



# Advanced Engineering Research

Теоретический и научно-практический журнал

Том **22**

Vol. **22**

ISSN 2687-1653 

№ **1**

no. **1**

2022

2022

1

**Механика**

**Mechanics**

2

**Машиностроение и машиноведение**

**Machine Building and Machine Science**

3

**Информатика, вычислительная техника и управление**

**Information Technology, Computer Science, and Management**

DOI 10.23947/2687-1653

[vestnik-donstu.ru](http://vestnik-donstu.ru)

# Advanced Engineering Research

Т. 22, № 1, 2022

Теоретический  
и научно-практический журнал

Издаётся с 1999 г.

Выходит 4 раза в год  
январь-март 2022 г.

ISSN 2687-1653 (online)  
DOI: 10.23947/2687-1653

*Учредитель и издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ)*

*Название журнала (до августа 2020): Вестник Донского государственного технического университета*

*Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в котором должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (Перечень ВАК) по следующим научным специальностям:*

- 01.02.01 – Теоретическая механика (технические науки)
- 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела (технические науки)
- 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)
- 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры (технические науки)
- 05.02.02 – Машиноведение системы приводов и детали машин (технические науки)
- 05.02.04 – Трение и износ в машинах (технические науки)
- 05.02.07 – Технология и оборудование механической и физико-технической обработки (технические науки)
- 05.02.08 – Технология машиностроения (технические науки)
- 05.02.10 – Сварка, родственные процессы и технологии (технические науки)
- 05.02.11 – Методы контроля и диагностика в машиностроении (технические науки)
- 05.13.11 – Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей (технические науки)
- 05.13.17 – Теоретические основы информатики (технические науки)
- 05.13.18 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (технические науки)

*Индексируется и архивируется в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ), в международной базе EBSCO (Academic Search Ultimate Magazines and Journal), Dimensions, CyberLeninka, ROAD, GoogleScholar.*

*Является членом Directory of Open Access Journals (DOAJ), Ассоциации научных редакторов и издателей (АНРИ) и CrossRef.*

*Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 78854 от 07 августа 2020 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций*

**Над номером работали:**

И. В. Бойко, Г. И. Рассохин, М. П. Смирнова (англ. версия)

**Адрес учредителя, издателя и редакции:**

344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1, тел. +7 (863) 2-738-372

E-mail: [vestnik@donstu.ru](mailto:vestnik@donstu.ru) <http://vestnik-donstu.ru/>



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

**Редакционная коллегия:**

**Главный редактор** — **Б. Ч. Месхи**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**заместитель главного редактора** — **В. П. Димитров**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**ответственный редактор** — **М. Г. Комахидзе**, кандидат химических наук, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**ответственный секретарь** — **Н. А. Шевченко**, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Сергей М. Айзикович**, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Имад Р. Антибас**, кандидат технических наук, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Ахилан Аппатурай**, младший научный сотрудник, Инженерно-технологический колледж PSN, Университет Анны Ченнаи (Индия);

**Камил С. Ахвердиев**, доктор технических наук, профессор, Ростовский государственный университет путей сообщения (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Валерий Н. Варавка**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Игорь М. Вернер**, доктор технических наук, профессор, Технологический институт в Израиле (Израиль);

**Сергей А. Воронов**, доктор технических наук, доцент, Российский фонд фундаментальных исследований (Москва, Российская Федерация);

**Николай Е. Галушкин**, доктор технических наук, профессор, Институт сферы обслуживания и предпринимательства, филиал ДГТУ (Москва, Российская Федерация);

**Лару К. Гиллеспи**, доктор технических наук, профессор, Президент Общества машиностроителей (США);

**Аньш Губерт**, доктор наук, доцент, Варшавский технологический университет (Варшава, Польша);

**Басмачи Гюльтекин**, доктор наук, профессор, Университет Бурдура Мехмета Акифа Эрсоя (Бурдур, Турция);

**Олег В. Дворников**, доктор технических наук, профессор, Белорусский государственный университет (Беларусь);

**Хамид Абдулла Джалаб**, доктор наук (информатика и ИТ), университет Малайя (Куала-Лумпур, Малайзия);

**Карен О. Егизарян**, доктор технических наук, профессор, Технологический университет Тампере (Тампере, Финляндия);

**Виктор А. Еремеев**, доктор физико-математических наук, профессор, Южный научный центр РАН (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Вилор Л. Заковоротный**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Реваз З. Кавтарадзе**, доктор технических наук, профессор, Институт механики машин им. Р. Двали (Тбилиси, Грузия);

**Януш Виталис Козубал**, доктор технических наук, профессор, Вроцлавский технический университет (Польша);

**Хосе Карлос Куадро**, доктор наук (электротехника и компьютеры), Политехнический институт Порту (Порту, Португалия);

**Илья И. Кудиш**, доктор физико-математических наук, Университет Кеттеринга (США);

**Гений В. Кузнецов**, доктор физико-математических наук, профессор, Томский политехнический университет (Томск, Российская Федерация);

**Виктор М. Курейчик**, доктор технических наук, профессор, Южный федеральный университет (Российская Федерация);

**Владимир И. Лысак**, доктор технических наук, профессор, Волгоградский государственный технический университет (Российская Федерация);

**Владимир И. Марчук**, доктор технических наук, профессор, Институт сферы обслуживания и предпринимательства, филиал ДГТУ (Российская Федерация);

**Владимир Младенович**, доктор технических наук, профессор, Крагуевацкий университет (Сербия);

**Мурман А. Мукатадзе**, доктор технических наук, доцент, Ростовский государственный университет путей сообщения (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Андрей В. Наседкин**, доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Тамаз М. Натришвили**, академик, Институт механики машин им. Р. Двали (Тбилиси, Грузия);

**Нгуен Донг Ань**, доктор физико-математических наук, профессор, Институт механики Академии наук и технологий Вьетнама (Вьетнам);

**Нгуен Суан Тьем**, доктор технических наук, Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куй Дона (Вьетнам);

**Сергей Г. Паршин**, доктор технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет (Санкт-Петербург, Российская Федерация);

**Константин В. Подмастерьев**, доктор технических наук, профессор, Орловский государственный университет им. Тургенева (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Роман Н. Поляков**, доктор технических наук, доцент, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева (Санкт-Петербург, Российская Федерация);

**Валентин Л. Попов**, доктор физико-математических наук, профессор, Институт механики Берлинского технического университета (Германия);

**Николай Н. Прокопенко**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Александр Т. Рыбак**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Музафер Сарачевич**, доктор наук, профессор, Университет Нови-Пазара (Сербия);

**Арестак А. Саруханян**, доктор технических наук, профессор, Национальный университет архитектуры и строительства Армении (Армения);

**Владимир Н. Сидоров**, доктор технических наук, Российский университет транспорта (Москва, Российская Федерация);

**Аркадий Н. Соловьёв**, доктор физико-математических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Михаил А. Тамаркин**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация);

**Мурат Тезер**, профессор, Ближневосточный университет (Турция);

**Бертрам Торстен**, доктор технических наук, профессор, Технический университет Дортмунда (Германия);

**Умид М. Турдалиев**, доктор технических наук, профессор, Андижанский машиностроительный институт (Узбекистан);

**Ахмет Уюмаз**, доктор технических наук, профессор, университет Бурдура Мехмета Акифа Эрсоя (Бурдур, Турция);

**Али М. Хасан**, доктор наук (компьютерная инженерия), доцент, Университет Аль-Нахрейн (Багдад, Ирак);

**Хучан Ляо**, профессор, научный сотрудник IAAM; Старший член Школы бизнеса IEIEE, Университет Сычуань, (Китай);

**Батыр М. Языев**, доктор технических наук, профессор, Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация).

# СОДЕРЖАНИЕ

## МЕХАНИКА

- Соловьев А. Н., До Тхань Бинь, Чебаненко В. А., Лесняк О. Н., Кириллова Е. В.* Исследование колебаний композитного магнитоэластичного биморфа в зависимости от объемных долей его компонентов на основе прикладной теории ..... 4
- Ахмедов Н. К., Юсубова С. М.* Анализ напряженно-деформированного состояния радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы с закрепленной боковой поверхностью ..... 14
- Павлов В. Д.* О неоднозначности механической мощности ..... 24
- Малыхина О. И.* Аналитическое решение приближенных уравнений движения ракеты-носителя под действием порыва ветра для расчета динамического нагружения корпуса ..... 30

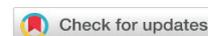
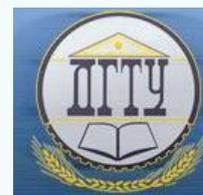
## МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

- Лебедев В. А., Аль-Обайди Луаи, Коваль Н. С.* Отделочно-зачистная обработка длинномерных деталей в винтовых роторах ..... 42
- Фоминов Е. В., Шучев К. Г., Алиев М. М.* Триботехнические свойства экспериментальных твёрдых сплавов с модифицированной кобальтовой связкой ..... 50

## ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

- Зеленский А. А., Абдулин Т. Х., Жданова М. М., Воронин В. В., Грибков А. А.* Проблема обеспечения производительности доверенных систем управления с глубинным обучением ..... 57
- Бру К. А., Смирнов И. В., Эрмани М. М.* Сравнение моделей машинного обучения для прогнозирования коронавируса (на англ. языке) ..... 67

# МЕХАНИКА MECHANICS



Научная статья



УДК 539.3

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-4-13>

## Исследование колебаний композитного магнитоэластичного биморфа в зависимости от объемных долей его компонентов на основе прикладной теории

А. Н. Соловьев<sup>1,2</sup>  ✉, До Тхань Бинь<sup>1</sup> , В. А. Чебаненко<sup>3</sup> , О. Н. Лесняк<sup>1</sup> , Е. В. Кириллова<sup>4</sup> 

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

<sup>2</sup>Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

<sup>3</sup>Федеральный исследовательский центр «Южный научный центр Российской академии наук» (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

<sup>4</sup>Рейн-Майнский университет прикладных наук (Висбаден, Федеративная Республика Германия)

✉ [solovievarc@gmail.com](mailto:solovievarc@gmail.com)

**Введение.** Исследованы поперечные колебания биморфа, состоящего из двух пьезомагнитоэлектрических слоев и находящегося в переменном магнитном поле. Пьезомагнитоэлектрические слои представляют собой многослойный композит с чередующимися пьезоэлектрическими и пьезомагнитными слоями. Механические и физические свойства такого композита задаются известными эффективными константами.

**Материалы и методы.** Прикладная теория колебаний многослойной пластины учитывает нелинейное распределение электрического и магнитного потенциала в пьезоактивных слоях в продольном и поперечном направлениях. На основе указанной теории исследованы напряженно-деформированное состояние, зависимости прогиба, электрического и магнитного потенциалов от объемного соотношения состава шарнирно опертого биморфа. Электрический потенциал принят равным нулю на всех электродах, магнитный равен нулю на внутренней границе и неизвестен на внешних. Поэтому распределение электрического и магнитного потенциалов в середине слоя — неизвестные функции. В случае магнитного потенциала распределение на внешней границе также неизвестно. В задаче были приняты гипотезы Кирхгофа для механических характеристик. Использование вариационного принципа и квадратичной зависимости электрического и магнитного потенциалов по толщине пьезоактивных слоев позволило получить систему дифференциальных уравнений и граничных условий.

**Результаты исследования.** При изменении объемного соотношения состава пьезоактивных материалов биморфа электрический потенциал в середине слоя нелинейно изменяется. Магнитный потенциал в середине слоя и на внешней границе практически линейно увеличивается с увеличением объемного процента  $BaTiO_3$ . Определена зависимость прогиба в середине слоя.

**Обсуждение и заключения.** Построена прикладная теория расчета поперечных колебаний биморфа с двумя пьезомагнитоэлектрическими слоями. Исследована зависимость характеристик напряженно-деформированного состояния, электрического и магнитного полей от объемных долей пьезомагнитного и пьезоэлектрического материалов.

**Ключевые слова:** пьезоэлектрики, пьезомагнетики, композит, биморф, магнитоэластичность, изгибные колебания.

**Для цитирования:** Исследование колебаний композитного магнитоэластичного биморфа в зависимости от объемных долей его компонентов на основе прикладной теории / А. Н. Соловьев, До Тхань Бинь, В. А. Чебаненко [и др.] // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 4–13. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-4-13>

**Финансирование.** Работа первого автора поддержана Правительством РФ (контракт № 075-15-2019-1928). Третий автор выполнял работу в рамках ГЗ ЮНЦ РАН (№ госрег. проекта ААА-А-А16-116012610052-3).

© Соловьев А. Н., До Тхань Бинь, Чебаненко В. А., Лесняк О. Н., Кириллова Е. В., 2022



Original article

## Vibration analysis of a composite magnetoelastoelectric bimorph depending on the volume fractions of its components based on applied theory

Arkadiy N. Soloviev<sup>1,2</sup>, Do Thanh Binh<sup>1</sup>, Valerii A. Chebanenko<sup>3</sup>, Olga N. Lesnyak<sup>1</sup>, Evgeniya V. Kirillova<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

<sup>2</sup>Southern Federal University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

<sup>3</sup>Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences (Rostov-on-Don, Russian Federation)

<sup>4</sup>Rhein-Main University of Applied Sciences (Wiesbaden, Germany)

✉ [solovievarc@gmail.com](mailto:solovievarc@gmail.com)

**Introduction.** Transverse vibrations of a bimorph consisting of two piezomagnetoelastoelectric layers and located in the alternating magnetic field are investigated. Piezomagnetoelastoelectric layers are multilayer composites with alternating piezoelectric and piezomagnetic layers. The mechanical and physical properties of such a composite are given by known effective constants.

**Materials and Methods.** The applied theory of multilayer plate vibrations takes into account the nonlinear distribution of electric and magnetic potential in piezoactive layers in the longitudinal and transverse directions. On the basis of this theory, the stress-strain state, the dependences of deflection, electric and magnetic potentials on the volume ratio of the composition of the hinged bimorph, are investigated. The electric potential is assumed to be zero at all electrodes, while the magnetic potential is zero at the inner boundary and unknown at the outer boundaries. Therefore, the distribution of electric and magnetic potentials in the middle of the layer are unknown functions. In the case of the magnetic potential, the distribution at the outer boundary is also unknown. In the problem, the Kirchhoff hypotheses for mechanical characteristics were accepted. The use of the variational principle and the quadratic dependence of the electric and magnetic potentials on the thickness of piezoactive layers made it possible to obtain a system of differential equations and boundary conditions.

**Results.** When the volume ratio of the composition of piezoactive bimorph materials changes, the electric potential in the middle of the layer changes nonlinearly. The magnetic potential in the middle of the layer and at the outer boundary increases almost linearly with an increase in the volume percentage of  $BaTiO_3$ . The dependence of the deflection in the middle of the layer is determined.

**Discussion and Conclusions.** An applied theory for calculating transverse vibrations of a bimorph with two piezomagnetoelastoelectric layers is constructed. The dependence of the characteristics of the stress-strain state, electric and magnetic fields on the volume fractions of piezomagnetic and piezoelectric materials, is investigated.

**Keywords:** piezoelectrics, piezomagnetics, composite, bimorph, magnetoelastoelectricity, bending vibrations.

**For citation:** Soloviev, A. N., Do Thanh Binh, Chebanenko, V. A., Lesnyak, O. N., Kirillova, E. V. Vibration analysis of a composite magnetoelastoelectric bimorph depending on the volume fractions of its components based on applied theory. *Advanced Engineering Research*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 4–13. (In Russ). <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-4-13>

**Funding information:** The work (first author) was supported by the Government of the Russian Federation (contract No. 075-15-2019-1928). The third author carried out work within the framework of the State Assignment of the Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (State Reg. Project ААА-А-А16-116012610052-3).

**Введение.** При производстве сенсорных и измерительных систем, малогабаритных бытовых приборов, сотовых телефонов и беспроводных сенсорных систем для мониторинга и диагностики технического состояния объектов не нужны мощные источники энергии. При этом обязательными условиями являются мобильность и энергонезависимость вышеперечисленных устройств.

Пьезоэлектрические материалы напрямую преобразуют электрическую энергию в механическую и обратно. Это свойство позволяет широко использовать их в науке и технике. Данные материалы задействуют в ультразвуковых излучателях упругих и акустических волн, приемниках таких волн, устройствах подавления колебаний элементов машин и конструкций и т. п. В последнее время бурно развивается еще одна область применения пьезоэлектриков — устройства сбора и накопления энергии. В этом случае пьезоэлектрические материалы входят в состав пьезоэлектрических генераторов энергии (ПЭГ). ПЭГ помещаются на элементах машин или конструкций, которые интенсивно колеблются, находятся в зоне прохождения упругих волн или подвержены действию переменного давления. Основные типы этих устройств имеют биморфную или стековую многослойную структуру и испытывают изгибные или продольные деформации соответственно. На основе ПЭГ создаются маломощные источники электрического тока. В их числе — автономные источники питания (например, для устройств мониторинга повреждений в труднодоступных местах сооружений трубопроводов и т. п.). Обзор таких устройств есть в [1–2]. Один из способов конструировать эффективные ПЭГ — использование пьезоактивных композитов различного типа связности и неоднородных материалов на основе пьезокерамики, в том числе пористой.

Фиксировать или задействовать энергию переменного магнитного поля могут ПЭГ, в конструкции которых есть дополнительные электромагнитные элементы или постоянные магниты. Один из путей решения данной задачи — использование пьезомагнитных материалов в сочетании с пьезоэлектрическими. В этом случае переменное магнитное поле приводит к деформации пьезомагнетика и связанного пьезоэлектрика, в результате последний генерирует электрическую энергию. Существует класс материалов, обладающих пьезомагнитными свойствами. Пьезомагнетизм — это явление, наблюдаемое в некоторых антиферромагнитных и ферромагнитных кристаллах. Он характеризуется линейной связью между магнитной поляризацией системы и механической деформацией. В пьезомагнитном материале можно вызвать спонтанный магнитный момент, приложив механическое напряжение, или деформацию, приложив магнитное поле. В исследованиях пьезомагнитных материалов очень часто рассматривается  $CoFe_2O_4$  [3–5]. В [6–8] исследуется композит на основе  $CoFe_2O_4$  и  $BaTiO_3$ , обладающий пьезоэлектрическими и пьезомагнитными свойствами одновременно.

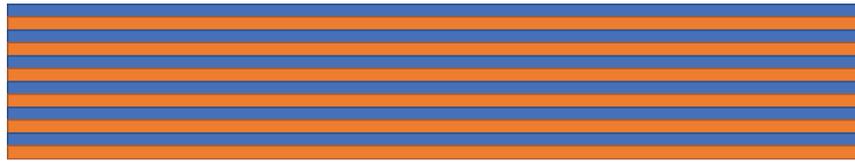
Решения задач электроупругости и магнитоупругости приведены в [9–11]. В [12] развиты прикладные теории колебаний многослойных пьезоэлектрических пластин с учетом специфики распределения электрического потенциала по толщине конструкции.

Задачи об установившихся колебаниях электромагнитоупругого слоя и полупространства под действием гармонических нагрузок представлены в [13, 14]. Учтены предварительные напряжения, а также различные электрические и магнитные условия на границах. Исследовано влияние указанных факторов на дисперсионные свойства.

Ранее [15, 16] была разработана прикладная теория, которая учитывает неоднородное распределение электрического потенциала в продольном направлении и квадратичную зависимость по толщине. В этих же работах исследовано напряженно-деформированное и электрическое состояние шарнирно опертого и консольно закрепленного биморфа. В обоих случаях прикладная теория показала хорошую сходимость с результатами конечноэлементного моделирования. Авторы также получили прикладную теорию колебаний биморфа [17], состоящего из электроупругого и магнитоупругого слоя. Этот подход хорошо согласуется с результатами конечноэлементного анализа.

В данной работе рассматриваются колебания устройства в рамках плоской деформации. На основе вариационного принципа построена прикладная теория изгибных колебаний двухслойного пьезомагнитоэлектрического биморфа. Для установившихся колебаний получены граничные условия и система дифференциальных уравнений для четырех неизвестных функций (прогиб, электрический потенциал в середине слоя, магнитный потенциал в середине слоя и на внешней границе), зависящих от длины биморфа. Исследовано влияние разных процентных объемных соотношений состава биморфа на прогиб, электрический и магнитный потенциалы в определенных положениях. Результаты исследования позволяют выбрать состав композиционного пьезомагнитоэлектрического материала для достижения наиболее эффективной работы устройства.

**Материалы и методы.** Рассматривается пластина, состоящая из двух одинаковых пьезомагнитоэлектрических слоев. Она совершает установившиеся поперечные колебания в рамках плоской деформации. Каждый слой представляет собой композит 2–2 связности, состоящий из чередующихся пьезоэлектрических и пьезомагнитных слоев (рис. 1).



— Пьезоэлектрический слой — Пьезомагнитный слой

Рис. 1. Структура композита 2–2

В [8] найдены эффективные свойства такого композита. Большие поверхности слоев электродированы, а сами слои поляризованы по толщине. Биморф шарнирно закреплен по краям, все поверхности свободны от механических напряжений. На верхнюю и нижнюю границы пластины воздействует магнитный поток  $B_0$ , в то время как на границе между слоями магнитный потенциал считается равным нулю. Электрический потенциал равен нулю на всех электродах. Боковые поверхности считаются изолированными от магнитных и электрических полей.

Уравнения для описания колебаний композита с эффективными свойствами, связностью механических, электрических и магнитных полей, имеют вид [18]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma + \rho f &= \rho \ddot{u}, & \nabla \cdot D &= \sigma_\Omega, & \nabla \cdot B &= 0, \\ \sigma &= c : \varepsilon - e^T \cdot E - h^T \cdot H, \\ D &= e : \varepsilon + \kappa \cdot E + \alpha \cdot H, \\ B &= h : \varepsilon + \alpha^T \cdot E + \mu \cdot H, \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T), \quad E = -\nabla \varphi, \quad H = -\nabla \xi. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma$  и  $\varepsilon$  — тензоры механических напряжений и деформации,  $D$  и  $E$  — векторы электрической индукции и напряженности электрического поля,  $B$  и  $H$  — векторы магнитной индукции и напряженности магнитного поля,  $\rho$  — плотность материала,  $c$  — тензор упругих модулей,  $e$  — тензор пьезоэлектрических модулей,  $h$  — тензор пьезомагнитных модулей,  $\kappa$  — тензор диэлектрических проницаемостей,  $\alpha$  — тензор пьезомагнитоэлектрических модулей,  $\mu$  — тензор магнитных проницаемостей,  $f$  — вектор плотности массовых сил,  $\sigma_\Omega$  — объемная плотность электрических зарядов,  $u$  — вектор перемещений,  $\varphi$  и  $\xi$  — электрический и магнитный потенциалы.

Граничные условия определяются для механического, электрического и магнитного поля соответственно.

