимальными ресурсными затратами.

Научная новизна работы выражается в интеграции в модель новых условий  $\zeta(v)$ , которые ранее в исследованиях не учитывались [20–24]. Это обеспечивает более корректные и практико-ориентированные алгоритмы управления, что имеет ключевое значение для повышения надежности БСС. Разработанная многоуровневая модель сетевой инфраструктуры демонстрирует, как системный подход к проектированию может улучшить управление надежностью. Она позволяет интегрировать параметры технического состояния сенсорных узлов, что в конечном итоге повышает точность прогнозирования рабочих характеристик системы и позволяет адаптировать ее работу к условиям в реальном времени.

Многоуровневая модель сетевой инфраструктуры, построенная на принципах иерархического синтеза, демонстрирует возможность согласованного учёта параметров отдельных сенсорных узлов [13] в контексте глобальных показателей функционирования сети. По сравнению с моделями, в которых состояние узлов описывается агрегированно, предложенный подход обеспечивает более детализированное и вместе с тем системное представление, что повышает точность прогнозирования рабочих характеристик и устойчивость принимаемых управляющих решений.

Разработанная методология управления надёжностью на основе принципа достаточности обеспечивает компромисс между качеством функционирования и ресурсными ограничениями. В отличие от работ, где приоритет отдается либо максимизации надёжности, либо минимизации энергопотребления, здесь предлагается механизм согласования этих критерии на каждом уровне иерархии. Это выражается, в частности, в алгоритмах маршрутизации, учитывающих остаточную энергию узлов и помеховую обстановку в канале связи. Их применение позволяет не только повысить энергоэффективность и продлить срок службы сети, но и обеспечить требуемые показатели надёжности в условиях изменяющихся внешних воздействий.

Таким образом, представленный подход формирует более целостную и практико-ориентированную основу для управления энергетической надёжностью БСС по сравнению с существующими решениями. Он сочетает детальный учёт низкоуровневых состояний с системным описанием верхнего уровня, расширяя возможности адаптации сети к реальным условиям эксплуатации и оптимизации использования ограниченных ресурсов.

**Заключение.** Несмотря на достигнутые результаты, критическое понимание границ и возможностей применяемых моделей остается актуальным. Намеченные в работе направления требуют дальнейшего исследования, включая более глубокое понимание механик взаимодействия дестабилизирующих факторов и системных откликов. Чтобы подтвердить полученные результаты и оценить их стационарность, необходимо проводить полевые испытания и проводить аналогичные исследования в различных агроклиматических условиях.

Настоящее исследование не только подтверждает необходимость применения многоуровневого подхода к управлению надежностью БСС, но и предоставляет основу для дальнейших исследований в этой области. Подробный анализ и интеграция факторов, влияющих на надежность и энергоэффективность, потенциально открывают новые горизонты для применения БСС в агропромышленности и других сферах, требующих эффективного и надежного мониторинга.

Практическая реализация может включать в себя развертывание гетерогенных БСС, в которых узлы-маршрутизаторы собирают данные с датчиков, балансируя энергопотребление на основании разработанной комплексной многоуровневой модели сетевой инфраструктуры мониторинга агропромышленных объектов. К примеру, предложенные алгоритмы могут быть использованы для построения цифровых карт полей, автоматизации полива и внесения средств защиты растений, минимизации затрат и воздействия на окружающую среду.