Для первого случая отметим отсутствие механических напряжений на границе биморфа:

$$\sigma_{ij} \cdot n_j \Big|_S = 0, \quad i, j = 1, 3.$$

Биморф шарнирно закреплен на концах (рис. 2):

$$u_i \Big|_{(0,0)} = u_i \Big|_{(L,0)} = 0, \quad i = 1, 3.$$

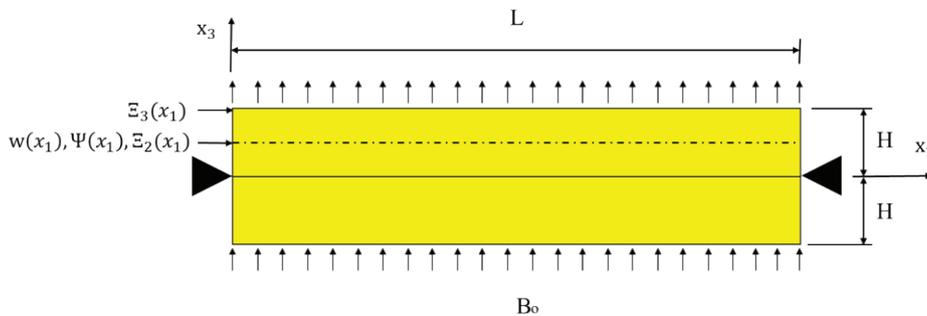


Рис. 2. Геометрия и граничные условия биморфа с композитными пьезомагнитоэлектрическими слоями

Далее сформулируем электрические граничные условия. Электрический потенциал на внутреннем и на внешнем электроде соответственно:

$$\varphi \Big|_{x_3=0} = V_0, \quad \varphi \Big|_{x_3=H} = V_2.$$

Укажем магнитные граничные условия. Магнитный потенциал на внутренней границе:

$$\xi|_{x_3=0} = M_0.$$

Магнитный поток  $B_0$  воздействует на верхнюю и нижнюю границы пластины:

$$H|_{x_3=\pm H} = B_0.$$

Воспользуемся вариационным уравнением для установившихся колебаний [10]. Оно обобщает принцип Гамильтона в теории электроупругости с учетом магнитных составляющих. Для случая плоской деформации при отсутствии поверхностных нагрузок и при наличии магнитного потока:

$$\iint_S \delta \tilde{H} dS - \rho \omega^2 \iint_S u_i \delta u_i dS + \iint_S (p_i \delta u_i + \sigma_0 \delta \varphi + B_0 \delta \xi) dS = 0, \quad (2)$$

где  $\delta \tilde{H} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i - B_i \delta H_i$ .

Для построения прикладной теории колебаний примем гипотезы Кирхгофа. В соответствии с ними распределение перемещений по толщине имеет вид:

$$u_1(x_1, x_3) = -x_3 w_{,1}, \quad u_3(x_1, x_3) = w(x_1) \quad (3)$$

В частности, для механического поля принята гипотеза единой нормали. Далее рассматривается задача, в которой значение электрического потенциала на электродах может быть равно нулю, поэтому его распределение не описывается линейной функцией. С учетом возможной неоднородности по длине элемента, связанной с влиянием граничных условий на концах биморфа, его распределение по толщине принимается квадратичным:

$$\varphi(x_1, \tilde{x}_3) = V_0(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{H} - 1 \right) + V_1(x_1) \left( 1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{H^2} \right) + V_2(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{H} + 1 \right). \quad (4)$$

Здесь  $\tilde{x}_3 = x_3 - H/2$ . Функции  $V_0, V_1$  и  $V_2$  отвечают за значение электрического потенциала на внутреннем электроде, в середине слоя и на внешнем электроде соответственно. Чтобы удовлетворить условиям задачи, примем эти функции в следующем виде (см. рис. 2):

$$V_0(x_1) = V_0 = const, \quad V_1(x_1) = \Phi(x_1), \quad V_2(x_1) = V_2 = const.$$

Здесь функция  $\Phi(x_1)$  является неизвестной.

Представим квадратичное распределение магнитного потенциала по толщине каждого слоя. Распределение по длине неоднородно, на внутренней границе слоев его значение принимается равным нулю:

$$\xi(x_1, \tilde{x}_3) = M_0(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{H} - 1 \right) + M_1(x_1) \left( 1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{H^2} \right) + M_2(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{H} + 1 \right). \quad (5)$$

Здесь  $\tilde{x}_3 = x_3 - H/2$ . Функции  $M_0, M_1$  и  $M_2$  отвечают за значение магнитного потенциала на внутренней границе, в середине слоя и на внешней границе соответственно и принимаются в следующем виде (рис. 2):

$$M_0(x_1) = M_0 = const, \quad M_1(x_1) = \Xi_2(x_1), \quad M_2(x_1) = \Xi_3(x_1).$$

Здесь функции  $\Xi_2(x_1)$  и  $\Xi_3(x_1)$  являются неизвестными.

Соотношения (3)–(5) подставим в уравнение (2) и проинтегрируем его по толщине биморфа, а затем приравняем к нулю коэффициенты при независимых вариациях  $\delta w$ ,  $\delta \Phi$ ,  $\delta \Xi_2$  и  $\delta \Xi_3$ . Тем самым мы получаем систему из четырех дифференциальных уравнений (6) от четырех неизвестных функций, зависящих от  $x_1$  (далее опустим нижний индекс), и пять граничных условий (7).

$$\begin{aligned} & \frac{16\tilde{\epsilon}_{33}}{3H} V_0 + \frac{16\tilde{\epsilon}_{33}}{3H} V_2 - \frac{32\tilde{\epsilon}_{33}}{3H} \Phi(x) - \frac{32\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Xi_2(x) + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Xi_3(x) - \frac{16\epsilon_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \\ & - \frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) - \frac{4\tilde{\epsilon}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} M_0 = 0, \\ & \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} V_0 + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} V_2 - \frac{32\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Phi(x) - \frac{32\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_2(x) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_3(x) - \frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \\ & - \frac{16\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) - \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} M_0 = 0, \\ & - \frac{2\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_0 - \frac{14\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_2 + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Phi(x) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_2(x) - \frac{14\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_3(x) - \frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \\ & - \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{4\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) + \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) - 2B_0 - \frac{2\tilde{\mu}_{33}}{3H} M_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{4\tilde{e}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) - 2p_3H - \frac{2\rho\omega^2H^3}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + 2\omega^2\rho w(x)H + \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3} \frac{d^4}{dx^4} w(x) = 0. \quad (6)$$

$$\frac{16\epsilon_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0,$$

$$\frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{16\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0,$$

$$\frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{4\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0,$$

$$\frac{\tilde{e}_{31}H}{3} V_0 - \frac{5\tilde{e}_{31}H}{3} V_2 + \frac{4\tilde{e}_{31}H}{3} \Phi(x) + \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \Xi_2(x) - \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \Xi_3(x) + \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{\tilde{h}_{31}H}{3} M_0 = 0,$$

$$-\frac{4\tilde{e}_{31}}{3} \frac{d}{dx} \Phi(x) - \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) - \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3} \frac{d^3}{dx^3} w(x) + \frac{2\rho\omega^2H^3}{3} \frac{d}{dx} w(x) = 0. \quad (7)$$

Здесь были введены следующие обозначения:  $\tilde{c}_{11} = c_{11} - c_{13}^2 / c_{33}$ ,  $\tilde{e}_{31} = e_{31} - c_{13}e_{33} / c_{33}$ ,

$\tilde{h}_{31} = h_{31} - c_{13}h_{33} / c_{33}$ ,  $\tilde{\alpha}_{33} = -\alpha_{33} - e_{33}h_{33} / c_{33}$ ,  $\tilde{e}_{33} = -e_{33} - e_{33}^2 / c_{33}$ . Они возникли после удовлетворения условию  $\sigma_{33} = 0$  и исключения  $\epsilon_{33}$ .

**Результаты исследования.** Сопоставлены результаты расчета биморфа по предложенной теории с конечноэлементным расчетом в низкочастотной области для соотношения объемных долей пьезоэлектрического и пьезомагнитного компонентов 80 %  $BaTiO_3$  и 20 %  $CoFe_2O_4$ . Сравнение показало, что погрешность в нахождении характеристик механического и магнитного полей менее 1 %. При определении электрического поля в средней части пластины разница составила порядка 5 %. Описывая ситуацию в окрестности точек опоры, следует отметить, что размер окрестности по продольной координате приблизительно равен толщине биморфа. Здесь при определении электрического поля зафиксирована разница 20 %.

Первым шагом исследования колебания двухслойного пьезомагнитоэлектрического биморфа при изменении объемного соотношения  $BaTiO_3$  и  $CoFe_2O_4$  в составе композита является определение его эффективных свойств. В таблицах 1 и 2 представлены эти свойства, найденные по результатам работы [8].

Таблица 1

Материальные константы (упругие модули, диэлектрические и магнитные проницаемости) для различной объемной доли  $BaTiO_3$

| Объемная доля $BaTiO_3$ (%) | Упругие модули |          |          |          |          | Диэлектрические проницаемости |               | Магнитные проницаемости                     |            |
|-----------------------------|----------------|----------|----------|----------|----------|-------------------------------|---------------|---|------------|
|                             | ГПа            |          |          |          |          | $10^{-9}$ Ф/м                 |               | $10^{-4}$ Н с <sup>2</sup> /Кл <sup>2</sup> |            |
|                             | $c_{11}$       | $c_{12}$ | $c_{13}$ | $c_{33}$ | $c_{44}$ | $\kappa_{11}$                 | $\kappa_{33}$ | $\mu_{11}$                                  | $\mu_{33}$ |
| 0                           | 286,0          | 173,0    | 170,0    | 269,5    | 45,30    | 0,080                         | 0,093         | 5,900                                       | 1,570      |
| 10                          | 270,9          | 160,4    | 154,9    | 260,0    | 45,07    | 1,469                         | 0,073         | 5,315                                       | 0,632      |
| 20                          | 256,6          | 148,5    | 142,6    | 250,2    | 44,84    | 2,815                         | 0,098         | 4,730                                       | 0,396      |
| 30                          | 242,8          | 137,2    | 131,3    | 240,8    | 44,61    | 4,063                         | 0,122         | 4,145                                       | 0,285      |
| 40                          | 229,9          | 126,8    | 120,9    | 231,9    | 44,38    | 5,287                         | 0,147         | 3,560                                       | 0,223      |
| 50                          | 217,6          | 116,9    | 111,0    | 224,0    | 44,15    | 6,413                         | 0,171         | 2,975                                       | 0,186      |
| 60                          | 206,7          | 108,1    | 102,1    | 215,6    | 43,92    | 7,490                         | 0,220         | 2,390                                       | 0,155      |
| 70                          | 195,9          | 99,7     | 93,8     | 208,2    | 43,69    | 8,517                         | 0,294         | 1,805                                       | 0,136      |
| 80                          | 186,0          | 92,3     | 85,9     | 201,3    | 43,46    | 9,448                         | 0,441         | 1,220                                       | 0,120      |
| 90                          | 176,6          | 85,4     | 78,9     | 193,9    | 43,23    | 10,353                        | 0,857         | 0,635                                       | 0,110      |
| 100                         | 166,0          | 77,0     | 78,0     | 162,0    | 43,00    | 11,200                        | 12,600        | 0,050                                       | 0,100      |

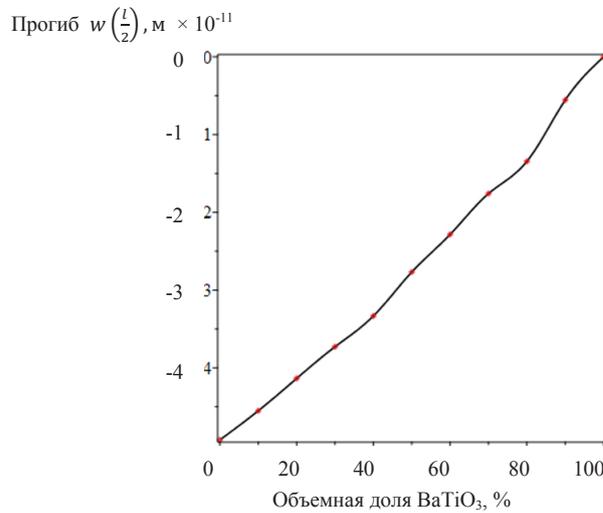
Таблица 2

Материальные константы (пьезоэлектрические, пьезомагнитные и магнитоэлектрические модули) для различной объемной доли  $BaTiO_3$

| Объемная доля $BaTiO_3$ (%) | Пьезоэлектрические модули |          |          | Пьезомагнитные модули |          |          | Магнитоэлектрические модули |                          |
|-----------------------------|---------------------------|----------|----------|-----------------------|----------|----------|-----------------------------|--------------------------|
|                             | Кл/м <sup>2</sup>         |          |          | Н/А м                 |          |          | 10 <sup>-8</sup> Нс/ВКл     | 10 <sup>-11</sup> Нс/ВКл |
|                             | $e_{31}$                  | $e_{33}$ | $e_{15}$ | $h_{31}$              | $h_{33}$ | $h_{15}$ | $\alpha_{11}$               | $\alpha_{33}$            |
| 0                           | 0                         | 0        | 0        | 580,3                 | -699,7   | 550      | 0                           | 0                        |
| 10                          | -0,006                    | 0,029    | 1,16     | 223,6                 | -244,1   | 495      | -1,33                       | 1,97                     |
| 20                          | -0,013                    | 0,059    | 2,32     | 130,0                 | -132,3   | 440      | -2,35                       | 2,36                     |
| 30                          | -0,019                    | 0,088    | 3,48     | 86,7                  | -79,8    | 385      | -3,07                       | 2,48                     |
| 40                          | -0,025                    | 0,132    | 4,64     | 61,6                  | -52,5    | 330      | -3,48                       | 2,50                     |
| 50                          | -0,031                    | 0,176    | 5,80     | 43,3                  | -34,2    | 275      | -3,62                       | 2,47                     |
| 60                          | -0,038                    | 0,220    | 6,96     | 29,7                  | -22,8    | 220      | -3,45                       | 2,43                     |
| 70                          | -0,040                    | 0,352    | 8,12     | 20,5                  | -13,7    | 165      | -3,00                       | 2,36                     |
| 80                          | -0,060                    | 0,571    | 9,28     | 13,7                  | -9,1     | 110      | -2,27                       | 2,29                     |
| 90                          | -0,263                    | 1,187    | 10,44    | 4,6                   | -4,6     | 55       | -1,28                       | 2,16                     |
| 100                         | -4,400                    | 18,600   | 11,60    | 0                     | 0        | 0        | 0                           | 0                        |

Колебания биморфа возбуждались магнитным потоком, приложенным к верхней и нижней граням (рис. 2), который изменялся по гармоническому закону с амплитудой  $B_0 = 5 \times 10^{-5}$  Вб и частотой 10 кГц.

На рис. 3 представлен прогиб в середине слоя в зависимости от объемной доли  $BaTiO_3$ . Из графика видно, что прогиб в положении, имеющем координаты  $x_1 = L/2$ ,  $x_3 = H/2$ , равен нулю, если биморф состоит только из пьезоэлектрика  $BaTiO_3$ . Прогиб биморфа достигает наибольшего значения, если в его составе только пьезомагнетик  $CoFe_2O_4$ . Прогиб практически линейно зависит от объемного соотношения составляющих пьезоактивных материалов.

Рис. 3. Прогиб  $w(x_1)$  в середине слоя для различной объемной доли  $BaTiO_3$ 

На основе данных рис. 4 можно сделать заключение, что электрический потенциал в середине слоя нелинейно изменяется при изменении объемного соотношения состава пьезоактивных материалов биморфа. Если биморф состоит только из  $BaTiO_3$  либо  $CoFe_2O_4$ , то электрический потенциал в точке  $(L/2, H/2)$  равен нулю и достигает наибольшего значения при 35 %  $BaTiO_3$  в составе биморфа.

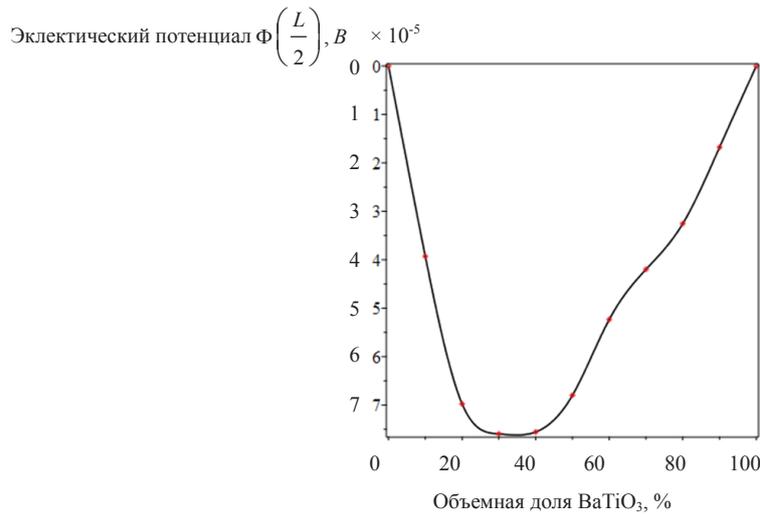


Рис. 4. Электрический потенциал  $\Psi(x_1)$  для различной объемной доли  $BaTiO_3$

Анализ рис. 5 и 6 позволяет сделать заключение, что магнитный потенциал в середине слоя  $\Xi_2(L/2)$  и на внешней границе  $\Xi_3(L/2)$  практически линейно увеличивается с ростом объема  $BaTiO_3$  в составе биморфа.

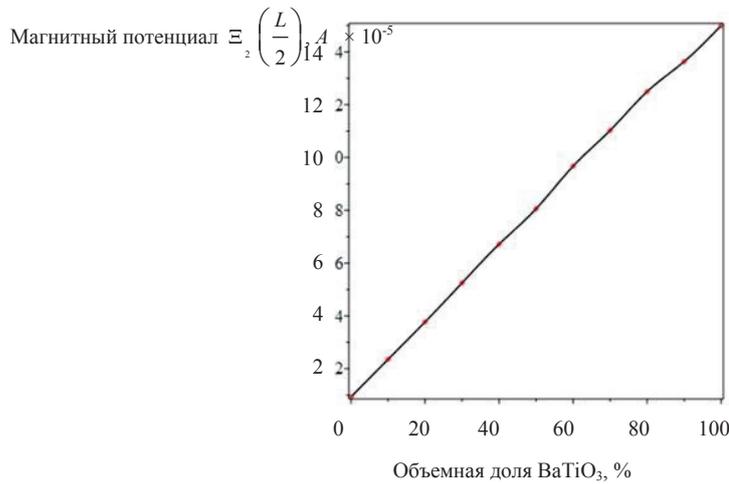


Рис. 5. Магнитный потенциал  $\Xi_2(L/2)$  для различной объемной доли  $BaTiO_3$

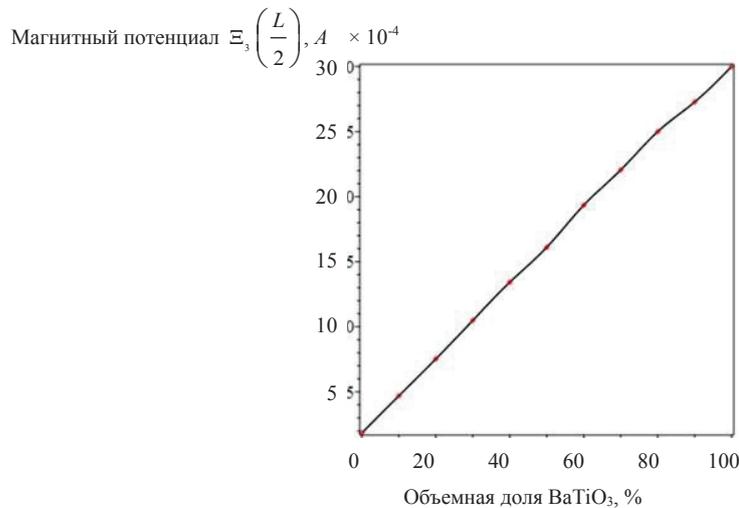


Рис. 6. Магнитный потенциал  $\Xi_3(L/2)$  для различной объемной доли  $BaTiO_3$

**Обсуждение и заключения.** Предложена прикладная теория для расчета поперечных колебаний биморфа из двух слоев композита на основе  $CoFe_2O_4$  и  $BaTiO_3$ , обладающего одновременно пьезоэлектрическими и пьезомагнитными свойствами, в переменном магнитном поле. Такая конструкция

может служить моделью пьезоэлектрического генератора устройства сбора и накопления энергии при действии внешнего магнитного поля. В низкочастотной области (ниже собственной частоты первой изгибной моды) проведены расчеты напряженно-деформированного состояния биморфа, распределения электрического и магнитного полей. Исследована зависимость прогиба, электрического и магнитного потенциалов от объемного соотношения состава биморфа. В дальнейшей работе предполагается определить выходной потенциал и мощность электрического тока, возбуждаемого переменным магнитным полем. Целью этих изысканий будет сбор электрической энергии.

#### Библиографический список

1. Gaudenzi, P. Smart structures: physical behavior, mathematical modeling and applications / Paolo Gaudenzi. — New York : John Wiley & Sons, 2009. — 194 p. <https://doi.org/10.1002/9780470682401>
2. A review of smart materials: Researches and applications / I. N. Qader, M. Kok, F. Dagdelen, Y. Aydogdu // El-Cezeri Journal of Science and Engineering. — 2019. — Vol. 6. — P. 755–788. <https://doi.org/10.31202/ecjse.562177>
3. Crafting the multiferroic BiFeO<sub>3</sub>-CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> nanocomposite for next-generation devices: A review / T. Amrillah, A. Hermawan, C. P. Wulandari [et al.] // Materials and Manufacturing Processes. — 2021. — Vol. 36. — P. 1579–1596. <https://doi.org/10.1080/10426914.2021.1945096>
4. Tunable maximum energy product in CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> nanopowder for permanent magnet application / B. Abraime, A. Mahmoud, F. Boschini [et al.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2018. — Vol. 467. — P. 129–134. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2018.07.063>
5. Size effect on the magnetic properties of CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> nanoparticles: a Monte Carlo study / R. Lamouri, O. Mounkachi, E. Salmani [et al.] // Ceramics International. — 2020. — Vol. 46. — P. 8092–8096. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2019.12.035>
6. Kim, J.-Y. Micromechanical analysis of effective properties of magneto-electro-thermo-elastic multilayer composites / Jin-Yeon Kim // International Journal of Engineering Science. — 2011. — Vol. 49. — P. 1001–1018. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.05.012>
7. Siva, K. V. Improved room temperature magnetoelectric response in CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>-BaTiO<sub>3</sub> core shell and bipolar magnetostrictive properties in CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> / K. V. Siva, P. Kaviraj, A. Arockiarajan // Materials Letters. — 2020. — Vol. 268. — Art. 127623. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2020.127623>
8. Challagulla, K. S. Micromechanical analysis of magneto-electro-thermo-elastic composite materials with applications to multilayered structures / K. S. Challagulla, A. V. Georgiades // International Journal of Engineering Science. — 2011. — Vol. 49. — P. 85–104. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2010.06.025>
9. Новацкий, В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий, В. А. Шачнев. — Москва : Мир, 1986. — 160 с.
10. Партон, В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев // Москва : Наука, 1988. — 472 с.
11. Багдасарян, Г. Е. Электромагнитоупругие волны / Г. Е. Багдасарян, З. Н. Даноян. — Ереван : Изд-во Ереванского государственного университета, 2006. — 492 с.
12. Vatulyan, A. O. Flexural vibrations of a piezoelectric bimorph with a cut internal electrode / A. O. Vatulyan, A. A. Rynkova // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2001. — Vol. 42. — P. 164–168. <https://doi.org/10.1023/A:1018837401827>
13. Levi, M. O. Some features of the dynamics of electro-magneto-elastic half-space with initial deformations / M. O. Levi, V. V. Kalinchuk // In: Proc. 2017 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics), IEEE. — 2017. — P. 262–266. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8239478>
14. Влияние граничных условий на динамику электромагнитоупругой полуограниченной среды / М. О. Леви, И. Е. Анджинович, Е. И. Ворович, И. Б. Михайлова // Вестник Южного научного центра РАН. — 2012. — Т. 8, № 4. — С. 14–19.
15. Applied theory of bending vibrations of a piezoelectric bimorph with a quadratic electric potential distribution / A. N. Soloviev, V. A. Chebanenko, I. A. Parinov, P. A. Oganessian // Materials Physics and Mechanics. — 2019. — Vol. 42. — P. 65–73. [https://doi.org/10.18720/MPM.4212019\\_7](https://doi.org/10.18720/MPM.4212019_7)
16. Исследование колебаний биморфной пластины с учетом нелинейности электрического потенциала / А. Н. Соловьев, В. А. Чебаненко, И. А. Паринов, П. А. Оганесян // Наука Юга России. — 2019. — Т. 15, № 3. — С. 3–11. <https://doi.org/10.7868/S25000640190301>
17. Applied theory of bending vibration of the piezoelectric and piezomagnetic bimorph / Do Thanh Binh, V. A. Chebanenko, Le Van Duong [et al.] // Journal of Advanced Dielectrics. — 2020. — Vol. 10. — Art. 2050007. <https://doi.org/10.1142/S2010135X20500071>

18. Finite element approach for composite magneto-piezoelectric materials modeling in ACELAN-COMPOS package / N. V. Kurbatova, D. K. Nadolin, A. V. Nasedkin [et al.] // In book: Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems. — 2018. — Vol. 81. — P. 69–88. [https://doi.org/10.1007/978-981-10-6895-9\\_5](https://doi.org/10.1007/978-981-10-6895-9_5)

Поступила в редакцию 23.12.2021

Поступила после рецензирования 20.01.2022

Принята к публикации 24.01.2022

*Об авторах*

**Соловьев Аркадий Николаевич**, заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор физико-математических наук, профессор, [ResearcherID](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), [solovievarc@gmail.com](mailto:solovievarc@gmail.com).

**До Тхань Бинь**, аспирант кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [ResearcherID](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), [dothanhbinh@mail.ru](mailto:dothanhbinh@mail.ru).

**Чебаненко Валерий Александрович**, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Южный научный центр Российской академии наук» (344010, РФ, г. Ростов-на-Дону, ул. Чехова, 41), кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, [ResearcherID](#), [ScopusID](#), [ORCID](#), [valera.chebanenko@yandex.ru](mailto:valera.chebanenko@yandex.ru).

**Лесняк Ольга Николаевна**, доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, доцент, [ORCID](#), [lesniak.olga@yandex.ru](mailto:lesniak.olga@yandex.ru).

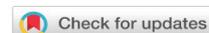
**Кириллова Евгения Вадимовна**, Рейн-майнский университет прикладных наук (65197, Германия, г. Висбаден, Курт-Шумахер-Кинг, 18), кандидат физико-математических наук, профессор, [ScopusID](#), [ORCID](#), [Evgenia.Kirillova@hs-rm.de](mailto:Evgenia.Kirillova@hs-rm.de).

*Заявленный вклад соавторов*

А. Н. Соловьев — научное руководство, постановка задачи, анализ результатов исследований. До Тхань Бинь — вывод уравнений, разработка программы расчета, проведение расчетов, анализ результатов исследований, подготовка текста. В. А. Чебаненко — выбор метода исследования, вариационная формулировка задачи, анализ результатов исследований. О. Н. Лесняк — подготовка текста, обсуждение результатов. Е. В. Кириллова — анализ результатов исследований.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

# МЕХАНИКА MECHANICS



Научная статья



УДК 539.47

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-14-23>

## Анализ напряженно-деформированного состояния радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы с закрепленной боковой поверхностью

Н. К. Ахмедов<sup>1</sup>  , С. М. Юсубова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Азербайджанский государственный экономический университет (UNEC) (Баку, Азербайджан)

<sup>2</sup>Лицей имени Гейдара Алиева (Баку, Азербайджан)

 [anatiq@gmail.com](mailto:anatiq@gmail.com)

**Введение.** В статье изучается осесимметричная задача теории упругости для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной незамкнутой сферы, не содержащей ни один из полюсов 0 и  $\pi$ . Считается, что модули упругости являются линейными функциями от радиуса сферы. Предполагается, что боковая поверхность сферы закреплена, а на конических сечениях заданы произвольные напряжения, оставляющие сферу в равновесии.

Целью данной работы является асимптотический анализ задачи теории упругости для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины и исследование на базе этого анализа трехмерного напряженно-деформированного состояния.

**Материалы и методы.** На основе уравнений теории упругости методом однородных решений и асимптотического анализа исследуется трехмерное напряженно-деформированное состояние радиально-неоднородной сферы.

**Результаты исследования.** После выполнения однородных граничных условий, заданных на боковых поверхностях сферы, получено характеристическое уравнение и произведена классификация его корней относительно малого параметра, характеризующего толщину сферы. Построены соответствующие асимптотические решения, зависящие от корней характеристического уравнения. Показано, что решения, соответствующие счетному множеству корней, имеют характер пограничного слоя, локализованного в конических срезях. Разветвление корней порождает новые решения, которые характерны только для трансверсально-изотропной радиально-неоднородной сферы. Появляется слабозатухающее погранслоинное решение, которое может проникать глубоко вдали от конических сечений и изменять картину напряженно-деформированного состояния.

**Обсуждение и заключения.** На основе построенных решений можно определить области применимости существующих прикладных теорий и предложить новую более уточненную прикладную теорию для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочки.

**Ключевые слова:** уравнения равновесия, уравнения Лежандра, радиально-неоднородная сфера, характеристическое уравнение, погранслоинные решения, вариационный принцип, прикладная теория, метод редукции.

**Для цитирования:** Ахмедов, Н. К. Анализ напряженно-деформированного состояния радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы с закрепленной боковой поверхностью / Н. К. Ахмедов, С. М. Юсубова // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 14–23. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-14-23>

© Ахмедов Н. К., Юсубова С. М., 2022



## Analysis of the stress-strain state of a radially inhomogeneous transversely isotropic sphere with a fixed side surface

Natiq K. Akhmedov<sup>1</sup>  , Sevinj M. Yusubova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Azerbaijan State University of Economics (UNEC) (Baku, Azerbaijan)

<sup>2</sup>G. Aliyev Lyceum (Baku, Azerbaijan)

 [anatiq@gmail.com](mailto:anatiq@gmail.com)

**Introduction.** The paper considers an axisymmetric problem of elasticity theory for a radially inhomogeneous transversally isotropic nonclosed sphere containing none of the 0 and  $\pi$  poles. It is believed that the elastic moduli are linear functions of the radius of the sphere. It is assumed that the side surface of the sphere is fixed, and arbitrary stresses are given on the conic sections, leaving the sphere in equilibrium. The work objective is an asymptotic analysis of the problem of elasticity theory for a radially inhomogeneous transversally isotropic sphere of small thickness, and a study of a three-dimensional stress-strain state based on this analysis.

**Materials and Methods.** The three-dimensional stress-strain state is investigated on the basis of the equations of elasticity theory by the method of homogeneous solutions and asymptotic analysis.

**Research Results.** After the homogeneous boundary conditions set on the side surfaces of the sphere are met, a characteristic equation is obtained, and its roots are classified with respect to a small parameter characterizing the thickness of the sphere. The corresponding asymptotic solutions depending on the roots of the characteristic equation are constructed. It is shown that the solutions corresponding to a countable set of roots have the character of a boundary layer localized in conic slices. The branching of the roots generates new solutions that are characteristic only for a transversally isotropic radially inhomogeneous sphere. A weakly damping boundary layer solution appears, which can penetrate deep away from the conical sections and change the picture of the stress-strain state.

**Discussion and Conclusions.** Based on the solutions constructed, it is possible to determine the applicability areas of existing applied theories and propose a new more refined applied theory for a radially inhomogeneous transversally isotropic spherical shell.

**Keywords:** equilibrium equations, Legendre equations, radially inhomogeneous sphere, characteristic equation, boundary layer solutions, variational principle, applied theory, reduction method.

**For citation:** Akhmedov N. K., Yusubova S. M. Analysis of the stress-strain state of a radially inhomogeneous transversely isotropic sphere with a fixed side surface. *Advanced Engineering Research*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 14–23. (In Russ). <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-14-23>

**Введение.** Одним из свойств материалов, влияющих на напряженно-деформированное состояние упругих тел, является их неоднородность. Изучение напряженно-деформированного состояния неоднородных тел на основе трехмерных уравнений теории упругости связано со значительными математическими трудностями.

Исследованию трехмерных задач теории упругости для сферы посвящен ряд исследований.

В работе [1] на основе уравнений теории упругости для сферы получено общее решение, удовлетворяющее граничным условиям на контуре в смысле Сен-Венана, проведен анализ напряженно-деформированного состояния сферы. В [2] на основе уравнений теории упругости для толстой изотропной сферы построены однородные решения, зависящие от корней трансцендентного уравнения. В [3] на основе решения трехмерных задач теории упругости для сферы малой толщины изучена точность существующих прикладных теорий и дан метод построения уточненных прикладных теорий. В [4] изложена трехмерная асимптотическая теория трансверсально-изотропной сферической оболочки малой толщины. В [5] приведен анализ трехмерного напряженно-деформированного состояния трехслойной сферы с мягким наполнителем. В [6] методом однородных решений изучена задача кручения для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины, когда упругие характеристики меняются линейным, квадратичным и обратно квадратичным законами по радиусу. В [7] изучена задача кручения для радиально-слоистой сферы с произвольным числом чередующихся жестких и мягких слоев. Показано существование слабозатухающих погранслоевых решений и возможное нарушение принципа Сен-Венана в его классической формулировке. Построена прикладная теория кручения радиально-слоистой сферы, адекватно учитывающая возникающие особенности. В [8] с помощью метода конечных элементов и сплайн-коллокации исследована задача теории упругости для радиально-неоднородного полого шара. Проведено сравнение результатов, полученных методами конечных элементов и сплайн-коллокации. В [9] методом асимптотического интегрирования

уравнений теории упругости изучена осесимметричная задача теории упругости для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины. Построены неоднородные и однородные решения. Установлен характер напряженно-деформированного состояния. В [10] методом однородных решений рассмотрена осесимметричная задача теории упругости для сферы малой толщины с переменными модулями упругости. Получены асимптотические формулы для перемещений и напряжений, позволяющие рассчитать трехмерное напряженно-деформированное состояние радиально-неоднородной сферы.

**Материалы и методы.** Рассматривается деформация в рамках линейной теории упругости незамкнутой сферы, материал которой является неоднородным по радиальной координате и трансверсально-изотропным. Толщина полый сферы предполагается малой, по сравнению с радиусом и размером по дуговой координате. Рассматриваются граничные условия, позволяющие решать задачу в осесимметричной постановке. Предполагаем, что сфера не содержит ни один из полюсов  $0$  и  $\pi$ . В сферической системе координат область, занятую сферой, обозначим через  $\Gamma = \{r \in [r_1; r_2], \theta \in [\theta_1; \theta_2], \phi \in [0; 2\pi]\}$ .

Рассматривается линейная зависимость упругих свойств материала по радиусу:

$$A_{11} = a_{11}^{(0)}r, \quad A_{12} = a_{12}^{(0)}r, \quad A_{22} = a_{22}^{(0)}r, \quad A_{23} = a_{23}^{(0)}r, \quad A_{44} = a_{44}^{(0)}r, \quad (1)$$

где,  $a_{11}^{(0)}, a_{12}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, a_{23}^{(0)}, a_{44}^{(0)}$  — некоторые постоянные величины.

Система уравнений равновесия при отсутствии массовых сил в сферической системе координат  $r, \theta, \phi$  имеет вид [11]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0, \quad (3)$$

где,  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{\theta\theta}$  — компоненты тензора напряжений, которые выражаются через компоненты вектора перемещений  $v_r = v_r(r, \theta), v_\theta = v_\theta(r, \theta)$  следующим образом [4]:

$$\sigma_{rr} = A_{11} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{A_{12}}{r} \left( v_\theta \operatorname{ctg} \theta + 2v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (5)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = A_{12} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ (A_{22} + A_{23})v_r + A_{22}v_\theta \operatorname{ctg} \theta + A_{23} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right], \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A_{12} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ (A_{22} + A_{23})v_r + A_{23}v_\theta \operatorname{ctg} \theta + A_{22} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right], \quad (7)$$

$$\sigma_{r\theta} = A_{44} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right). \quad (8)$$

Подставляя (5)–(8) в (2)–(3), с учетом (1) получаем уравнения равновесия в перемещениях.

$$\begin{cases} b_{11}^{(0)} \left( \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \right) + 2(2b_{12}^{(0)} - b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}) \varepsilon^2 u_\rho + (2b_{12}^{(0)} - b_{23}^{(0)} - b_{22}^{(0)} - b_{44}^{(0)}) \times \\ \times \varepsilon^2 \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta \right) + \varepsilon (b_{44}^{(0)} + b_{12}^{(0)}) \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial \rho} \right) + \varepsilon^2 b_{44}^{(0)} \left( \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) = 0, \\ b_{44}^{(0)} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - 3\varepsilon^2 u_\theta + \varepsilon \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial \theta} \right) + (3b_{44}^{(0)} + b_{22}^{(0)} + b_{23}^{(0)}) \varepsilon^2 \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \\ + \varepsilon^2 b_{22}^{(0)} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right) + \varepsilon b_{12}^{(0)} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial \theta} - \varepsilon^2 (b_{22}^{(0)} \operatorname{ctg}^2 \theta + b_{23}^{(0)}) u_\theta = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $\rho = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left( \frac{r}{r_0} \right)$  — новый безразмерный переменный;  $\varepsilon = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)$  — малый параметр, характеризующий

толщину сферы;  $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$ ;  $\rho \in [-1; 1]$ ;  $u_\rho = \frac{v_r}{r_0}, u_\theta = \frac{v_\theta}{r_0}, b_{ij}^{(0)} = \frac{a_{ij}^{(0)} r_0}{G_0}$  — безразмерные величины;  $G_0$  — некоторый параметр, имеющий размерность модуля упругости.

Предполагаем, что боковая часть границы сферы закреплена, т.е.

$$u_\rho|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (11)$$

$$u_\theta|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (12)$$

Считаем, что на торцах сферы (на конических срезax) заданы напряжения

$$\sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\theta_s} = f_{1s}(\rho), \quad \sigma_{\rho\theta}|_{\theta=\theta_s} = f_{2s}(\rho). \quad (13)$$

Здесь  $f_{1s}(\rho), f_{2s}(\rho)$  ( $s = 1; 2$ ) — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям равновесия.

Решения (9), (10) ищем в виде [3, 4]:

$$u_\rho(\rho, \theta) = a(\rho)m(\theta); \quad u_\theta(\rho, \theta) = d(\rho)m'(\theta), \quad (14)$$

где функция  $m(\theta)$  удовлетворяет уравнению Лежандра:

$$m''(\theta) + \operatorname{ctg}\theta \cdot m'(\theta) + \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)m(\theta) = 0. \quad (15)$$

После подстановки (14) в (9), (10), (11), (12) с учетом (15) получаем:

$$b_{11}^{(0)}a''(\rho) + 2\varepsilon b_{11}^{(0)}a'(\rho) + \varepsilon^2 \left[ (4b_{12}^{(0)} - 2b_{22}^{(0)} - 2b_{23}^{(0)}) - \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)b_{44}^{(0)} \right] a(\rho) - \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)\varepsilon \left[ (b_{44}^{(0)} + b_{12}^{(0)})d'(\rho) - \varepsilon(b_{44}^{(0)} + b_{22}^{(0)} + b_{23}^{(0)} - 2b_{12}^{(0)})d(\rho) \right] = 0, \quad (16)$$

$$b_{44}^{(0)}(d''(\rho) + 2\varepsilon d'(\rho)) - \varepsilon^2 \left[ \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)b_{22}^{(0)} + (b_{23}^{(0)} - b_{22}^{(0)} + 3b_{44}^{(0)}) \right] d(\rho) + \varepsilon^2 (3b_{44}^{(0)} + b_{22}^{(0)} + b_{23}^{(0)})a(\rho) + \varepsilon(b_{44}^{(0)} + b_{12}^{(0)})a'(\rho) = 0, \quad (17)$$

$$a(\rho) = 0, \quad \text{при } \rho = \pm 1. \quad (18)$$

$$d(\rho) = 0, \quad \text{при } \rho = \pm 1. \quad (19)$$

Решение системы (16), (17) имеет вид:

$$a(\rho) = e^{-\varepsilon\rho} \left[ p_1 e^{\varepsilon s_1 \rho} C_1 + p_1 e^{-\varepsilon s_1 \rho} C_2 + p_2 e^{\varepsilon s_2 \rho} C_3 + p_2 e^{-\varepsilon s_2 \rho} C_4 \right], \quad (20)$$

$$d(\rho) = e^{-\varepsilon\rho} \left[ t_1 e^{\varepsilon s_1 \rho} C_1 + q_1 e^{-\varepsilon s_1 \rho} C_2 + t_2 e^{\varepsilon s_2 \rho} C_3 + q_2 e^{-\varepsilon s_2 \rho} C_4 \right], \quad (21)$$

где  $C_n$  ( $n = \overline{1, 4}$ ) — произвольные постоянные,

$$p_k = b_{44}^{(0)} s_k^2 - \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)b_{22}^{(0)} + (b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)} - 4b_{44}^{(0)});$$

$$t_k = -(b_{44}^{(0)} + b_{12}^{(0)})s_k - (2b_{44}^{(0)} + b_{22}^{(0)} + b_{23}^{(0)} - b_{12}^{(0)});$$

$$q_k = (b_{44}^{(0)} + b_{12}^{(0)})s_k - (2b_{44}^{(0)} + b_{22}^{(0)} + b_{23}^{(0)} - b_{12}^{(0)}); \quad s_k \text{ — корни уравнения}$$

$$b_{11}^{(0)}b_{44}^{(0)}s^4 + \left[ \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)\left((b_{12}^{(0)})^2 + 2b_{44}^{(0)}b_{12}^{(0)} - b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}\right) + b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)} - 5b_{11}^{(0)}b_{44}^{(0)} + 4b_{12}^{(0)}b_{44}^{(0)} - 2b_{22}^{(0)}b_{44}^{(0)} - b_{11}^{(0)}b_{23}^{(0)} - 2b_{23}^{(0)}b_{44}^{(0)} \right] s^2 + \left[ \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)b_{44}^{(0)} - 4b_{12}^{(0)} + 2b_{22}^{(0)} + 2b_{23}^{(0)} + b_{11}^{(0)} \right] \times \times \left[ \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)b_{22}^{(0)} + b_{23}^{(0)} - b_{22}^{(0)} + 4b_{44}^{(0)} \right] - \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)(2b_{44}^{(0)} + b_{22}^{(0)} + b_{23}^{(0)} - b_{12}^{(0)})^2 = 0. \quad (22)$$

Система линейных алгебраических уравнений относительно  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , получается путем удовлетворения однородным граничным условиям (18), (19). Равенство нулю определителя этой системы является условием существования ненулевых решений и приводит к характеристическому уравнению относительно спектрального параметра  $z$ :

$$\Delta(z; \varepsilon) = (p_1 q_2 - p_2 q_1)(t_1 p_2 - t_2 p_1)sh^2(\varepsilon(s_1 + s_2)) + (p_1 t_2 - p_2 q_1)(p_1 q_2 - p_2 t_1)sh^2(\varepsilon(s_2 - s_1)) = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) имеет счетное множество корней  $z_k$ . Общее решение задачи получается путем суммирования по корням уравнения (23)

$$u_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} M_k a_k(\rho) m_k(\theta), \quad (24)$$

$$u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} M_k d_k(\rho) m'_k(\theta), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} a_k(\rho) &= e^{-\varepsilon\rho} \left[ p_1 \left( e^{\varepsilon s_1 \rho} \omega_1 - e^{-\varepsilon s_1 \rho} \omega_2 \right) + p_2 \left( e^{\varepsilon s_2 \rho} \omega_3 - e^{-\varepsilon s_2 \rho} \omega_4 \right) \right], \\ d_k(\rho) &= e^{-\varepsilon\rho} \left[ t_1 e^{\varepsilon s_1 \rho} \omega_1 - q_1 e^{-\varepsilon s_1 \rho} \omega_2 + t_2 e^{\varepsilon s_2 \rho} \omega_3 - q_2 e^{-\varepsilon s_2 \rho} \omega_4 \right], \\ \omega_1 &= p_2 q_1 (q_2 - t_2) e^{\varepsilon s_1} - t_2 (p_1 q_2 - p_2 q_1) e^{-\varepsilon(s_1 + 2s_2)} + q_2 (p_1 t_2 - p_2 q_1) e^{\varepsilon(2s_2 - s_1)}, \\ \omega_2 &= p_2 t_1 (q_2 - t_2) e^{-\varepsilon s_1} - t_2 (p_1 q_2 - p_2 t_1) e^{\varepsilon(s_1 - 2s_2)} + q_2 (p_1 t_2 - p_2 t_1) e^{\varepsilon(s_1 + 2s_2)}, \\ \omega_3 &= t_1 (p_1 q_2 - p_2 q_1) e^{-\varepsilon(2s_1 + s_2)} - q_1 (p_1 q_2 - p_2 t_1) e^{\varepsilon(2s_1 - s_2)} + p_1 q_2 (q_1 - t_1) e^{\varepsilon s_2}, \\ \omega_4 &= t_1 (p_1 t_2 - p_2 q_1) e^{\varepsilon(s_2 - 2s_1)} - q_1 (p_1 t_2 - p_2 t_1) e^{\varepsilon(2s_1 + s_2)} + p_1 t_2 (q_1 - t_1) e^{-\varepsilon s_2}. \end{aligned}$$

Множество корней уравнения (23) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  состоит из счетных множеств корней

$$z_k = \frac{\delta_{0k}}{\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (26)$$

Для  $\delta_{0k}$  имеем:

1<sup>0</sup>. При  $b_1 > 0, b_1^2 - b_2 > 0$ :

$$(s_1 - s_2) (b_{44}^{(0)} - b_{11}^{(0)} s_1 s_2) \sin((s_1 + s_2)\delta) \pm (s_1 + s_2) (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_1 s_2) \sin((s_1 - s_2)\delta) = 0, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{b_1 + \sqrt{b_1^2 - b_2}}; \quad s_2 = \sqrt{b_1 - \sqrt{b_1^2 - b_2}}; \\ b_1 &= (2b_{44}^{(0)} b_{11}^{(0)})^{-1} (2b_{44}^{(0)} b_{12}^{(0)} + (b_{12}^{(0)})^2 - b_{11}^{(0)} b_{22}^{(0)}); \quad b_2 = b_{22}^{(0)} (b_{11}^{(0)})^{-1}. \end{aligned}$$

2<sup>0</sup>. При  $b_1 > 0, b_1^2 - b_2 < 0$ :

$$\begin{aligned} \beta \left[ 2b_{11}^{(0)} \alpha^2 - (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \right] sh(2\delta\alpha) \pm \\ \pm \alpha \left[ 2b_{11}^{(0)} \beta^2 + (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \right] \sin(2\delta\beta) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{b_1 + \sqrt{b_1^2 - b_2}} = \pm(\alpha + i\beta); \\ s_2 &= \sqrt{b_1 - \sqrt{b_1^2 - b_2}} = \pm(\alpha - i\beta). \end{aligned}$$

3<sup>0</sup>. При  $b_1 > 0, b_1^2 = b_2$ :

$$(b_{11}^{(0)} s^2 - b_{44}^{(0)}) \sin(2s\delta) \pm 2(b_{11}^{(0)} s^2 + b_{44}^{(0)}) \delta s = 0, \quad (29)$$

где  $s = \sqrt{b_1}$ .