**Список литературы / References**

1. Mazitov AA. Web Application for Mathematical Modeling of Unsteady Oil Flow in Porous Medium. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(4):422–432. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-4-422-432>
2. Samoylenko I, Fedorenko V, Samoylenko V. Adaptive Data Relay Transmission in Wireless Sensor Networks for Reliable Crop Growth Monitoring. *Computers and Electronics in Agriculture*. 2025;234:110367. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2025.110367>
3. Hamouda F, Puig-Sirera À, Bonzi L, Remorini D, Massai R, Rallo G. Design and Validation of a Soil Moisture-Based Wireless Sensors Network for the Smart Irrigation of a Pear Orchard. *Agricultural Water Management*. 2024;305:109138. <https://doi.org/10.1016/j.agwat.2024.109138>
4. Xinqing Xiao. Sustainable Agriculture with Self-Powered Wireless Sensing. *Agriculture*. 2025;15:234. <https://doi.org/10.3390/agriculture15030234>
5. Al-Attafi MKR, Yesaulko AN, Kotova AS. Optimization of Macro- and Microelement Content in Soil for Sunflower Cultivation under Unstable Moisture Conditions of the Central Ciscaucasus Region. *Agrarian Bulletin of the North Caucasus*. 2025;15(2):74–84. <https://doi.org/10.31279/2949-4796-2025-15-2-74-84>
6. Jingxin Yu, Jiang Liu, Congcong Sun, Jiaqi Wang, Jianchao Ci, Jing Jin, et al. Sensing Technology for Greenhouse Tomato Production: A Systematic Review. *Smart Agricultural Technology*. 2025;11:101020. <https://doi.org/10.1016/j.atech.2025.101020>
7. Dinn C, Adhikari R, Hassan E, Shakshuki E, Eaman A. Developing a New IoT Network Topology for Effective Greenhouse Monitoring and Control. *Procedia Computer Science*. 2025;265:285–292. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2025.07.183>
8. Sharma B, Koundal D. Cattle Health Monitoring System Using Wireless Sensor Network: A Survey from Innovation Perspective. *IET Wireless Sensor Systems*. 2018;8(4):143–151. <https://doi.org/10.1049/iet-wss.2017.0060>
9. Sisinni E, Saifullah A, Song Han, Jennehag U, Gidlund M. Industrial Internet of Things: Challenges, Opportunities, and Directions. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*. 2018;14(11):4724–4734. <https://doi.org/10.1109/TII.2018.2852491>
10. Tsarev OYu, Tsarev YuA. Validation of Reliability Indices during Experimental Development of a Complex Technical Series System. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(1):26–33. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-1-26-33>
11. Wei He, Guan-Yu Hu, Zhi-Jie Zhou, Pei-Li Qiao, Xiao-Xia Han, Yuan-Yuan Qu, et al. A New Hierarchical Belief-Rule-Based Method for Reliability Evaluation of Wireless Sensor Network. *Microelectronics Reliability*. 2018;87:33–51. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2018.05.019>
12. Lajara R, Pelegri-Sebastiá J, Solano JJP. Power Consumption Analysis of Operating Systems for Wireless Sensor Networks. *Sensors*. 2010;10(6):5809–5826. <https://doi.org/10.3390/s100605809>
13. Lajara R, Perez-Solano JJ, Pelegri-Sebastia J. Predicting the Batteries' State of Health in Wireless Sensor Networks Applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2018;65(11):8936–8945. <https://doi.org/10.1109/TIE.2018.2808925>
14. Maltseva NS, Azhmuratova RR, Bondarenko DS. Extending the Service Life of a Wireless Sensor Network Environmental Monitoring. *Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region*. 2023;46(4):99–103. <https://doi.org/10.52684/2312-3702-2023-46-4-99-103>
15. Nam-Tuan Le, Yeong Min Jang. Energy-Efficient Coverage Guarantees Scheduling and Routing Strategy for Wireless Sensor Networks. *International Journal of Distributed Sensor Networks*. 2015;11:612383. <https://doi.org/10.1155/2015/612383>
16. Reformat MZ, Yager RR. Multi-Level State Evaluation in Complex Systems: Information Granules and Evidence Theory Approach. *Granular Computing*. 2024;9:57. <https://doi.org/10.1007/s41066-024-00477-3>
17. Volchenkov D. Mathematics of Multi-Level Complex Systems. *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. 2014;3(3):223–225. <https://doi.org/10.5890/DNC.2014.09.001>
18. Khan MA, Shalu, Naveed QN, Lasisi A, Kaushik S, Kumar S. A Multi-Layered Assessment System for Trustworthiness Enhancement and Reliability for Industrial Wireless Sensor Networks. *Wireless Personal Communications*. 2024;137:1997–2036. <https://doi.org/10.1007/s11277-024-11391-x>
19. Ojeda F, Mendez D, Fajardo A, Ellinger F. On Wireless Sensor Network Models: A Cross-Layer Systematic Review. *Journal of Sensor and Actuator Networks*. 2023;12(4):50. <https://doi.org/10.3390/jsan12040050>
20. Fedorenko V, Samoylenko V, Vinogradenko A, Samoylenko I, Sharipov I, Anikuev S. Mathematical Aspects of Stable State Estimation of the Radio Equipment in Terms of Communication Channel Functioning. In book: Vishnevskiy VM, Samouylov KE, Kozyrev DV (eds). *Distributed Computer and Communication Networks*. Cham: Springer; 2019. P. 547–59. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-36625-4\\_44](https://doi.org/10.1007/978-3-030-36625-4_44)