4<sup>0</sup>. При  $b_1 < 0, b_1^2 - b_2 > 0$ :

$$(s_1 - s_2) (b_{44}^{(0)} - b_{11}^{(0)} s_1 s_2) sh((s_1 + s_2)\delta) \pm (s_1 + s_2) (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_1 s_2) sh((s_1 - s_2)\delta) = 0, \quad (30)$$

где

$$s_1 = \sqrt{|b_1| - \sqrt{b_1^2 - b_2}}; \quad s_2 = \sqrt{|b_1| + \sqrt{b_1^2 - b_2}}.$$

5<sup>0</sup>. При  $b_1 < 0, b_1^2 - b_2 < 0$ :

$$\begin{aligned} \beta \left[ 2b_{11}^{(0)} \alpha^2 - (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \right] \sin(2\delta\alpha) \pm \\ \pm \alpha \left[ 2b_{11}^{(0)} \beta^2 + (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \right] sh(2\delta\beta) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$s_1 = \sqrt{|b_1| - \sqrt{b_1^2 - b_2}} = \pm(\alpha - i\beta); \quad s_2 = \sqrt{|b_1| + \sqrt{b_1^2 - b_2}} = \pm(\alpha + i\beta).$$

6<sup>0</sup>. При  $b_1 < 0, b_1^2 = b_2$ :

$$(b_{11}^{(0)} s^2 - b_{44}^{(0)}) sh(2s\delta) \pm 2(b_{11}^{(0)} s^2 + b_{44}^{(0)}) \delta s = 0, \quad (32)$$

где  $s = \sqrt{|b_1|}$ .

Уравнение (27)–(32) имеет счетное множество решений.

Приведем асимптотическое построение решений, соответствующих различным группам корней характеристического уравнения (23). Подставляя (26) в (24), (25) и, раскладывая полученные выражения по степеням  $\varepsilon$ , имеем:

1<sup>0</sup>.

$$\begin{aligned} \text{а) } u_p(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(1)} \delta_k^5 \left\{ (b_{44}^{(0)} + b_{12}^{(0)}) \left[ (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_2^2) s_1 \cos(\delta_k s_2) \sin(\delta_k s_1 \rho) - \right. \right. \\ \left. \left. - (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_1^2) s_2 \cos(\delta_k s_1) \sin(\delta_k s_2 \rho) \right] + O(\varepsilon) \right\} m_k(\theta), \end{aligned} \quad (33)$$

$$u_\theta(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(1)} \delta_k^4 \left\{ (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_1^2) (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_2^2) \left[ \cos(\delta_k s_2) \cos(\delta_k s_1 \rho) - \cos(\delta_k s_1) \cos(\delta_k s_2 \rho) \right] + O(\varepsilon) \right\} m'_k(\theta), \quad (34)$$

где  $\delta_{0k}$  являются решениями уравнения

$$(s_1 - s_2) (b_{44}^{(0)} - b_{11}^{(0)} s_1 s_2) \sin((s_1 + s_2) \delta) + (s_1 + s_2) (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_1 s_2) \sin((s_1 - s_2) \delta) = 0 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } u_p(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(2)} \delta_k^5 \left\{ (b_{44}^{(0)} + b_{12}^{(0)}) \left[ (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_2^2) s_1 \sin(\delta_k s_2) \cos(\delta_k s_1 \rho) - \right. \right. \\ \left. \left. - (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_1^2) s_2 \sin(\delta_k s_1) \cos(\delta_k s_2 \rho) \right] + O(\varepsilon) \right\} m_k(\theta), \end{aligned} \quad (36)$$

$$u_\theta(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(2)} \delta_k^4 \left\{ (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_1^2) (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_2^2) \left[ \sin(\delta_k s_1) \sin(\delta_k s_2 \rho) - \sin(\delta_k s_2) \sin(\delta_k s_1 \rho) \right] + O(\varepsilon) \right\} m'_k(\theta), \quad (37)$$

где  $\delta_{0k}$  являются решениями уравнения

$$(s_1 - s_2) (b_{44}^{(0)} - b_{11}^{(0)} s_1 s_2) \sin((s_1 + s_2) \delta) - (s_1 + s_2) (b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_1 s_2) \sin((s_1 - s_2) \delta) = 0. \quad (38)$$

2<sup>0</sup>.

$$\begin{aligned} \text{а) } u_p(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(3)} \delta_k^5 (b_{44}^{(0)} + b_{12}^{(0)}) \left\{ \left[ \beta \sin(\delta_k \beta \rho) sh(\delta_k \alpha \rho) - \alpha \cos(\delta_k \beta \rho) ch(\delta_k \alpha \rho) \right] \cdot \right. \\ \cdot \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \cos(\delta_k \beta) sh(\delta_k \alpha) + (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \sin(\delta_k \beta) ch(\delta_k \alpha) \right] - \\ \left. - \left[ \alpha \sin(\delta_k \beta \rho) sh(\delta_k \alpha \rho) + \beta \cos(\delta_k \beta \rho) ch(\delta_k \alpha \rho) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \sin(\delta_k \beta) ch(\delta_k \alpha) - (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \cos(\delta_k \beta) sh(\delta_k \alpha) \right] + O(\varepsilon) \right\} m_k(\theta), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} u_\theta(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(3)} \delta_k^4 \left\{ \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \sin(\delta_k \beta \rho) ch(\delta_k \alpha \rho) - (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \times \right. \right. \\ \times \cos(\delta_k \beta \rho) sh(\delta_k \alpha \rho) \left. \right] \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \cos(\delta_k \beta) sh(\delta_k \alpha) + (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \sin(\delta_k \beta) ch(\delta_k \alpha) \right] - \\ \left. - \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \cos(\delta_k \beta \rho) sh(\delta_k \alpha \rho) + (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \sin(\delta_k \beta \rho) ch(\delta_k \alpha \rho) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \sin(\delta_k \beta) ch(\delta_k \alpha) - (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \cos(\delta_k \beta) sh(\delta_k \alpha) \right] + O(\varepsilon) \right\} m'_k(\theta), \end{aligned} \quad (40)$$

где  $\delta_{0k}$  являются решениями уравнения

$$\beta \left[ 2b_{11}^{(0)} \alpha^2 - (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \right] sh(2\delta\alpha) + \alpha \left[ 2b_{11}^{(0)} \beta^2 + (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \right] \sin(2\delta\beta) = 0. \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } u_p(\rho; \theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(4)} \delta_k^5 (b_{44}^{(0)} + b_{12}^{(0)}) \left\{ \left[ \beta \sin(\delta_k \beta \rho) ch(\delta_k \alpha \rho) - \alpha \cos(\delta_k \beta \rho) sh(\delta_k \alpha \rho) \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \cos(\delta_k \beta) ch(\delta_k \alpha) + (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \sin(\delta_k \beta) sh(\delta_k \alpha) \right] - \\ & - \left[ \alpha \sin(\delta_k \beta \rho) ch(\delta_k \alpha \rho) + \beta \cos(\delta_k \beta \rho) sh(\delta_k \alpha \rho) \right] \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \sin(\delta_k \beta) sh(\delta_k \alpha) - \right. \\ & \left. \left. - (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \cos(\delta_k \beta) ch(\delta_k \alpha) \right] + O(\varepsilon) \right\} m_k(\theta), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} u_\theta(\rho; \theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(4)} \delta_k^4 \left\{ \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \sin(\delta_k \beta \rho) sh(\delta_k \alpha \rho) - (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \times \right. \right. \\ & \times \cos(\delta_k \beta \rho) ch(\delta_k \alpha \rho) \left. \right] \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \cos(\delta_k \beta) ch(\delta_k \alpha) + (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \sin(\delta_k \beta) sh(\delta_k \alpha) \right] - \\ & - \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \cos(\delta_k \beta \rho) ch(\delta_k \alpha \rho) + (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \sin(\delta_k \beta \rho) sh(\delta_k \alpha \rho) \right] \times \\ & \times \left[ 2\alpha \beta b_{11}^{(0)} \sin(\delta_k \beta) sh(\delta_k \alpha) - (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \cos(\delta_k \beta) ch(\delta_k \alpha) \right] + O(\varepsilon) \left. \right\} m'_k(\theta), \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\delta_{0k}$  являются решениями уравнения

$$\beta \left[ 2b_{11}^{(0)} \alpha^2 - (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \right] sh(2\delta\alpha) - \alpha \left[ 2b_{11}^{(0)} \beta^2 + (b_{11}^{(0)} (\alpha^2 - \beta^2) - b_{44}^{(0)}) \right] \sin(2\delta\beta) = 0. \quad (44)$$

3<sup>0</sup>.

$$\begin{aligned} \text{а) } u_p(\rho; \theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(5)} \left\{ (b_{11}^{(0)} s^2 + b_{44}^{(0)}) (\cos(\delta_k s) \cos(\delta_k s \rho) + \rho \sin(\delta_k s) \sin(\delta_k s \rho)) + \right. \\ & \left. + \frac{(b_{11}^{(0)} s^2 - b_{44}^{(0)})}{s \delta_k} \sin(\delta_k s) \cos(\delta_k s \rho) + O(\varepsilon) \right\} m_k(\theta), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} u_\theta(\rho; \theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(5)} \left\{ \frac{(b_{11}^{(0)} s^2 + b_{44}^{(0)})^2}{(b_{44}^{(0)} s^2 + b_{12}^{(0)}) \delta_k s} \times \right. \\ & \times (\rho \sin(\delta_k s) \cos(\delta_k s \rho) - \cos(\delta_k s) \sin(\delta_k s \rho)) + O(\varepsilon) \left. \right\} m'_k(\theta), \end{aligned} \quad (46)$$

где  $\delta_{0k}$  являются решениями уравнения

$$(b_{11}^{(0)} s^2 - b_{44}^{(0)}) \sin(2s\delta) + 2(b_{11}^{(0)} s^2 + b_{44}^{(0)}) \delta s = 0 \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } u_p(\rho; \theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(6)} \left\{ \frac{(b_{11}^{(0)} s^2 - b_{44}^{(0)})}{\delta_k s} \cos(\delta_k s) \sin(\delta_k s \rho) - (b_{11}^{(0)} s^2 + b_{44}^{(0)}) \times \right. \\ & \times (\sin(\delta_k s) \sin(\delta_k s \rho) + \rho \cos(\delta_k s) \cos(\delta_k s \rho)) + O(\varepsilon) \left. \right\} m_k(\theta) \end{aligned} \quad (48)$$

$$u_\theta(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(6)} \left\{ \frac{(b_{11}^{(0)} s^2 + b_{44}^{(0)})^2}{(b_{44}^{(0)} + b_{12}^{(0)}) \delta_k s} \times \right.$$

$$\times [\rho \cos(\delta_k s) \sin(\delta_k s \rho) - \sin(\delta_k s) \cos(\delta_k s \rho)] + O(\varepsilon) \} m'_k(\theta), \quad (49)$$

где  $\delta_{0k}$  являются решениями уравнения

$$(b_{11}^{(0)} s^2 - b_{44}^{(0)}) \sin(2s\delta) - 2(b_{11}^{(0)} s^2 + b_{44}^{(0)}) \delta s = 0 \quad (50)$$

4<sup>0</sup>. В случае  $b_1 < 0, b_1^2 - b_2 > 0$  асимптотические формулы для перемещений получаются из (33)–(38) заменой  $s_1, s_2$  на  $is_1, is_2$ .

5<sup>0</sup>. В случае  $b_1 < 0, b_1^2 - b_2 < 0$  асимптотические формулы для перемещений получаются (39)–(44) заменой  $s_1, s_2$  на  $is_1, is_2$ .

6<sup>0</sup>. В случае  $b_1 < 0, b_1^2 = b_2$  все асимптотические формулы для перемещений получаются из (45)–(50) заменой  $s$  на  $is$

Для корней (26) главный член асимптотического решения уравнения (15) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  принимает вид [9, 10]:

$$m_k(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \frac{1}{\sqrt[4]{-\delta_{0k}^2}} \exp \left[ -\varepsilon^{-1} \sqrt{-\delta_{0k}^2} (\theta - \theta_1) \right] (1 + O(\varepsilon)); & \text{в окрестности } \theta = \theta_1, \\ \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \frac{1}{\sqrt[4]{-\delta_{0k}^2}} \exp \left[ \varepsilon^{-1} \sqrt{-\delta_{0k}^2} (\theta - \theta_2) \right] (1 + O(\varepsilon)); & \text{в окрестности } \theta = \theta_2. \end{cases} \quad (51)$$

Перемещения представим в виде:

$$u_\rho(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k a_k(\rho) m_k(\theta), \quad (52)$$

$$u_\theta(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k d_k(\rho) m'_k(\theta). \quad (53)$$

Напряжения  $\sigma_{\rho\theta}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  представим в виде:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \left( \sigma_{1k}^{(1)}(\rho) m_k(\theta) + \sigma_{1k}^{(2)}(\rho) m'_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (54)$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sigma_{2k}(\rho) m'_k(\theta), \quad (55)$$

здесь

$$\sigma_{1k}^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\varepsilon} \left[ b_{12}^{(0)} a'_k(\rho) + \varepsilon (b_{22}^{(0)} + b_{23}^{(0)}) a_k(\rho) - \varepsilon b_{22}^{(0)} \left( z_k^2 - \frac{1}{4} \right) d_k(\rho) \right];$$

$$\sigma_{1k}^{(2)}(\rho) = (b_{23}^{(0)} - b_{22}^{(0)}) d_k(\rho);$$

$$\sigma_{2k}(\rho) = \frac{b_{44}^{(0)}}{\varepsilon} [d'_k(\rho) + \varepsilon (a_k(\rho) - d_k(\rho))].$$

Характер решений (33)–(50) существенно зависит от типа корней  $\delta_{0k}$ . Пограничные первые члены этих решений соответствуют краевому эффекту Сен-Венана [4]. В случае мнимых корней  $\delta_{0k}$  эти пограничные слои имеют слабое затухание. Таким образом, напряженно-деформированное состояние достаточно далеко от торцов существенно от них зависит. То есть в этом случае трансверсально-изотропные свойства неоднородного материала значительно, по сравнению изотропным материалом сферы, меняют картину напряженно-деформированного состояния. В то же время, при действительных или комплексных  $\delta_{0k}$  картина напряженно-деформированного состояния неоднородной сферы для таких материалов качественно совпадает, различаясь скоростью затухания вышеописанных пограничных решений Сен-Венана неоднородной плиты.

Из (51) получается, что при удалении от конических сечений  $\theta = \theta_j (j=1,2)$  решения (33)–(50) экспоненциально убывают.

Поскольку построенные решения удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям на боковой поверхности, вариационный принцип Лагранжа принимает следующий вид [4, 11]:

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 [(\sigma_{\theta\theta} - f_{1j}(\rho)) \delta u_\theta + (\sigma_{\rho\theta} - f_{2j}(\rho)) \delta u_\rho] \Big|_{\theta=\theta_j} e^{2\varepsilon\rho} d\rho = 0. \quad (56)$$

Подставляя (52)–(55) в (56) и считая  $\delta E_k$  независимыми вариациями, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k q_{jk} = \tau_j, \quad (j=1, 2, \dots), \quad (57)$$

здесь

$$q_{jk} = \int_{-1}^1 \sigma_{1k}^{(1)}(\rho) d_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \left( \sum_{s=1}^2 m_k(\theta_s) m'_j(\theta_s) \right) + \int_{-1}^1 \sigma_{1k}^{(2)}(\rho) d_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \times \\ \times \left( \sum_{s=1}^2 m'_k(\theta_s) m'_j(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s \right) + \int_{-1}^1 \sigma_{2k}(\rho) a_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \left( \sum_{s=1}^2 m'_k(\theta_s) m_j(\theta_s) \right), \\ \tau_j = \sum_{s=1}^2 \left[ m'_j(\theta_s) \int_{-1}^1 f_{1s}^*(\rho) d_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho + m_j(\theta_s) \int_{-1}^1 f_{2s}(\rho) a_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \right].$$

Система (57) всегда разрешима при физически осмысленных условиях, наложенных на правую часть (57). Разрешимость и сходимости метода редукции для (57) доказана в [12].

Используя малость параметра  $\varepsilon$ , можно построить асимптотические решения системы (57).

**Результаты исследований.** Проведен анализ структуры напряженно-деформированного состояния радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины при кинематических условиях на боковой поверхности. Показано, что, в случае закрепления боковой поверхности, характер решения определяется погранслоями. Оказалось, что асимптотическое разложение напряженного состояния начинается с решения описывающего краевой эффект Сен-Венана в теории трансверсально-изотропных неоднородных плит. В случае трансверсальной изотропии радиально неоднородного материала сферы некоторые погранслойные решения затухают весьма слабо, могут проникать глубоко вдали от конических сечений и изменять картину напряженно-деформированного состояния. Выведены асимптотические соотношения для перемещений и напряжений, позволяющие рассчитать трехмерное напряженно-деформированное состояние радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины с любой наперед заданной точностью. Показано, что разветвление корней порождает счетное множество новых решений для трансверсально-изотропной радиально-неоднородной сферы.

**Обсуждение и заключения.** Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния неоднородных оболочек, основанный на трехмерных уравнениях теории упругости, позволяет установить границы применения приближенных теорий. Выявленный характер поведения решения вдали от торцов для разных граничных условий на боковых поверхностях может стать основой для создания уточненных прикладных теорий расчета деформирования радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочки малой толщины. Одним из приложений проведенного асимптотического анализа может служить расчет оболочек с тонкими покрытиями, в которых возникает при этом радиальная неоднородность [13, 14].

#### Библиографический список

1. Галеркин, Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки / Б. Г. Галеркин // Прикладная математика и механика. — 1942. — Т. 6, № 6. — С. 487–496.
2. Лурье, А. И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки / А. И. Лурье // Прикладная математика и механика. — 1942. — Т. 7, № 6. — С. 393–404.
3. Виленская, Т. В. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины / Т. В. Виленская, И. И. Ворович // Прикладная математика и механика. — 1966. — Т. 30, № 2. — С. 278–295.
4. Mekhtiyev, M. F. Asymptotic analysis of spatial problems in elasticity. — Springer, 2019. — Vol. 99. — P. 241. <https://doi.org/10.1007/978-981-13-3062-9>
5. Боев, Н. В. Пространственное напряженно-деформированное состояние трехслойной сферической оболочки / Н. В. Боев, Ю. А. Устинов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1985. — № 3. — С. 136–143.
6. Ахмедов, Н. К. Асимптотическое поведение решения задачи кручения радиально-неоднородного трансверсально-изотропной сферической оболочки / Н. К. Ахмедов, Т. Б. Мамедова // Вестник Донского государственного технического университета. — 2011. — № 4. — С. 455–461.
7. Ахмедов, Н. К. Анализ структуры пограничного слоя в задаче кручения слоистой сферической оболочки / Н. К. Ахмедов, Ю. А. Устинов // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73, № 3. — С. 416–426.

8. Grigorenko, A. Ya. Analysis of the axisymmetric stress-strain state of a continuously inhomogeneous hollow sphere / A. Ya. Grigorenko, N. P. Yaremchenko, S. N. Yaremchenko // International Applied Mechanics. — 2018. — Vol. 54. — P. 577–583. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0911-1>
9. Akhmedov, N. K. Asymptotic analysis of three-dimensional problem of elasticity theory for radially inhomogeneous transversally-isotropic thin hollow spheres / N. K. Akhmedov, A.H. Sofiyev // Thin-Walled Structures. — 2019. — Vol. 139. — P. 232–241. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.03.022>
10. Akhmedov, N. K. Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric problem of elasticity theory for a sphere with variable elasticity modules / N. K. Akhmedov, N. S. Gasanova // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2020. — Vol. 25. — P. 2231–2251. <https://doi.org/10.1177/1081286520932363>
11. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. — Москва : Наука, 1970. — 939 с.
12. Устинов, Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю. А. Устинов. — Ростов-на Дону : ЦВВР, 2006. — 257 с.
13. Tolokonnikov, L.A. Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic sphere with an inhomogeneous coating / L.A. Tolokonnikov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2015. — Vol. 79. — P. 467–474. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.03.008>
14. Kiani, M. Radially inhomogeneous spherical structures; analysis of EM scattering using Taylor's series method and their potential applications / M. Kiani, A. Abdolali, M. Safari // AEU – International Journal of Electronics and Communications. — 2017. — Vol. 80. — P. 199–209.

Поступила в редакцию 12.01.2022

Поступила после рецензирования 06.02.2022

Принята к публикации 10.02.2022

**Об авторах:**

**Ахмедов Натик Каракиши**, заведующий кафедрой «Математика и статистика», Азербайджанский Государственный Экономический Университет (UNEC) (AZ 1001, Азербайджан, г. Баку, ул. Истиглалият,6), доктор математических наук, [Scopus](https://scopus.com), [ORCID](https://orcid.org/), [anatiq@gmail.com](mailto:anatiq@gmail.com)

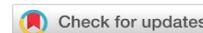
**Юсубова Севиндж Мамед**, преподаватель, Лицей имени Гейдара Алиева (AZ 1025, Азербайджан, г. Баку, ул. Н. Алиева 50), [sevinc.yusubova.75@mail.ru](mailto:sevinc.yusubova.75@mail.ru)

*Заявленный вклад соавторов:*

Ахмедов Натик Каракиши — постановка задачи, выбор метода исследования, обсуждение результатов. Юсубова Севиндж Мамед — построение асимптотического решения для задачи с кинематическими граничными условиями на боковых поверхностях, обсуждение результатов, подготовка рукописи.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

# МЕХАНИКА MECHANICS



Научная статья



УДК 534.1:629.7

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-24-29>

## О неоднозначности механической мощности

В. Д. Павлов  

Владимирский электромеханический завод (Владимир, Российская Федерация)

[✉ pavlov.val.75@mail.ru](mailto:pavlov.val.75@mail.ru)

**Введение.** Механические колебания широко распространены в технологических процессах. Приводы машин и механизмов преимущественно электромеханические, поэтому механическая реактивная мощность трансформируется в электрическую реактивную мощность сети, ухудшая качество электроэнергии. Этим обусловлены важность учета механической реактивной мощности и, как следствие, актуальность представленной работы. Цель исследования — детализация видов механической мощности при гармонических колебаниях.

**Материалы и методы.** Изучена литература, в которой освещаются вопросы динамики, кинематики, вибраций, преобразования движения в колебательных системах и т. п. Используются теоретические, преимущественно математические методы исследования.

**Результаты исследования.** Математически осмыслены мощности, развиваемые при упругих деформациях, вынужденных гармонических колебаниях инертного тела и колебаниях, связанных с гравитационным воздействием, а также реактивная, активная, полная мощности в комплексном представлении и механические мощности в векторном представлении.

**Обсуждение и заключения.** При механических гармонических колебаниях наряду со знакоположительной тепловой мощностью, развиваются знакопеременные реактивные мощности, характеризующие обратимость кинетической и потенциальной энергий. Полная механическая мощность удовлетворяет формуле Пифагора. Представление о механических реактивных, активной и полной мощностях обобщает соответствующие понятия о мощностях из электротехники, и таким образом проявляется электромеханический дуализм.

**Ключевые слова:** механическая мощность, кинетическая энергия, потенциальная энергия, комплексное представление, векторное представление.

**Для цитирования:** Павлов, В. Д. О неоднозначности механической мощности / В. Д. Павлов // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 24–29. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-24-29>

© Павлов В. Д., 2022



Original article

## On the ambiguity of mechanical power

Valentin D. Pavlov  

Vladimir Electromechanical Plant (Vladimir, Russian Federation)

[✉ pavlov.val.75@mail.ru](mailto:pavlov.val.75@mail.ru)

**Introduction.** Mechanical vibrations are widespread in the production processes. The drives of machines and mechanisms are mainly electromechanical, so mechanical reactive power is transformed into electrical reactive power of the network, impairing the quality of electricity. This explains the significance of considering the mechanical reactive power, and, as a consequence, the urgency of the presented study. The research objective is to detail the types of mechanical power under harmonic vibrations.

**Materials and Methods.** The literature on the issues of dynamics, kinematics, vibrations, transformation of motion in oscillatory systems, etc., has been studied. Theoretical, mainly mathematical methods of research are used.

**Results.** The powers developed under elastic deformations, forced harmonic vibrations of an inert body, and vibrations associated with gravitational influence, as well as reactive, active, full powers in the complex formulation, and mechanical powers in the vector representation are mathematically interpreted.

**Discussion and Conclusions.** Under the mechanical harmonic vibrations, along with the sign-positive thermal power, sign-variable reactive powers develop, characterizing the reversibility of kinetic and potential energies. The total mechanical power satisfies the Pythagorean formula. The concept of mechanical reactive, active, and total powers generalizes the corresponding concepts of power from electrical engineering, and thus manifesting electromechanical dualism.

**Keywords:** mechanical power, kinetic energy, potential energy, complex formulation, vector representation.

**For citation:** Pavlov V. D. On the ambiguity of mechanical power. *Advanced Engineering Research*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 24–29. (In Russ). <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-24-29>

**Введение.** Механическая энергия бывает обратимой (потенциальная и кинетическая), а также необратимой (например, тепловая при трении). Временную производную от последней принимают за механическую мощность. Отметим, что в силу необратимости тепловой энергии ее производная принимает только положительные значения. Вместе с тем производные получают как от потенциальной, так и от кинетической энергии. Особый интерес представляют гармонические колебания [1–4], при которых производные (мгновенные мощности) будут знакопеременными функциями, что принципиально отличает их от тепловой мощности.

Аналог кинетической энергии в электротехнике — энергия магнитного поля катушки индуктивности, аналог потенциальной энергии — энергия электрического поля конденсатора, а аналог механической тепловой энергии — тепловая же энергия, рассеиваемая резистором.

Механические колебания широко распространены в разнообразных технологических процессах [5–8]. Приводы машин и механизмов преимущественно электромеханические [9–12], поэтому механическая реактивная мощность трансформируется в электрическую реактивную мощность сети, ухудшая качество электроэнергии [13]. В этой связи учет механической реактивной мощности имеет немаловажное значение [14], и этим обусловлена актуальность представленной работы.

**Материалы и методы.** Рассмотрены механические мощности при гармонических колебаниях. В качестве литературной базы изучены отечественные и зарубежные источники, в которых освещаются вопросы динамики, кинематики, вибраций, преобразования движения в колебательных системах и т. п. Используются теоретические (преимущественно математические) методы исследования.

#### Результаты исследования

**Мощность, развиваемая при вынужденных гармонических колебаниях инертного тела.** Движение тела описывается известным выражением:

$$x = l \sin \omega t .$$

Соответственно, скорость:

$$v = \dot{x} = l\omega \cos \omega t = V_m \cos \omega t .$$

Для гармонической величины действующее значение меньше амплитудного в  $\sqrt{2}$ :

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\omega}{\sqrt{2}} . \quad (1)$$

Формула для силы имеет вид:

$$f_a = m\ddot{x} = -lm\omega^2 \sin \omega t . \quad (2)$$

Формула для силы трения:

$$f_\mu = \mu\dot{x} = \mu l\omega \cos \omega t . \quad (3)$$

Результирующая сила:

$$\begin{aligned} f &= f_a + f_\mu = -lm\omega^2 \sin \omega t + \mu l\omega \cos \omega t = \\ &= l\omega \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} \left( \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} \cos \omega t - \frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} \sin \omega t \right) . \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\varphi = \arctg \frac{m\omega}{\mu} . \quad (4)$$

С учетом этого:

$$f = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2} (\cos\varphi \cos\omega t - \sin\varphi \sin\omega t) = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2} \cos(\omega t + \varphi).$$

Очевидно, что

$$F_m = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}.$$

Действующее значение результирующей силы:

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Мгновенная результирующая мощность:

$$\begin{aligned} s &= fv = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2} \cos(\omega t + \varphi) l\omega \cos\omega t = \\ &= 0,5l^2\omega^2 \sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2} [\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)] = \\ &= FV [\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)] = \\ &= FV (\cos\varphi + \cos 2\omega t \cos\varphi - \sin 2\omega t \sin\varphi) = \\ &= FV \cos\varphi (1 + \cos 2\omega t) - FV \sin\varphi \sin 2\omega t = p + q_i. \end{aligned} \quad (6)$$

В электротехнике есть выражение, аналогичное (6), с заменами  $F \rightarrow U$ ,  $V \rightarrow I$ . Из него определяют активную мощность:

$$P = UI \cos\varphi.$$

Поэтому активную (тепловую) механическую мощность тоже следует определить, как:

$$P = FV \cos\varphi. \quad (7)$$

Очевидно, что гармонические сила и скорость совершают колебания со сдвигом фаз, равным  $\varphi$ .

Из вышеназванной формулы электротехники определяют реактивную мощность:

$$P = UI \sin\varphi.$$

Поэтому реактивную (инерционную) механическую мощность тоже следует определить, как:

$$Q_i = FV \sin\varphi. \quad (8)$$

Из (6) следует, что под активной мощностью понимается среднее за полпериода значение мгновенной мощности, а под реактивной — амплитудное значение. В электротехнике аналогично.

Еще одно обобщение из электротехники — полная механическая мощность:

$$S = FV = \sqrt{Q_i^2 + P^2}. \quad (9)$$

Она примечательна тем, что, с одной стороны, описывается формулой Пифагора, а с другой — равна произведению действующих значений гармонических величин.

Имея в виду (1), (5) и (8),

$$Q_i = FV \sin\varphi = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l\omega}{\sqrt{2}} \frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}} = \frac{ml^2\omega^3}{2}. \quad (10)$$

При этом:

$$f_a v = -lm\omega^2 \sin\omega t l\omega \cos\omega t = -0,5l^2 m\omega^3 \sin 2\omega t = -F_a V \sin 2\omega t = -Q_i \sin 2\omega t. \quad (11)$$

Это соответствует выражениям (6) и (10).

Имея в виду (1), (5) и (7),

$$P = FV \cos\varphi = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l\omega}{\sqrt{2}} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}} = \frac{\mu l^2 \omega^2}{2}. \quad (12)$$

При этом:

$$f_\mu v = \mu l\omega \cos\omega t l\omega \cos\omega t = 0,5\mu l^2 \omega^2 (1 + \cos 2\omega t) = F_\mu V (1 + \cos 2\omega t) = P(1 + \cos 2\omega t). \quad (13)$$

Это соответствует выражениям (6) и (12).

Имея в виду (9), (10) и (12),

$$S = FV = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l\omega}{\sqrt{2}} = \frac{l^2 \omega^2 \sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{2}.$$

**Мощность, развиваемая при упругих деформациях.** Выражение для силы имеет вид:

$$f_k = kx = kl \sin\omega t. \quad (14)$$

С учетом (3) результирующая сила равна:

$$f = f_k + f_\mu = kl \sin \omega t + \mu l \omega \cos \omega t = \\ = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \left( \frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} \sin \omega t + \frac{\mu \omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} \cos \omega t \right).$$

Обозначим:

$$\varphi = \arctg \frac{k}{\mu \omega}.$$

Значит,

$$f = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} (\sin \varphi \sin \omega t + \cos \varphi \cos \omega t) = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \cos(\omega t - \varphi).$$

Очевидно, что:

$$F_m = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}.$$

Действующее значение результирующей силы равно:

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Мгновенная результирующая мощность:

$$s = f v = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \cos(\omega t - \varphi) l \omega \cos \omega t = \\ = 0,5 l^2 \omega \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)] = \\ = FV [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)] = \\ = FV (\cos \varphi + \cos 2\omega t \cos \varphi + \sin 2\omega t \sin \varphi) = \\ = FV \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t) + FV \sin \varphi \sin 2\omega t = p + q_d. \quad (16)$$

Имея в виду (6), (7) и (12), активная механическая мощность равна:

$$P = FV \cos \varphi = \frac{l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l \omega}{\sqrt{2}} \frac{\mu \omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} = \frac{\mu l^2 \omega^2}{2}.$$

Принимая во внимание (15), (1), (8) и (16), механическая реактивная (упругая) мощность равна:

$$Q_d = FV \sin \varphi = \frac{l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l \omega}{\sqrt{2}} \frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} = \frac{kl^2 \omega}{2}. \quad (17)$$

При этом:

$$f_k v = kl \sin \omega t l \omega \cos \omega t = 0,5 kl^2 \omega \sin 2\omega t = F_k V \sin 2\omega t = Q_d \sin 2\omega t. \quad (18)$$

Это соответствует выражениям (16) и (17).

Очевидно, что полная мощность равна:

$$S = FV = \sqrt{Q_d^2 + P^2} = \frac{l^2 \omega \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{2}.$$

**Мощность при колебаниях, связанных с гравитационным воздействием.** При отклонении подвешенного груза на угол  $\alpha$  возникает момент:

$$M = mgL\alpha.$$

Пусть

$$\alpha = \alpha_0 \sin \omega t.$$

Тогда

$$\dot{\alpha} = \alpha_0 \omega \cos \omega t = \alpha_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \cos \omega t.$$

Мгновенная мощность имеет вид:

$$q_g = M \dot{\alpha} = mgL \alpha_0 \sin \omega t \alpha_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \cos \omega t = 0,5 m \alpha_0^2 \sqrt{Lg^3} \sin 2\omega t.$$

Ее амплитуда и, соответственно, реактивная мощность гравитационного воздействия определяется, как:

$$Q_g = 0,5 m \alpha_0^2 \sqrt{Lg^3}.$$

**Реактивная, активная и полная мощности в комплексном представлении.** В [15] показано, что при инертной нагрузке:

$$\dot{V}_m = V_m e^{j\pi/2}.$$

Мгновенная скорость при этом равна:

$$v = V_m \cos \omega t = \text{Im} \dot{V}_m.$$

Формулы для действующих значений величин принципиально не отличаются:

$$\dot{V} = V e^{j\pi/2}, \quad \dot{F} = F e^{j(\pi/2+\varphi)}.$$

В электротехнике подробно описана особенность комплексного представления: при вычислении полной мощности один из перемножаемых векторов должен быть сопряженным.

$$\underline{S} = \dot{F} V^* = F e^{j(\pi/2+\varphi)} V e^{-j\pi/2} = F V e^{j(\pi/2+\varphi-\pi/2)} = F V e^{j\varphi} = F V \cos \varphi + j F V \sin \varphi = P + j Q_i.$$

Это выражение для инертной нагрузки. Упругая нагрузка отличается тем, что реактивная мощность имеет противоположный знак:

$$\underline{S} = \dot{F} V^* = F e^{j(\pi/2-\varphi)} V e^{-j\pi/2} = F V e^{j(\pi/2-\varphi-\pi/2)} = F V e^{-j\varphi} = F V \cos \varphi - j F V \sin \varphi = P + j Q_d.$$

При этом:

$$P = \text{Re} \dot{F} V^*, \quad Q = \text{Im} \dot{F} V^*.$$

**Механические мощности в векторном представлении.** В основе комплексного представления лежит идея вращающихся в комплексной плоскости векторов. Тот же принцип может быть реализован в трехмерном Декартовом базисе.

Из (7)–(9) следует:

$$P = (F, V), \quad Q = [F, V], \quad S^2 = (F, V)^2 + [F, V]^2.$$

Математическая абстракция с проекциями вращающихся векторов имеет конкретную материальную основу в виде кривошипно-кулисных механизмов.

**Обсуждение и заключения.** Математическими методами исследованы мощности:

- при вынужденных гармонических колебаниях инертного тела,
- при упругих деформациях,
- при колебаниях, связанных с гравитационным воздействием,
- реактивная, активная и полная (в комплексном представлении),
- механическая (в векторном представлении).

Показано, что при механических гармонических колебаниях развивается не только знакоположительная тепловая мощность, но и знакопеременные реактивные мощности, характеризующие обратимость кинетической и потенциальной энергий.

При этом полная механическая мощность удовлетворяет формуле Пифагора.

Представление о механических реактивных, активной и полной мощностях является обобщением соответствующих понятий о мощностях из электротехники, и таким образом проявляется электромеханический дуализм.

### Библиографический список

1. Елисеев, С. В. Динамическое гашение колебаний при введении дополнительных связей и внешних воздействий / С. В. Елисеев, А. С. Миронов, К. Ч. Вьюнг // Вестник Донского государственного технического университета. — 2019. — Т. 19, № 1. — С. 38–44. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-1-38-44>
2. Елисеев, С. В. Устройства для преобразования движения в структуре диады механической колебательной системы / С. В. Елисеев, А. И. Орленко, Д. Х. Нгуен // Вестник Донского государственного технического университета. — 2017. — Т. 17, № 3. — С. 46–59. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2017-17-3-46-59>
3. Zhang, Y. F. Analysis on nonlinear vibrations near internal resonances of a composite laminated piezoelectric rectangular plate / Y. F. Zhang, W. Zhang, Z. G. Yao // Engineering Structures. — 2018. — Vol. 173. — P. 89–106. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.04.100>
4. Beltran-Carbajal, F. Multi-frequency harmonic vibration suppression on mass-spring-damper systems using active vibration absorbers / F. Beltran-Carbajal, G. Silva-Navarro, B. Vazquez-Gonzalez // Advances in Vibration Engineering. — 2016. — Vol. 4. — P. 1–12.

5. Numerical Modeling and Dynamic Characteristics Study of Coupling Vibration of Multistage Face Gearsplanetary Transmission / Xingbin Chen, Qingchun Hu, Zhongyang Xu, Chune Zhu // Mechanical Sciences. — 2019. — Vol. 10. — P. 475–495. <https://doi.org/10.5194/ms-10-475-2019>
6. Duygu Dönmez Demir. Variational Iteration Method for Transverse Vibrations of the Elastic, Tensioned Beam / Duygu Dönmez Demir, Erthan Koca // International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing. — 2017. — Vol. 5. — P. 187–190. <https://doi.org/10.18178/ijmmm.2017.5.3.315>
7. Zichen Zhang. Design and Optimization of Comb Drive Accelerator for High Frequency Oscillation / Zichen Zhang // Modern Mechanical Engineering. — 2018. — Vol. 8. — P. 1–10. <https://doi.org/10.4236/mme.2018.81001>
8. Birgersson, F. A Spectral Super Element for Modelling of Plate Vibration. Part 1: General Theory / F. Birgersson, S. Finnveden, C.-M. Nilsson // Sound and Vibration. — 2005. — Vol. 287. — P. 297–314. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.11.012>
9. A pneumatic actuator based on vibration friction reduction with bending/longitudinal vibration mode / Han Gao, Michaël De Volder, Tinghai Cheng [et al.] // Sensors and Actuators A: Physical. — 2016. — Vol. 252. — P. 112–119. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2016.10.039>
10. Study on machining vibration suppression with multiple tuned mass dampers: vibration control for long fin machining / Ippei Kono, T. Miyamoto, K. Utsumi [et al.] // International Journal of Automation Technology. — 2017. — Vol. 11. — P. 206–214. <https://doi.org/10.20965/ijat.2017.p0206>
11. Kunugi, K. Modeling of tape tether vibration and vibration sensing using smart film sensors / K. Kunugi, H. Kojima, P. M. Trivailo // Acta Astronautica. — 2015. — Vol. 107. — P. 97–111. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.11.024>
12. Legeza, V. P. Dynamics of vibration isolation system with a ball vibration absorber / V. P. Legeza // International Applied Mechanics. — 2018. — Vol. 54. — P. 584–593. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0912-0>
13. Павлов, В. Д. Автокомпенсация реактивной мощности в электрических сетях / В. Д. Павлов // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. — 2021. — № 14 (6). — С. 684–688. <https://doi.org/10.17516/1999-494X-0342>
14. Joachim, F. J. How to minimize power losses in transmissions, axles and steerings / F. J. Joachim, J. Börner, N. Kurz // Gear Technology. — 2012. — P. 58–66. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-22647-2\\_279](https://doi.org/10.1007/978-3-642-22647-2_279)
15. Павлов, В. Д. Математические модели резонансных и антирезонансных процессов / В. Д. Павлов // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. — 2021. — № 1 (49). — С. 17–27. <https://doi.org/10.20291/2079-0392-2021-1-17-27>

Поступила в редакцию 21.01.2022

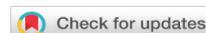
Поступила после рецензирования 16.02.2022

Принята к публикации 20.02.2022

*Об авторе:*

**Павлов Валентин Дмитриевич**, начальник научно-информационного отдела Владимирского электромеханического завода (600901, РФ, г. Владимир, ул. Ноябрьская, 127), кандидат технических наук, [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-9142-1000), [pavlov.val.75@mail.ru](mailto:pavlov.val.75@mail.ru).

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*



Научная статья



УДК 534.1:629.7

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-30-41>

## Аналитическое решение приближенных уравнений движения ракеты-носителя под действием порыва ветра для расчета динамического нагружения корпуса

О. И. Малыгина  

Ракетно-космический центр «Прогресс» (Самара, Российская Федерация)

 [maloliya@ya.ru](mailto:maloliya@ya.ru)

**Введение.** Рассматриваются ракета-носитель (РН) в полете и динамические составляющие нагрузок от воздействия порыва ветра трапецидального профиля. Предлагается определить динамические составляющие силовых факторов с помощью аналитических решений для ускорений точек конструкции. Цель работы — создание методики выбора продолжительности нормативного порыва, при воздействии которого достигаются максимальные нагрузки в сечениях корпуса ракеты-носителя.

**Материалы и методы.** Ракета-носитель представляется в виде неравномерной балки. Описание ее колебаний приводится к системе независимых обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих движение эквивалентной системы осцилляторов. Уравнение колебаний осцилляторов под действием трапецидальной импульсной нагрузки решается методом наложений и сводится к вычислению интеграла Дюамеля. Предлагается получать параметры эквивалентной системы осцилляторов по результатам расчета динамических характеристик для конечноэлементной модели РН в программе Nastran.

**Результаты исследования.** Приведены аналитические соотношения для ускорений точек корпуса РН под воздействием порыва ветра трапецидального профиля. Для балочной модели проведены тестовые расчеты ускорений по методике, предложенной в настоящей статье. Эти данные сравниваются с результатами конечноэлементного моделирования. С помощью аналитических решений построены зависимости, определяющие характер изменения величины изгибающего момента для различных сечений ракеты-носителя при варьировании продолжительности порыва ветра.

**Обсуждение и заключения.** Благодаря представленной методике можно на примере ракеты-носителя строить эквивалентную динамическую модель систем с большим числом степеней свободы и получать аналитические решения для ускорений точек механической системы при трапецидальном внешнем воздействии. Данные решения применимы для исследования динамических нагрузок. Итоги такого анализа позволяют выбрать продолжительность порыва ветра, при которой достигаются максимальные нагрузки в сечениях корпуса РН. Вычисления на базе аналитических решений весьма экономичны с точки зрения затраченного времени. Их можно использовать в проектных расчетах для предварительной оценки нагружения.

**Ключевые слова:** ракета-носитель, балочная модель, осциллятор, корпусные нагрузки, интеграл Дюамеля, динамические нагрузки, порыв ветра, аналитические решения, дифференциальное уравнение, колебания, изгибающий момент.

**Для цитирования:** Малыгина, О. И. Аналитическое решение приближенных уравнений движения ракеты-носителя под действием порыва ветра для расчета динамического нагружения корпуса / О. И. Малыгина // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 30–41. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-30-41>

© Малыгина О. И. 2022



## Analytical solution to approximate equations of the launch vehicle motion under the gust action for the dynamic loading calculation

Olga I. Malykhina  

Space Rocket Centre Progress JSC (Samara, Russian Federation)

 [maloliya@ya.ru](mailto:maloliya@ya.ru)

**Introduction.** The launch vehicle (LV) in flight and the dynamic components of loads from the impact of a trapezoidal wind gust are considered. It is proposed to determine the dynamic components of the force factors using analytical solutions for the structure points accelerations. The work objective is to create a technique for selecting the duration of the standard gust, under the influence of which maximum loads are provided in the sections of the LV structure.

**Materials and Methods.** The launch vehicle is presented as an uneven beam. The description of its vibrations is reduced to a system of independent ordinary differential equations that determine the motion of an equivalent system of oscillators. The equation of oscillator vibrations under the action of a trapezoidal pulse load is solved by the overlay method, and it is reduced to the calculation of the Duhamel integral. It is proposed to get the parameters of an equivalent system of oscillators based on the results of the calculation of dynamic characteristics for a finite element LV model in the Nastran program.

**Results.** Analytical relations for the LV structure point accelerations under the action of a trapezoidal wind gust are given. For the beam model, test calculations of accelerations were carried out according to the technique proposed in this paper. These data are compared to the results of finite element modeling. With the help of analytical solutions, dependences are constructed that determine the nature of the change in the magnitude of the bending moment for different sections of the launch vehicle when the duration of the wind gust varies.

**Discussion and Conclusions.** The presented technique provides building an equivalent dynamic model of systems with a large number of degrees of freedom on the example of a LV and obtaining analytical solutions for accelerations of points of a mechanical system under trapezoidal external action. These solutions are applicable for the study of dynamic loads. The analysis results enable to select the duration of the wind gust, at which maximum loads are reached in the sections of the LV structure. Calculations based on the analytical solutions are very economical in terms of time spent. They can be used in design calculations for preliminary assessment of loading.

**Keywords:** launch vehicle, beam model, oscillator, structure loads, Duhamel integral, dynamic loads, gust, analytical solutions, differential equation, vibrations, bending moment.

**For citation:** O. I. Malykhina. Analytical solution to approximate equations of the launch vehicle motion under the gust action for the dynamic loading calculation. *Advanced Engineering Research*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 30–41. (In Russ). <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-30-41>

**Введение.** При эксплуатации ракеты-носителя (РН) в элементах ее конструкции возникают нагрузки. Речь идет о продольных и перерезывающих силах, изгибающих и крутящих моментах. Данные об указанных силовых факторах задействуют для прочностного анализа при проектировании новых изделий, экспериментальной отработке конструкции [1] и адаптации средств выведения под конкретный пуск [2]. Нагрузки подразделяются на квазистатические и динамические. Квазистатические, возникающие в полете, вычисляются из условия динамического равновесия РН как твердого тела с учетом допустимых параметров траектории выведения.