21. Listova NV, Fedorenko VV, Samoylenko IV, Emelyanenko IV, Samoylenko VV. The Communications Channels Models in Wireless Sensor Networks, Based on the Structural-Energetic Interaction between Signals and Interferences. In: *Proc. Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT)*. New York City: IEEE; 2018. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/MWENT.2018.8337298>
22. Fedorenko V, Samoylenko I, Samoylenko V. Fragmentation of Data Packets in Wireless Sensor Network with Variable Temperature and Channel Conditions. *Computer Communications.* 2024;214:201–214. <https://doi.org/10.1016/j.comcom.2023.12.001>
23. Fedorenko V, Oleinikov D, Samoylenko I, Samoylenko V. Criteria for the Deployment of a Heterogeneous Linear WSN: Operability vs Energy Efficiency. *Ad Hoc Networks.* 2023;147:103202. <https://doi.org/10.1016/j.adhoc.2023.103202>
24. Fedorenko VV, Samoylenko VV, Alduschenko DV, Emelyanenko IV. Methods of Modeling Wireless Sensor Networks Topology Considering Internodal Interference. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics.* 2020;(3):34–44. <https://doi.org/10.24143/2072-9502-2020-3-34-44>
25. Lei Zou, Zidong Wang, Jun Hu, Yurong Liu, Xiaohui Liu. Communication-Protocol-Based Analysis and Synthesis of Networked Systems: Progress, Prospects and Challenges. *International Journal of Systems Science.* 2021;52(14):3013–3034. <https://doi.org/10.1080/00207721.2021.1917721>
26. Buldakova T. Approaches to the Development of Complex Systems Models. In: *Proc. XXI International Conference. Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP)*. New York City: IEEE; 2019. P. 374–378. <https://doi.org/10.1109/CSCMP45713.2019.8976542>

**Об авторе:**

Владимир Валерьевич Самойленко, кандидат технических наук, доцент кафедры «Инженеринг и ИТ-решения» Ставропольского государственного аграрного университета (355000, Российская Федерация, г. Ставрополь, пер. Зоотехнический, 12), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ResearchGate](#), [ScopusID](#), [samoilenko.vv@stgau.ru](mailto:samoilenko.vv@stgau.ru)

**Конфликт интересов:** автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.**

**About the Author:**

Vladimir V. Samoylenko, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Engineering and IT-Solutions, Stavropol State Agrarian University (12, Zootechnichesky Lane, Stavropol, 355035, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ResearchGate](#), [ScopusID](#), [samoilenko.vv@stgau.ru](mailto:samoilenko.vv@stgau.ru)

**Conflict of Interest Statement:** the author declares no conflict of interest.

**The author has read and approved the final version of manuscript.**

**Поступила в редакцию / Received** 15.09.2025

**Поступила после рецензирования / Reviewed** 01.10.2025

**Принята к публикации / Accepted** 20.10.2025