Для расчета динамических нагрузок обычно применяются обобщенные балочные модели. Такие нагрузки определяются по результатам решения уравнения движения упругой РН, которое в общем случае представляет собой уравнение в частных производных. Методы, основанные на использовании разложений решений по тонам собственных колебаний конструкции, способны обеспечить высокую скорость вычисления в сочетании с достаточной точностью результатов [3]. Как показано в [4], с помощью метода разложения по формам собственных колебаний можно перейти к системе независимых обыкновенных дифференциальных уравнений. Они описывают:

- движение центра масс РН,
- поворот продольной оси РН относительно центра масс,
- поперечные упругие колебания РН в полете.

Переход к независимым уравнениям, описывающим упругие колебания РН, означает, что будут учитываться распределенные параметры осцилляторов, каждый из которых представляет собой систему с одной степенью свободы. Движение такого осциллятора можно рассматривать независимо от других и для

каждого из них можно получить решение с помощью известных методов теории колебаний.

С целью расчета нагрузок в полете рассматривается не вся траектория выведения, а только некоторые ее точки, так называемые случаи нагружения, характеризующиеся экстремальным значением отдельных параметров, влияющих на нагружение, либо максимальным значением нагрузок на отдельные элементы конструкции. Один из наиболее важных случаев нагружения — полет РН в плотных слоях атмосферы [1, 5]. Влияние беспокойной атмосферы на нагружение РН можно определить статистическими методами [6, 7] либо в рамках консервативного подхода, когда учитываются максимально возможные (с некоторым уровнем вероятности) характеристики ветра. В данной статье рассматривается второй подход. В качестве внешнего динамического воздействия принимается однократный нормативный порыв ветра. Профиль нормативного порыва, характеризующий изменение скорости ветра с течением времени, может быть задан в трапецеидальном [8], косинусоидальном или синусоидальном виде [9]. В данной статье рассмотрим движение ракеты-носителя под действием трапецеидального порыва. Продолжительность нормативного порыва обычно выбирается сопоставимой с периодом низшего поперечного тона колебаний РН<sup>1</sup>. При этом часто выдвигаются требования ее варьирования для достижения максимальных усилий в сечениях РН [8, 10]. Трудоемкость расчетов с использованием стандартных программ конечноэлементного (КЭ) анализа обусловлена:

- необходимостью варьирования параметров внешнего воздействия,
- большим числом расчетных случаев,
- множеством вариантов исполнения и конфигураций конструкций на этапе проектных расчетов [9].

Цель настоящей статьи — разработка методики выбора продолжительности действия нормативного порыва с использованием аналитических решений, полученных для упрощенной динамической модели РН, представленной в виде эквивалентной системы осцилляторов.

Полуаналитический подход с использованием интеграла Дюамеля был успешно применен в [11] для проведения гидроупругого анализа судов. В [12] и ряде других работ интеграл Дюамеля используется в рамках решения задачи нагружения мостов подвижными нагрузками. В настоящей статье интеграл Дюамеля задействовали для аналитических решений реакции ракеты-носителя на кратковременное воздействие порыва ветра в полете.

**Материалы и методы.** На этапах эскизного проектирования целесообразно использовать плоские расчетные схемы для балочных моделей. При простоте и скорости решения они позволяют определить параметры движения и внутренние усилия (с приемлемой для этого этапа проектирования точностью) [13]. Представим РН в виде упругой балки с переменными по длине массой и жесткостью. Примем обычные для сопротивления материалов допущения, в том числе гипотезу о малости упругих деформаций. Для определения внутренних силовых факторов в сечении РН используем метод ускорений (перегрузок) [1, 4], который можно интерпретировать как метод сечений, адаптированный для динамического расчета. В этом случае внутренние усилия находят из условий статического равновесия мысленно отсеченных частей конструкции под действием внешних распределенных нагрузок, дополненных силами инерции Д'Аламбера, и искомым внутренним усилиям. Квазистатические и динамические значения силовых факторов определяются отдельно на основе предварительно вычисленных ускорений, а затем суммируются [4].

В данной работе рассматривается вопрос определения динамического нагружения РН в поперечном направлении под действием порыва ветра, скорость которого направлена перпендикулярно продольной оси РН. Принимается, что нагружение в продольном направлении можно рассчитать независимо. В данной работе оно не рассматривается.

С целью определения динамических ускорений РН представляется в виде свободной упругой балки. Ее движение изучается в окрестности момента времени, соответствующего рассматриваемому случаю нагружения, и описывается в отклонениях от состояния динамического равновесия, в котором находилась РН до ветрового порыва, двигаясь по номинальной (невозмущенной) траектории. При этом как бы «замораживаются», т. е. принимаются постоянными и равными характеристикам рассматриваемой точки номинальной траектории такие параметры, как масса и момент инерции РН, тяга двигателя, угол наклона траектории. Возмущенное движение упругой РН исследуется в неподвижной системе координат, связанной с положением, которое РН занимала на момент начала расчета. Возмущенное движение будет представлять собой совокупность плоскопараллельного движения РН как твердого тела в плоскости, в которой приложена динамическая нагрузка, и упругих движений корпуса. Реакцию системы управления не учитываем, т. е. для автомата стабилизации предполагаем большое время запаздывания по сравнению со временем приложения динамической нагрузки. Вообще, под воздействием порыва ветра вместе с упругими колебаниями корпус РН начинает движение как твердое тело. Поперечная составляющая аэродинамической силы, которая при малом

<sup>1</sup> Лиходед А. И. Динамика конструкций и определение нагрузок. Королев : Изд-во АО ЦНИИмаш, 2020. 239 с.

угле атаки считается ему пропорциональной, меняет значение за счет смещения корпуса в направлении действия порыва ветра и поворота относительно вектора набегающего потока. Проекция силы тяжести на поперечную ось РН также меняется. Для правильного учета указанных изменений уравнения движения РН необходимо интегрировать с уравнениями, описывающими логику работы автомата стабилизации, что невозможно на ранних этапах проектирования. Учитывая к тому же значительную массу и момент инерции РН, будем считать малыми:

- угол поворота РН как твердого тела за время расчета,
- скорость смещения центра масс РН в направлении действия порыва ветра.

Это позволяет не учитывать влияние указанных выше изменений. Приращение угла атаки (а следовательно, и поперечной составляющей аэродинамической силы) считается зависящим только от величины скорости порыва ветра, заданной в виде функции времени. Таким образом, с учетом принятых допущений аэродинамическая нагрузка в поперечном направлении представляет собой распределенную по длине балки нагрузку с коэффициентом пропорциональности, зависящим от времени. Закон распределения аэродинамической нагрузки по длине РН определяется экспериментально и считается заранее известным. Закон изменения коэффициента пропорциональности (угла атаки) от времени определяется выбором профиля нормативного порыва ветра.

Движение РН, смоделированной в виде упругой балки, можно описать, используя известное уравнение вынужденных поперечных колебаний балки, записанное с учетом гипотезы Фойгта:

$$m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \left(1 + h \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ B(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = q(x, t), \quad (1)$$

где  $m(x)$  — погонная масса;  $B(x)$  — изгибная жесткость;  $q(x, t)$  — распределенная внешняя нагрузка;  $h$  — коэффициент трения.

Данное уравнение должно быть дополнено граничным условием: внутренние усилия в начальном и конечном сечении равны нулю. Значит:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ B(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0, \quad B(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x = 0, x = L, \quad (2)$$

где  $L$  — длина РН.

В качестве внешней распределенной нагрузки в данной работе принимается аэродинамическая сила, которую можно представить в виде произведения функций:

$$q(x, t) = R(t) Y_a(x), \quad (3)$$

где  $R(t)$  — функция, определяющая временную изменчивость аэродинамической силы и изменяющаяся по трапецидальному закону в соответствии с принятой в настоящей работе моделью порыва ветра;  $Y_a(x)$  — функция распределения аэродинамической силы по длине РН.

Рассмотрим свободные колебания РН без учета сил трения (при  $q(x, t) = 0, h = 0$ ). Подставим метод разделения переменных  $y(x, t) = f(x) \cdot q(t)$ . В этом случае от уравнения (1) с граничными условиями (2) можно прийти к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ B(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] - p^2 m(x) f(x) = 0, \quad (4)$$

с краевыми условиями:

$$\frac{d}{dx} \left[ B(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] = 0, \quad B(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0, \quad \text{при } x = 0, x = L. \quad (5)$$

Решение (4) с условиями (5) представляет собой классическую задачу Штурма — Лиувилля. Решая ее, можно найти набор собственных форм  $f_j(x)$  и собственных частот  $p_j$  рассматриваемой балки ( $j = 1, 2, \dots$ ). Известно<sup>2</sup>, что некоторые решения системы (4) соответствуют нулевым собственным частотам. Формы, соответствующие нулевым собственным частотам, определяют поступательное движение РН как твердого тела вместе с центром масс и вращение вокруг центра масс:  $f_{-1} = 1, f_0 = x - x_C$ , где  $x_C$  — координата центра масс РН.

Следует отметить, что массовые и жесткостные характеристики РН чаще всего имеют кусочно-постоянный характер распределения. В этом случае уравнения вида (1) и (4) должны быть записаны отдельно для каждого однородного балочного участка с граничными условиями на стыках участков, как при выводе соотношений метода начальных параметров [1, 14]. В данной работе указанная запись опущена, т. к. расчет динамических характеристик (модальный анализ) конструкции проводится численно, с использованием метода конечных элементов.

Представим вынужденные колебания упругой балки, моделирующей корпус РН, в виде разложения по формам собственных колебаний. Примем, что ось жесткости балки проходит через ее центр масс. Для

<sup>2</sup> Колесников К. С. Динамика ракет. М. : Машиностроение, 2003. 520 с.

перемещения точек оси РН запишем:

$$y(x, t) = y_c(t) + \vartheta(t)(x - x_c) + \sum_{j=1}^N f_j(x) \cdot q_j(t), \quad (6)$$

где  $y_c(t)$  — перемещение центра масс балки;  $\vartheta(t)$  — угол поворота оси недеформированной балки;  $f_j$  — форма собственных колебаний балки, соответствующая тону с номером  $j$ ;  $q_j(t)$  — обобщенная координата, соответствующая тону с номером  $j$ ;  $N$  — число учитываемых упругих тонов.

После подстановки (6) в (1) и применения процедуры Бубнова — Галеркина можно прийти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_c(t) &= Q_y, \\ I\ddot{\vartheta}(t) &= Q_\vartheta, \end{aligned} \quad (7)$$

$$m_j(\ddot{q}_j(t) + 2n_j\dot{q}_j(t) + p_j^2q_j(t)) = Q_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

Здесь  $m$  — масса РН;  $I$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс РН перпендикулярно плоскости вращения;  $m_j$  — приведенная (обобщенная) масса для  $j$ -го тона колебаний и определяемая формулой:  $m_j = \int_0^L m(x)f_j^2(x) dx$ .

Обобщенные силы в выражении (7) с учетом (3) определяются следующим образом:

$$Q_y = R(t) \int_0^L Y_a(x) dx = R(t)Q_a, \quad (8)$$

$$Q_\vartheta = R(t) \int_0^L Y_a(x) (x - x_c) dx = R(t)M_a, \quad (9)$$

$$Q_j = R(t) \int_0^L Y_a(x) f_j dx = R(t)Q_{0j}. \quad (10)$$

Здесь  $Q_a$  — максимальное значение главного вектора поперечной аэродинамической нагрузки;  $M_a$  — максимальное значение главного момента поперечной аэродинамической нагрузки, приведенного к центру масс РН;  $Q_{0j}$  — максимальное значение обобщенной силы, соответствующей обобщенной координате  $q_j$ .

Первые два уравнения в (7) определяют закон изменения ускорений точек РН в процессе поступательного и вращательного движения РН как твердого тела. Последнее уравнение в (7) определяет закон движения эквивалентной системы осцилляторов.

Рассмотрим движение одного осциллятора под действием трапецеидальной внешней нагрузки, которая:

- возрастает от нуля до  $Q_0$  за время  $\delta$ ,
- сохраняет постоянное значение за время  $\theta$ ,
- падает до нуля за время  $\delta$ .

Для удобства опустим индексы, характеризующие номер тона. Тогда дифференциальное уравнение движения осциллятора с учетом (10) перепишем в виде:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + p^2q = \frac{Q(t)}{m} = \frac{Q_0}{m}R(t), \quad (11)$$

где  $m$  — масса осциллятора;  $p$  — угловая частота собственных колебаний, выраженная в радианах в секунду;  $n$  — коэффициент затухания (определяет демпфирующие осциллятора);  $Q(t) = Q_0R(t)$  — закон изменения внешней нагрузки.

Представим функцию  $R(t)$  как совокупность четырех линейных функций:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \delta^{-1}t, & R_2(t) &= -\delta^{-1}(t - \delta), \\ R_3(t) &= -\delta^{-1}(t - \delta - \theta), & R_4(t) &= \delta^{-1}(t - 2\delta - \theta). \end{aligned}$$

Соответственно, внешняя нагрузка  $Q(t)$  — это совокупность четырех линейных нагрузок  $Q_i(t) = Q_0R_i(t)$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Нагрузка  $Q_1(t)$  прикладывается с момента  $t = 0$ ;  $Q_2(t)$  — с момента  $t = \delta$ ;  $Q_3(t)$  — с момента  $t = \delta + \theta$ ;  $Q_4(t)$  — с момента  $t = \theta + 2\delta$ .

Для определения реакции системы на внешнее воздействие разобьем все время действия нагрузки на четыре интервала (рис. 1).

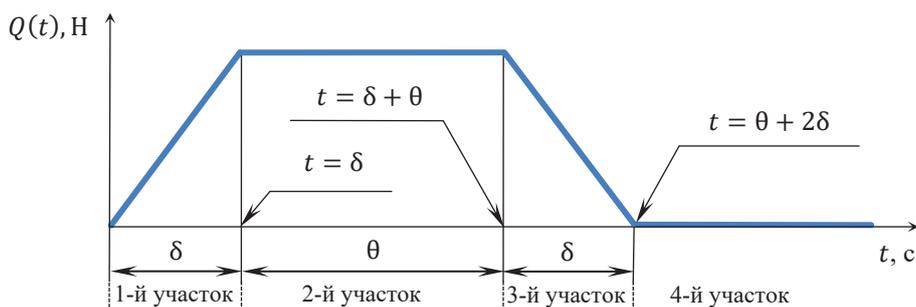


Рис. 1. Схема внешней трапецеидальной нагрузки

В соответствии с методом наложений<sup>3</sup> представим в виде интеграла Дюамеля реакцию рассматриваемой линейной системы на внешнее воздействие как сумму реакций на совокупность независимо приложенных элементарных импульсов:

$$q(t) = \int_0^t P(t - \vartheta)Y(\vartheta)d\vartheta,$$

здесь  $P(t - \vartheta)$  — смещенный временной закон изменения внешнего воздействия, а  $Y(\vartheta)$  характеризует реакцию системы на единичное импульсное воздействие. Реакцию механической системы  $q_l(t)$  на линейно возрастающую нагрузку  $P(t) = kt$  можно выразить через реакцию системы на единичный импульс  $Y(\vartheta)$  и на внезапно приложенную единичную нагрузку  $Y_1(\vartheta)$ :

$$q_l(t) = k \int_0^t Y_1(\vartheta)d\vartheta, \quad Y_1(t) = \int_0^t Y(\vartheta)d\vartheta.$$

Реакция на единичный импульс для механической системы с одной степенью свободы, имеющей коэффициент затухания  $n$ , будет иметь вид<sup>4</sup>:

$$Y(\vartheta) = \frac{1}{m\sqrt{p^2 - n^2}} e^{-n\vartheta} \sin(\sqrt{p^2 - n^2}\vartheta).$$

Введем обозначение для частоты затухающих колебаний  $p_1 = \sqrt{p^2 - n^2}$ . Вычислим реакцию системы на внезапно приложенную единичную нагрузку:

$$Y_1(\vartheta) = \int_0^t Y(\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{mp^2} \left[ 1 - e^{-nt} \left( \cos(p_1 t) + \frac{n}{p_1} \sin(p_1 t) \right) \right].$$

Реакция на линейно возрастающую нагрузку:

$$q_l(t) = k \int_0^t Y_1(\vartheta)d\vartheta = \frac{k}{mp^2} \left\{ \frac{2n}{p^2} [-1 + e^{-nt} \cos(p_1 t)] + \frac{1}{p_1} \left( \frac{2n^2}{p^2} - 1 \right) e^{-nt} \sin(p_1 t) + t \right\}. \quad (12)$$

Примем обозначения:  $\Delta_1 = t - \delta$ ,  $\Delta_2 = \Delta_1 - \theta$ ,  $\Delta_3 = \Delta_2 - \delta$ .

Введем функцию, содержащую гармонические члены решения (12):

$$d(\vartheta) = 2 \frac{n}{p^2} \left( \cos(p_1 \cdot \vartheta) + \frac{n}{p_1} \sin(p_1 \cdot \vartheta) \right) e^{-n\vartheta} - \frac{1}{p_1} \sin(p_1 \cdot \vartheta) e^{-n\vartheta}.$$

Обозначим  $q_{ст}$  перемещение под действием статически приложенной к системе силы  $Q_0 = q_{ст}mp^2$  и учтем, что  $k = Q_0/\delta$ . Суммарное перемещение осциллятора под действием комбинации нагрузок  $Q_i(t)$  на каждом временном участке будет суммой соответствующих решений (12). Реакция системы, описываемой уравнением (11), на внешнее воздействие трапециoidalного профиля будет иметь вид:

$$q(t) = \begin{cases} q_{ст}\delta^{-1}[d(t) - 2n/p^2 + t] & \text{при } 0 \leq t < \delta, \\ q_{ст}\delta^{-1}[d(t) - d(\Delta_1) + \delta] & \text{при } \delta \leq t < \theta + \delta, \\ q_{ст}\delta^{-1}[d(t) - d(\Delta_1) - d(\Delta_2) + 2n/p^2 - \Delta_3] & \text{при } \theta + \delta \leq t < \theta + 2\delta, \\ q_{ст}\delta^{-1}(d(t) - d(\Delta_1) - d(\Delta_2) + d(\Delta_3)) & \text{при } t \geq \theta + 2\delta. \end{cases} \quad (13)$$

Закон изменения ускорений осциллятора может быть получен двойным дифференцированием по времени выражения (13). Введем функцию  $g(\vartheta) = \frac{d^2}{d\vartheta^2}(d(\vartheta))$ . Дифференцируем и запишем результат с учетом номера тона колебаний:

$$g_j(\vartheta) = \left[ (n_j^2 - p_{1j}^2) \left( 2 \frac{n_j}{p_j^2} \left( \cos(p_{1j} \cdot \vartheta) + \frac{n_j}{p_{1j}} \sin(p_{1j} \cdot \vartheta) \right) - \frac{1}{p_{1j}} \sin(p_{1j} \cdot \vartheta) \right) - 2n_j \left( 2 \frac{n_j}{p_j^2} (-p_{1j} \sin(p_{1j} \cdot \vartheta) + n_j \cos(p_{1j} \cdot \vartheta)) - \cos(p_{1j} \cdot \vartheta) \right) \right] e^{-n\vartheta}. \quad (14)$$

Перепишем выражение для частоты затухающих собственных колебаний:

$$p_{1j} = \sqrt{p_j^2 - n_j^2}. \quad (15)$$

Для определения ускорений точек РН дважды продифференцируем (6):

$$\ddot{y}(t, x) = \ddot{y}_c(t) + \ddot{\vartheta}(t)(x - x_c) + \sum_{j=1}^N f_j(x) \ddot{q}_j(t). \quad (16)$$

Выразим ускорения обобщенных координат из первых двух уравнений системы (7) с учетом (8) и (9).

Представим ускорения точек оси РН, которые она приобретает, двигаясь как твердое тело:

$$a(t) = \ddot{y}_c(t) + \ddot{\vartheta}(t)(x - x_c) = R(t)(Q_a/m + M_a/I). \quad (17)$$

<sup>3</sup> Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М. : URSS, 2017. 416 с.

<sup>4</sup> Яблонский А. А. Курс теоретической механики. М. : Интеграл-Пресс. 2007. 603 с.

Кроме того, учтем закон изменения функции  $R(t)$  от времени:

$$R(t) = \begin{cases} \delta^{-1}t & \text{при } 0 \leq t < \delta, \\ 1 & \text{при } \delta \leq t < \theta + \delta, \\ -\delta^{-1}(t - 2\delta - \theta) & \text{при } \theta + \delta \leq t < \theta + 2\delta, \\ 0 & \text{при } t \geq \theta + 2\delta. \end{cases}$$

Получим:

$$a(t) = \begin{cases} \delta^{-1}t(Q_a/m + M_a/I) & \text{при } 0 \leq t < \delta, \\ Q_a/m + M_a/I & \text{при } \delta \leq t < \theta + \delta, \\ -\delta^{-1}(t - 2\delta - \theta)(Q_a/m + M_a/I) & \text{при } \theta + \delta \leq t < \theta + 2\delta, \\ 0 & \text{при } t \geq \theta + 2\delta. \end{cases} \quad (18)$$

Для ускорений обобщенных координат, соответствующих упругим тонам колебаний, в результате двойного дифференцирования выражения (13) с учетом (14) получим:

$$\ddot{q}_j(t) = \begin{cases} \delta^{-1}q_{\text{ст}j}g_j(t) & \text{при } 0 \leq t < \delta, \\ \delta^{-1}q_{\text{ст}j}(g_j(t) - g_j(\Delta_1)) & \text{при } \delta \leq t < \theta + \delta, \\ \delta^{-1}q_{\text{ст}j}(g_j(t) - g_j(\Delta_1) - g_j(\Delta_2)) & \text{при } \theta + \delta \leq t < \theta + 2\delta, \\ (\delta^{-1}q_{\text{ст}j}(g_j(t) - g_j(\Delta_1) - g_j(\Delta_2) + g_j(\Delta_3))) & \text{при } t \geq \theta + 2\delta. \end{cases} \quad (19)$$

С учетом (16) и (17) закон изменения ускорений точек упругой оси РН под действием порыва ветра трапецидального профиля будет иметь вид:

$$\ddot{y}(t, x) = a(t) + \sum_{j=1}^N f_j(x)\ddot{q}_j(t), \quad (20)$$

где  $a(t)$  определяется выражением (18),  $\ddot{q}_j(t)$  — выражением (19).

При исследовании упругих колебаний РН демпфирование традиционно принимается на основании данных, полученных по результатам натурных динамических испытаний и представленных в виде значений логарифмических декрементов  $D_j$ . Тогда коэффициент, определяющий параметр демпфирования и входящий в выражения (14) и (15), можно вычислить по формуле:

$$n_j = \frac{D_j}{2\pi} p_j. \quad (21)$$

Входящее в формулу (19) изменение обобщенной координаты  $q_j$  под действием статически приложенной обобщенной силы  $Q_{0j}$  определяется выражением:

$$q_{\text{ст}j} = \frac{1}{p_j^2} \frac{Q_{0j}}{m_j} = \frac{1}{p_j^2} \frac{\int_0^L \gamma_a(x) f_j(x) dx}{\int_0^L m(x) f_j^2(x) dx}. \quad (22)$$

Принимая во внимание (14), (15), (18), (19), (21), (22), формула (20) — это аналитическое выражение, определяющее функции изменения ускорений по времени для точек оси РН под действием внешней поперечной аэродинамической силы, изменяющейся по трапецидальному закону с учетом влияния диссипативных сил.

Зная закон изменения ускорений, можно по известным методикам [4] определить динамические, а затем и суммарные корпусные нагрузки, действующие в сечениях РН. Вычислим изгибающий момент, обусловленный инерционными силами, возникающими за счет упругих колебаний корпуса РН:

$$M(x, t) = -\sum_{j=1}^N M_j(x)\ddot{q}_j(t). \quad (23)$$

Здесь  $M_j(x)$  — функция распределения по длине РН единичного (при ускорении  $\ddot{q}_j(t)$ , равном единице) изгибающего момента для  $j$ -го тона колебаний. Ее можно найти по формуле:

$$M_j(x) = \int_0^x \int_0^x m(x) f_j(x) dx dx. \quad (24)$$

Как отмечалось выше, для проведения модального анализа в данной работе использовался метод КЭ. Данный подход обусловлен тем, что на практике у динамической модели РН достаточно сложная структура. Она включает подконструкции, и нельзя пренебрегать их собственной динамикой. Подконструкции могут крепиться к корпусу РН в одном сечении либо располагаться параллельно продольной оси РН и иметь несколько точек крепления. В этом случае расчет динамических характеристик в континуальной постановке является сложной математической задачей. Кроме того, динамические модели отдельных подконструкций представляются предприятиями-разработчиками в конденсированном (матричном) виде в формате Nastran. По этой причине для расчета динамических характеристик конструкции будет оптимальным задействовать пакет программ инженерного анализа Nastran.

Однако применение стандартных программ КЭ-анализа для расчета динамического нагружения сопряжено с определенными трудностями. К ним относится необходимость предварительно строить эквивалентную модель внешней аэродинамической нагрузки, пригодную для использования в программе КЭ-анализа [15], что само по себе достаточно сложно. Кроме того, есть трудности, связанные с обработкой результатов расчета. Применение для анализа результатов функционала постпроцессора чрезвычайно трудоемко, требует большого числа ручных операций. Другой путь предполагает применение дополнительного

программного обеспечения для обработки массивов числовых данных большой размерности<sup>5</sup>. В данной работе предлагается подход, в рамках которого программа КЭ-анализа используется только для модального анализа. Динамическое нагружение в этом случае рассчитывается с помощью специально разработанного программного обеспечения, позволяющего варьировать внешние нагрузки и автоматически обрабатывать результаты расчета.

Для сложной конструкции РН уравнения (7) сохраняют свой вид [3]. Стандартная информация вывода программы Nastran может быть базой для получения параметров эквивалентной системы осцилляторов, массы и момента инерции РН, а также для вычисления обобщенных сил, входящих в третье уравнение системы (7). Для формирования левой части третьего уравнения в (7) необходимы значения собственных частот  $p_j$  (Radians) и обобщенных масс  $m_j$  (Generalized mass). Для определения обобщенных сил в правой части третьего уравнения в (7) необходимы функции собственных форм колебаний  $f_j(x)$  (Eigenvector). При вычислении динамических инерционных нагрузок по (23) вместо (24) удобнее воспользоваться единичными инерционными нагрузками (силами и моментами), которые выводятся программой Nastran после стандартного запроса усилий при расчете собственных форм и частот. Единичные инерционные нагрузки выводятся отдельно для каждого тона колебаний, причем помноженные на квадрат собственной частоты, что следует учитывать для их корректного использования.

**Результаты исследования.** Для проведения тестовых расчетов рассмотрена ракета-носитель среднего класса тандемной схемы. Вид функций погонной изгибной жесткости  $B(x)$  и массы  $m(x)$ , а также распределения сосредоточенных масс  $m_{\text{сопр}}(x) = m_{\text{сопр}_r} \Delta(x - x_r)$  по длине рассматриваемой РН представлен на рис. 2 (через  $\Delta$  обозначена дельта-функция Дирака).

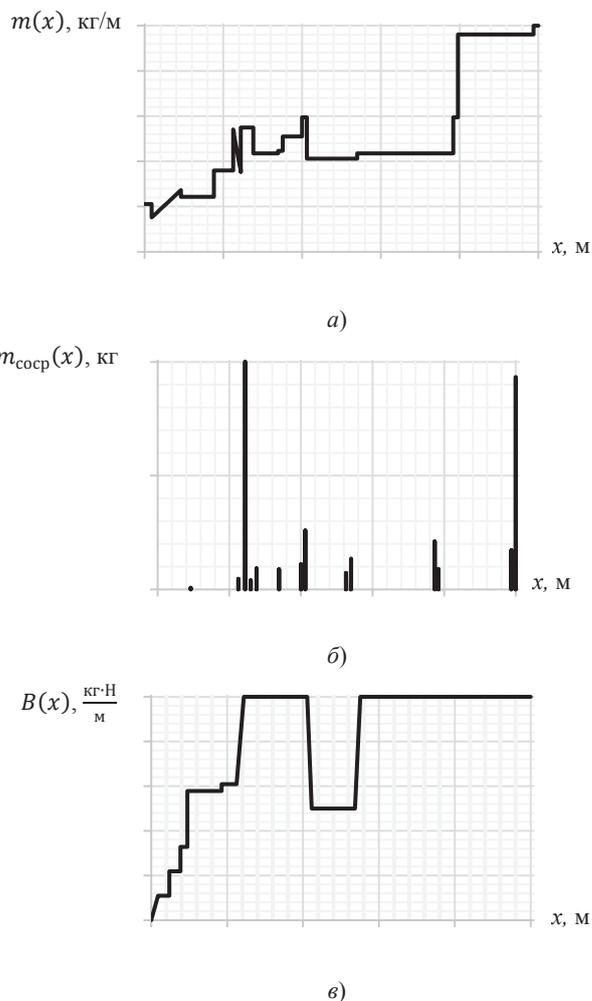


Рис. 2. Распределение массовых и жесткостных характеристик по длине РН: погонная масса (а), сосредоточенная масса (б), изгибная жесткость (в)

<sup>5</sup> Малыхина О. И. Автоматизация обработки результатов конечноэлементного анализа нагружения конструкций ракетно-космической техники : сб. ст. VII науч.-тех. конф. молодых ученых и специалистов Центра управления полетами. Королев : ЦНИИМаш, 2017. С. 427–434.

Для проверки полученных аналитических решений при воздействии трапецидальной внешней нагрузки рассчитаны динамические ускорения РН по формуле (20) с учетом (14), (15), (18), (19), (21), (22). При этом учтены 5 упругих тонов собственных поперечных колебаний РН. Характеристики  $p_j$ ,  $m_j$  и  $f_j(x)$  были получены по результатам расчета в программном комплексе MSC Nastran с использованием последовательности решения для модального анализа собственных колебаний (SOL 103). Динамическая конечно-элементная модель РН представлена в виде набора балочных элементов с различными инерционными и жесткостными характеристиками. К балочным упруго или жестко присоединены:

- элементы, описывающие инерционные свойства приборов, агрегатов, частей конструкции блоков;
- конденсированные модели отдельных блоков, представленных в цифровом матричном виде.

Конечноэлементная модель РН включает около 1000 составляющих. Элементы, моделирующие закрепления, не использовались для сохранения способности движения РН как твердого тела.

По той же конечноэлементной модели РН в программном комплексе MSC Nastran рассчитаны ускорения с использованием последовательности решения SOL 119, применяемой для модального анализа переходных процессов. При этом в модальном разложении были учтены все тона собственных колебаний в диапазоне до 100 Гц. Аэродинамическая нагрузка представлена поперечными погонными нагрузками, распределенными по всем балочным элементам, моделирующим корпус РН. Кроме того, задан трапецидальный закон изменения аэродинамической нагрузки по времени.

На рис. 3 представлены результаты сравнительного анализа полученных с помощью двух различных подходов ускорений  $a_0(t) = \ddot{y}(t, x_0)$  некоторой точки оси РН с координатой  $x = x_0$ . Видно, что хорошо согласуются два решения:

- полученное для ускорений по упрощенной модели РН на основе аналитических соотношений, приведенных в настоящей работе;
- численное, полученное по полной конечноэлементной модели РН.

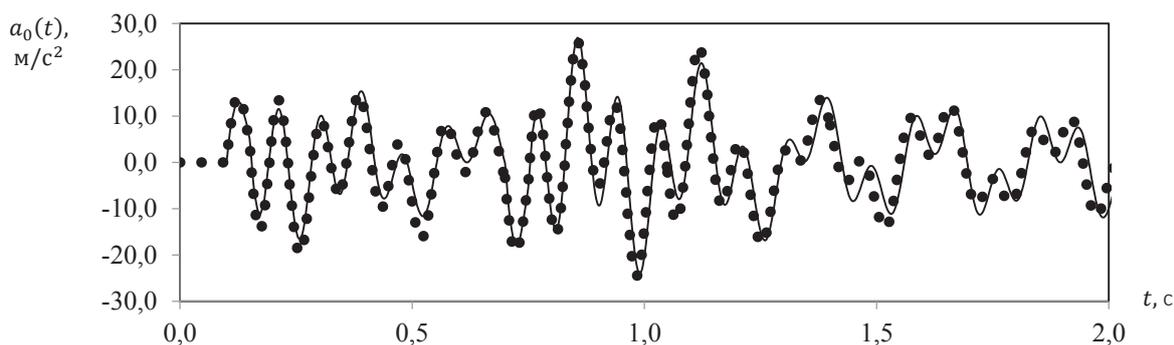
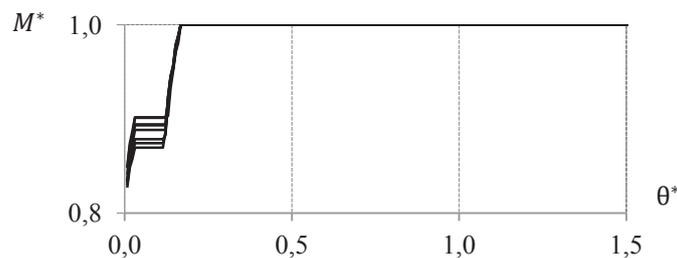


Рис. 3. Сравнение поперечных ускорений, полученных с помощью двух различных подходов: ———— конечноэлементное моделирование, ●●●●● — аналитическое решение для упрощенной модели

Выбранное из временного процесса пиковое значение изгибающего момента определяет уровень эквивалентных усилий, принимаемых для проведения прочностного расчета, и выступает изменяющимся параметром при варьировании параметров внешнего воздействия в поперечном направлении [16].

На основе значений динамических ускорений получены зависимости (рис. 4). Они показывают, как изменение пиковых значений изгибающего момента  $M$  для различных сечений РН связано с параметром  $\theta$ , характеризующим продолжительность действия порыва. На рис. 4 значения изгибающего момента представлены в виде безразмерных величин  $M^*$ . Они рассчитаны делением размерного изгибающего момента на максимальное значение для данного сечения (например для сечения  $x = 0,3L$  максимальное значение  $M_{max} = 4,6 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ), найденное при варьировании величины  $\theta$  во всем рассматриваемом диапазоне.



a)

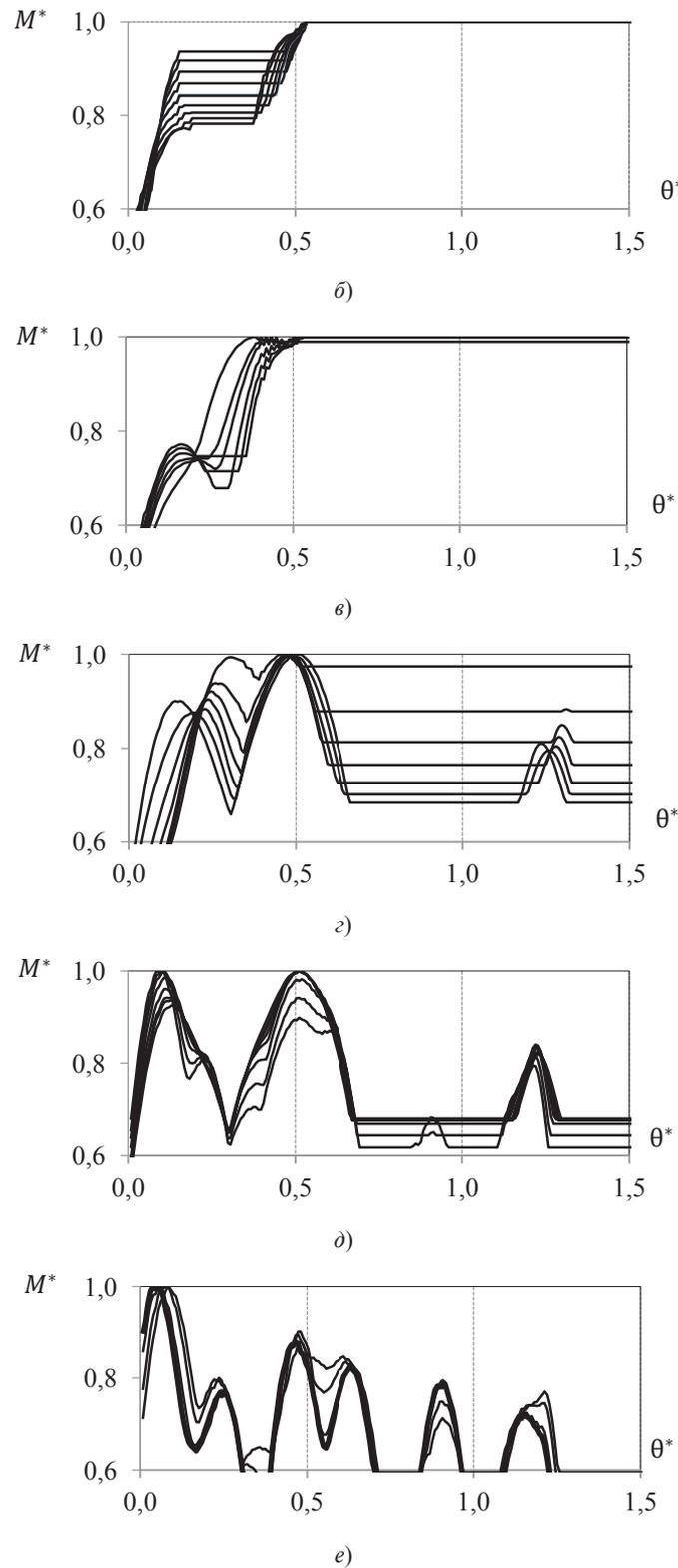


Рис. 4. Зависимость значения безразмерного изгибающего момента  $M^*$  от продолжительности действия порыва ветра  $\theta^*$ , выраженной в долях периода  $T_1$  для различных сечений РН: зона 1 ( $x = 0,0 - 0,2L$ ) (а); зона 2 ( $x = 0,2L - 0,4L$ ) (б); зона 3 ( $x = 0,4L - 0,55L$ ) (в); зона 4 ( $x = 0,55L - 0,75L$ ) (г); зона 5 ( $x = 0,75L - 0,9L$ ) (д); зона 6 ( $x = 0,9L - L$ ) (е)

Итак, продолжительность действия порыва на графиках представлена безразмерной величиной  $\theta^*$ , полученной путем деления параметра  $\theta$  на период  $T_1$  первого тона колебаний РН. Каждая линия графика соответствует одному сечению РН. Все сечения РН сгруппированы по характеру функции  $M^*(\theta^*)$  и приведены на различных графиках, а длина РН соответствующим образом разделена на зоны (рис. 5).

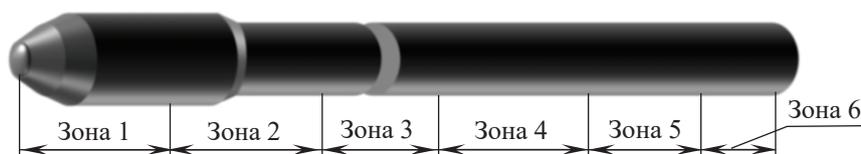


Рис. 5. Зоны сечений РН

Из рис. 4 видно, что для первой зоны максимум изгибающего момента достигается уже при значениях  $\theta$  не менее 15 % от периода  $T_1$  первого тона колебаний. Для второй и третьей зон — несколько больше половины периода  $T_1$ . Дальнейшее увеличение значений  $\theta$  не влияет на величины максимальных значений изгибающего момента. Для зон 4–6 максимум значения изгибающего момента оказывается локальным и располагается в зоне значений  $\theta$ , близких к величине половины периода  $T_1$  первого тона колебаний РН. Полученные результаты полностью соответствуют итогам конечноэлементного моделирования, проведенного ранее<sup>6</sup>.

Таким образом, для получения максимальных значений изгибающего момента в сечениях рассматриваемой РН необходим динамический анализ поведения конструкции с внешним воздействием в виде порыва ветра, продолжительность которого определяется параметром  $\theta$ , близким по значению к половине периода первого тона колебаний РН.

**Обсуждение и заключения.** С помощью метода наложений получены аналитические решения, описывающие движение системы с одной степенью свободы, на которую влияют сила трения и внешняя сила, меняющаяся по трапецеидальному закону. Приведена методика применения полученных аналитических решений для систем с большим числом степеней свободы. Показано хорошее совпадение двух видов решений:

- аналитических, для ускорений точек РН, найденных по упрощенной модели;
- численных, полученных по полной конечноэлементной модели РН.

Показано, что аналитические решения могут применяться для анализа динамических силовых факторов с целью выбора продолжительности порыва ветра, при воздействии которого достигаются максимальные нагрузки в сечениях корпуса РН. Аналогично можно анализировать перегрузки, которые достигаются в сечениях РН (например, в точках установки систем измерения).

Кроме того, на основании предложенной методики можно построить полный цикл предварительного расчета нагрузок в случае, когда возможно аналитическое представление внешней динамической нагрузки. Анализ нагружения на основе аналитических решений весьма экономичен с точки зрения расчетного времени и может быть прекрасной альтернативой конечноэлементному моделированию на этапе проектных расчетов, когда исследуется большое число вариантов комбинаций внешних нагрузок и конфигураций разрабатываемой конструкции. Конечноэлементный анализ подробной модели в этом случае можно использовать как уточняющий итоговый расчет.

#### Библиографический список

1. Основы отработки прочности ракетно-космических конструкций / А. В. Кармишин, А. И. Лиходед, Н. Г. Паничкин, С. Н. Сухинин. — Москва : Машиностроение, 2007. — 480 с.
2. Johnson, D. L. The Role of Terrestrial and Space Environments in Launch Vehicle Development / D. L. Johnson, W. W. Vaughan // Journal of Aerospace Technology and Management. — 2019. — Vol. 11. — e4719. <https://doi.org/10.5028/jatm.v11.1088>
3. Об особенностях расчета нагрузок для конструкций с переменными массово-инерционными характеристиками / А. В. Анисимов, С. Н. Золкин, А. И. Лиходед [и др.] // Космонавтика и ракетостроение. — 2012. — № 2 (67). — С. 120–128.
4. Гладкий, В. Ф. Динамика конструкции летательного аппарата / В. Ф. Гладкий. — Москва : Наука, 1969. — 495 с.
5. Suresh, B. N. Aerodynamics of Launch Vehicles / B. N. Suresh, K. Sivan / In book: Integrated Design for Space Transportation System. — New Delhi : Springer, 2015. — P. 391–454. [https://doi.org/10.1007/978-81-322-2532-4\\_10](https://doi.org/10.1007/978-81-322-2532-4_10)
6. Clark, J. B. Statistical Analysis of Atmospheric Flight Gust Loads Analysis Data / J. B. Clark, M. C. Kim, A. M. Kabe // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2000. — Vol. 37. — P. 443–445. <https://doi.org/10.2514/2.3602>

<sup>6</sup> Малыгина О. И., Глуговский М. С. Анализ влияния профиля порыва ветра на величину корпусных нагрузок ракеты-носителя в полетных случаях нагружения // Актуальные проблемы ракетно-космической техники (VI Козловские чтения) : мат-лы VI всерос. науч.-тех. конф. Самара, 2019. Т. 1. С. 133–138.

7. Kim, M. C. Atmospheric Flight Gust Loads Analysis / M. C. Kim, A. M. Kabe, S. S. Lee // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2000. — Vol. 37. — P. 446–452. <https://doi.org/10.2514/2.3603>
8. Linearized Aeroelastic Gust Response Analysis of a Launch Vehicle / F. Mastroddi, F. Stella, D. Cantiani, F. Vetrano // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2011. — Vol. 48. — P. 420–432. <https://doi.org/10.2514/1.47268>
9. Jayasidhan, A. K. Dynamic Response of a Launch Vehicle to Wind Gust / A. K. Jayasidhan, J. Rose, R. Neetha // International Journal of Engineering Development and Research (IJEDR). — 2015. — Vol. 3. — P. 1–6.
10. Золкин, С. Н. Исследование нагружения ракеты-носителя тяжелого класса при движении в плотных слоях атмосферы / С. Н. Золкин // Труды МАИ. — 2011. — № 45. — С. 1–12.
11. Sengupta, D. A simplified model for hydroelasticity of containerships / D. Sengupta, R. Datta, D. Sen // Journal of Engineering Mathematics. — 2021. — Vol. 129. — P. 1–30. <https://doi.org/10.1007/s10665-021-10142-2>
12. Xiang, Z. Synergic identification of prestress force and moving load on prestressed concrete beam based on virtual distortion method / Ziru Xiang, Tommy Chan, David Thambiratnam, Andy Nguyen // Smart Structures and Systems. — 2016. — Vol. 17. — P. 917–933. <https://doi.org/10.12989/sss.2016.17.6.917>
13. Механика контейнерного старта ракеты при действии поперечных нагрузок / А. А. Александров, Д. К. Драгун, А. И. Забегаев, В. В. Ломакин // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2013. — № 3 (15). — С. 1–10.
14. Кирилин, А. Н. Проектирование, динамика и устойчивость движения ракет-носителей. Методы, модели, алгоритмы, программы в среде MathCad / А. Н. Кирилин, Р. Н. Ахметов, А. В. Соллогуб. — Москва : Машиностроение, 2013. — 296 с.
15. Johnson, D. L. The Wind Environment Interactions Relative to Launch Vehicle Design / D. L. Johnson, W. W. Vaughan // Journal of Aerospace Technology and Management. — 2020. — Vol. 12. — e0220. — P. 1–13. <https://doi.org/10.5028/jatm.v12.1090>
16. Титов, В. А. Оценка влияния квазистатического изгиба конструкции ракеты-носителя на нагрузки в зоне прохождения максимального скоростного напора / В. А. Титов // Космонавтика и ракетостроение. — 2013. — № 1 (70) — С. 76–82.

Поступила в редакцию 24.12.2021

Поступила после рецензирования 17.01.2022

Принята к публикации 23.01.2022

*Об авторе:*

**Малыхина Ольга Игоревна**, инженер-конструктор первой категории АО «Ракетно-космический центр «Прогресс»» (443009, РФ, г. Самара, ул. Земеца, 18), [ORCID](https://orcid.org/), [maloliya@ya.ru](mailto:maloliya@ya.ru)

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

# МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

## MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE



Научная статья



УДК 621.7

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-42-49>

### Отделочно-зачистная обработка длинномерных деталей в винтовых роторах

В. А. Лебедев<sup>1</sup> , Л. М. Р. Аль-Обайди<sup>1,2</sup>  , Н. С. Коваль<sup>1</sup> 

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

<sup>2</sup>Технологический институт Багдада Среднего технического университета (Багдад, Республика Ирак)

 [luayrajab@yahoo.com](mailto:luayrajab@yahoo.com)

**Введение.** Для поиска эффективных методов отделочно-зачистной обработки длинномерных деталей целесообразно создать роторно-винтовую технологическую систему проходного типа. Основной ее рабочий элемент — винтовой ротор, представляющий собой сочетание плоских элементов различной формы и типоразмеров, разнонаправленных по отношению к винтовым линиям по периметру.

Цель настоящего исследования — обоснование интенсивности процесса обработки в устройствах, оснащенных винтовым ротором.

**Материалы и методы.** В качестве основного параметра, определяющего интенсивность процесса обработки деталей в винтовых роторах, принят съем металла. В рамках представленного исследования обработка выполнялась на экспериментальной роторно-винтовой установке. Обработываемая среда состояла из формованных абразивных гранул марки ПТ 10×10. Условия исследования:

- объем загрузки (без детали) — 60 %,
- скорость вращения ротора — 50 об/мин,
- время обработки — 30, 60, 90 мин,
- углы наклона оси винтового ротора — 0° и 5°.

Влияние режимов и условий обработки на интенсивность процесса рассматривалось на пластинчатых образцах с размерами 80×10×1 мм из алюминиевого сплава Д16Т. Для определения съема металла образцы до и после обработки взвешивали на аналитических весах Ohaus AX223.

**Результаты исследования.** Представлены закономерности съема металла с образцов при различных продолжительности обработки, расположении образцов в рабочей зоне винтового ротора с разными углами наклона и скорости его вращения.

**Обсуждение и заключения.** Установленные в ходе исследований закономерности свидетельствуют об эффективности роторно-винтовых технологически систем для решения задач, связанных с отделочной обработкой длинномерных деталей. Основные факторы, обеспечивающие управление такой обработкой в устройствах с винтовым ротором и влияющие на его интенсивность (и, как следствие, — на производительность процесса): скорость вращения винтового ротора, форма периметра и угол наклона оси.

**Ключевые слова:** отделочно-зачистная обработка, винтовой ротор, длинномерные детали, обрабатываемая среда, интенсивность процесса, съем металла.

**Для цитирования:** Лебедев, В. А. Отделочно-зачистная обработка длинномерных деталей в винтовых роторах / В. А. Лебедев, Л. М. Р. Аль-Обайди, Н. С. Коваль // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 42–49. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-42-49>

© Лебедев В. А., Аль-Обайди Л. М. Р., Коваль Н. С. 2022



## The finishing and cleaning of long parts in screw rotors

Valery A. Lebedev<sup>1</sup> , Luay Mohammed Rajab Al-Obaidi<sup>1,2</sup> , Nikolay S. Koval<sup>1</sup> 

<sup>1</sup>Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

<sup>2</sup>Middle Technical University, Institute of Technology-Baghdad (Baghdad, Iraq)

**Introduction.** To search for effective methods of finishing and stripping of long-length parts, it is advisable to create a rotary-screw process system of a pass-through type. Its main working element is a screw rotor, which is a combination of flat elements of various shapes and sizes, multidirectional with respect to the helical lines around the perimeter. The purpose of this study is to justify the intensity of the machining process in devices equipped with a screw rotor.

**Materials and Methods.** Metal removal is accepted as the main parameter determining the intensity of the machining process in screw rotors. Within the framework of the presented study, processing was performed on an experimental rotary-screw installation. The processing medium consisted of molded abrasive pellets of the PT 10x10 brand. The research conditions were as follows: loading volume (without part) — 60 %; rotor speed — 50 rpm; processing time — 30, 60, 90 min; rotor axis tilt angles — 0° and 5°. The influence of treatment modes and conditions on the process intensity was considered on plate samples with dimensions of 80×10×1 mm made of aluminum alloy D16T. To determine metal removal, the samples were weighed on Ohaus AX223 analytical balance before and after processing.

**Results.** The patterns of metal removal from samples at different processing times, the location of samples in the working area of a screw rotor with different angles of inclination, and its speed are presented.

**Discussion and Conclusions.** The regularities established in the course of research indicate the efficiency of rotary-screw process systems for solving problems on the finishing treatment of long-length parts. The main factors that control such processing in devices with a screw rotor and affect its intensity (and, as a consequence, the process performance) are the screw rotor speed, the shape of the perimeter, and the axis angle.

**Keywords:** finishing and cleaning, screw rotor, long parts, processing medium, process intensity, metal removal.

**For citation:** V. A. Lebedev, L. M. R. Al-Obaidi, Nikolay S. Koval. The finishing and cleaning of long parts in screw rotors. *Advanced Engineering Research*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 42–49. (In Russ). <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-42-49>

**Введение.** Поиск эффективных путей отделочно-зачистной обработки длинномерных деталей [1–6] предопределил создание для решения этой задачи роторно-винтовой технологической системы проходного типа (рис. 1) [7–15]<sup>1, 2</sup>.

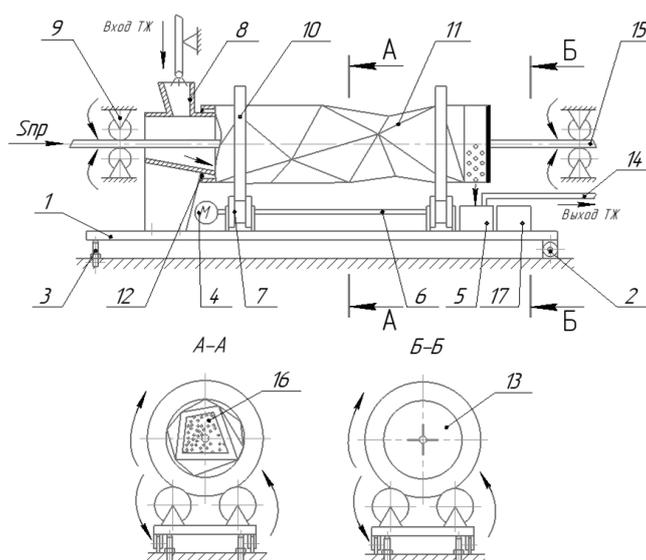


Рис. 1. Технологическая схема отделочно-зачистной обработки длинномерных деталей в винтовом роторе:

- 1 — установочная рама, 2 — проушины, 3 — регулировочные винты, 4 — двигатель, 5 — бак-отстойник, 6 — приводные валы, 7 — роликовые опоры, 8 — обечайки, 9 — ролики, 10 — ободы, 11 — винтовой ротор, 12 — прокладка, 13 — прокладка с прорезью, 14 — система трубопроводов, 15 — деталь, 16 — обрабатывающая среда, 17 — контейнер

<sup>1</sup> Устройство для вибрационной обработки длинномерных деталей : патент 2228252 Рос. Федерация : В24В 31/06 / А. П. Бабичев, И. А. Бабичев, Г. В. Серга. № 2002135225/02 ; заявл. 25.12.2002 ; опубл. 10.05.2004, Бюл. № 13. 7 с.

<sup>2</sup> Агрегат для отделочно-зачистной обработки длинномерных деталей : патент 2750922 Рос. Федерация : В 24В 31/06 / В. А. Лебедев, Л. М. Р. Аль-Обайди, Н. С. Коваль, Г. В. Серга. № 2020119703 ; заявл. 15.06.2020 ; опубл. 06.07.2021, Бюл. № 19. 27 с.

Основным рабочим элементом этого типа технологической системы является винтовой ротор. Его периметр выполнен в виде сочетания плоских элементов различной формы и типоразмеров, разнонаправленных по отношению к винтовым линиям по их наружной поверхности. Обрабатываемая гранулированная среда находится внутри вращающегося винтового ротора. Увлекаемая плоскими элементами, в определенный момент под действием силы тяжести она лавинообразно скатывается вниз. При этом верхние слои масс загрузки вращаются вокруг собственных осей, втягивая близлежащие слои частиц масс загрузки. В результате частицы масс загрузки перекаатываются относительно друг друга. К тому же при скатывании лавиной по неровной поверхности нижележащих слоев происходят удары небольшой силы и скольжение частиц масс загрузки. Таким образом, деталь обрабатывается истиранием, царапанием и в небольшой мере ударами. Технологический эффект обработки зависит от габаритов винтового ротора, масс частиц обрабатываемой среды, коэффициента заполнения рабочей камеры, скорости вращения, геометрии винтового ротора и ряда других факторов.

Цель представленного исследования — обоснование интенсивности процесса обработки в устройствах, оснащенных винтовым ротором.

**Материалы и методы.** В качестве основного параметра, определяющего интенсивность процесса обработки деталей в винтовых роторах, принят съем металла.

Для обработки использовали экспериментальную роторно-винтовую установку, изготовленную на базе токарно-винторезного станка модели 1К625 (рис. 2).



Рис. 2. Общий вид экспериментальной роторно-винтовой установки

Обрабатываемая среда состояла из формованных абразивных гранул марки ПТ 10×10. Условия исследования:

- объем загрузки (без детали) — 60 %,
- скорость вращения ротора — 50 об/мин,
- время обработки — 30, 60, 90 мин,
- углы наклона оси винтового ротора —  $0^\circ$  и  $5^\circ$ .

Влияние режимов и условий обработки на интенсивность процесса рассматривалось на пластинчатых образцах с размерами  $80 \times 10 \times 1$  мм из алюминиевого сплава Д16Т. Из этого материала выполнены заготовки в виде длинномерного проката, требующего отделки и зачистки перед запуском в производство.

В рабочей зоне экспериментального винтового ротора по длине рабочей зоны определялись три сечения  $A, B, C$  (рис. 3), удаленные от левого торца винтового ротора на расстояния  $l_0, l_1, l_2$ .

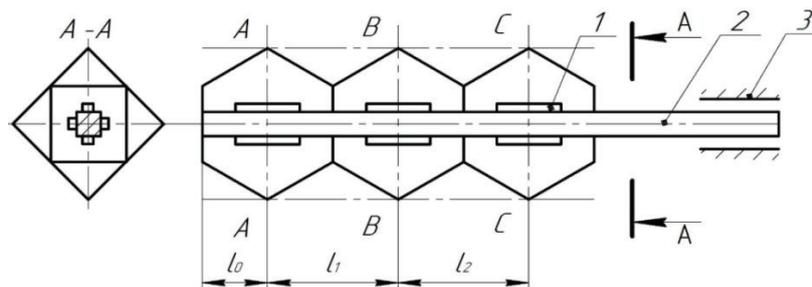


Рис. 3. Схема установки образцов на оправке в роторе:  
1 — образцы; 2 — оправка; 3 — резцедержатели суппорта токарного станка

Образцы закреплялись на длинномерном четырехгранном полем стержне и устанавливались по схеме, представленной на рис. 3. Расстояния  $l_0, l_1, l_2$  соответствуют положению сечений рабочей зоны ротора. Для оценки характера воздействия обрабатывающей среды на различные поверхности оправки в каждом положении (сечении) обрабатывалось по 4 образца. Их закрепляли на гранях оправки таким образом, что образцы 1 и 2 находились в зоне активного воздействия обрабатывающей среды (со скользящим слоем), а образцы 3 и 4 — в пассивной зоне (рис. 4).

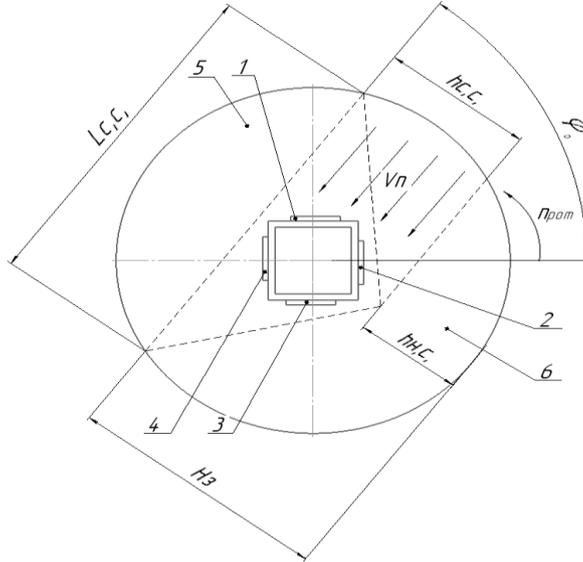


Рис. 4. Схема расположения образцов на оправке в сечении:

1, 2, 3, 4 — образцы; 5 — винтовой ротор; 6 — обрабатывающая среда

Оправка с образцами устанавливалась в резцедержателе суппорта токарного станка и вводилась в рабочую зону винтового ротора для обработки.

Для определения массового съема металла образцы взвешивали до и после обработки на аналитических весах Ohaus AX223. Данная модель предназначена для статических измерений массы веществ и материалов с точностью до 0,001 г. Съем металла контролировали после тщательной мойки и сушки образцов.

Удельный съем металла с единичной площади поверхности, равной площади квадрата упаковки гранул обрабатывающей среды, определялся из соотношения

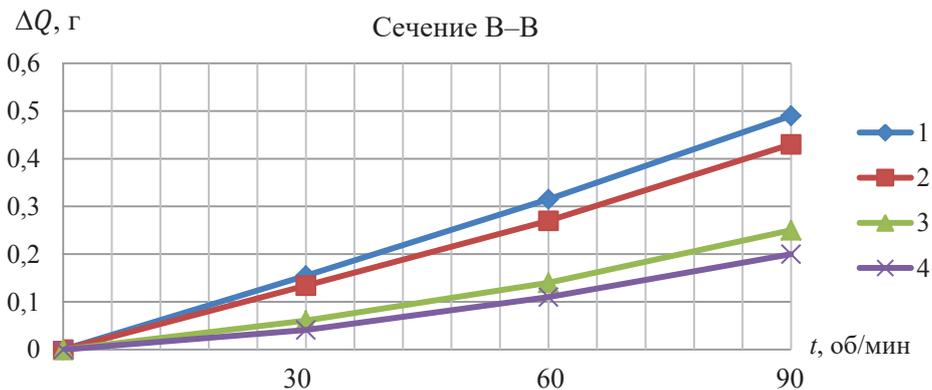
$$\gamma_{уд} = \frac{\Delta Q S_{уп}}{S \cdot t}, \text{ г/с,}$$

где  $\Delta Q$  — съем металла с поверхности, г;  $t$  — время обработки, с;  $S$  — площадь обрабатываемой поверхности образцов,  $\text{мм}^2$ ;  $S_{уп}$  — площадь квадрата упаковки гранул обрабатывающей среды,  $\text{мм}^2$ .

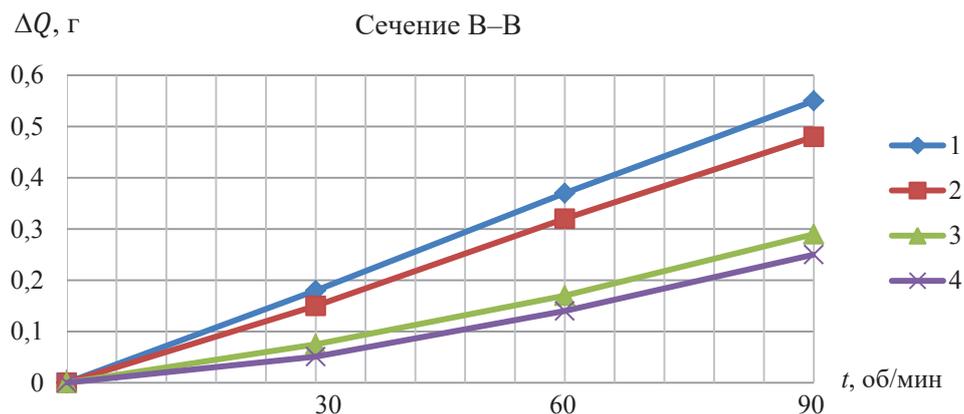
Продолжительность обработки фиксировалась с помощью реле времени (таймер) модели ВЛ-45УХЛ41.

Результаты экспериментов определялись как среднеарифметическая разность соответствующих значений измерений образцов или партии образцов до и после обработки.

**Результаты исследования.** На рис. 5–7 приведены результаты экспериментальных исследований интенсивности процесса обработки в винтовом роторе.

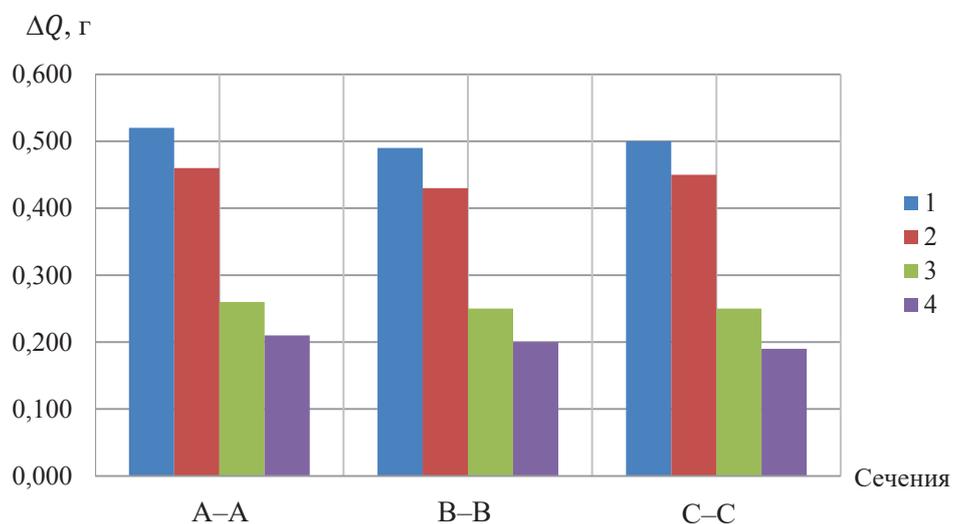


а)

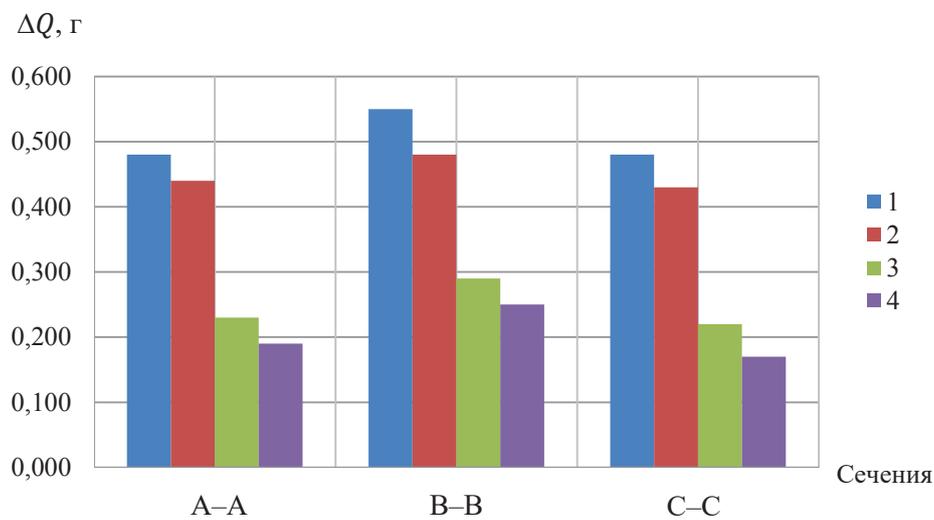


б)

Рис. 5. Изменение съема материала с образцов Д16Т в зависимости от продолжительности обработки и расположения образцов на оправке: с углом наклона 0° (а); с углом наклона 5° (б)



а)



б)

Рис. 6. Изменение съема металла с образцов Д16Т в зависимости от их расположения в рабочей зоне винтового ротора (за 90 мин): с углом наклона 0° (а); с углом наклона 5° (б)

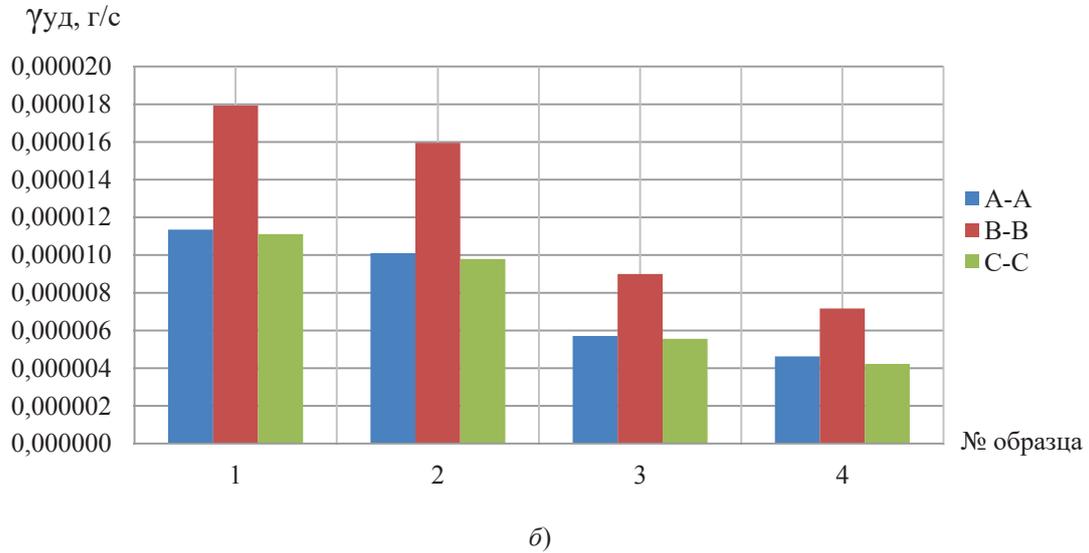
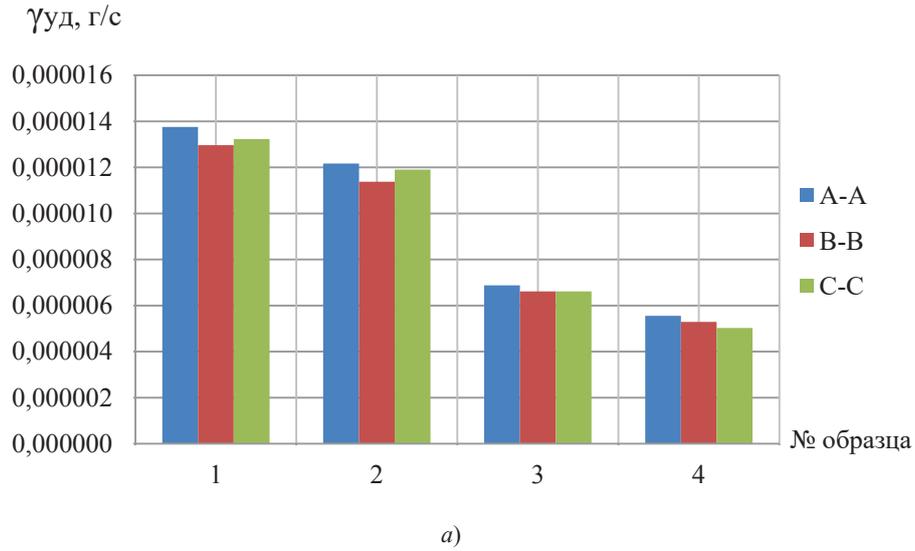


Рис. 7. Изменение удельного съема металла с образцов Д16Т в зависимости от их расположения на оправке (за 90 мин): с углом наклона 0° (а); с углом наклона 5° (б)

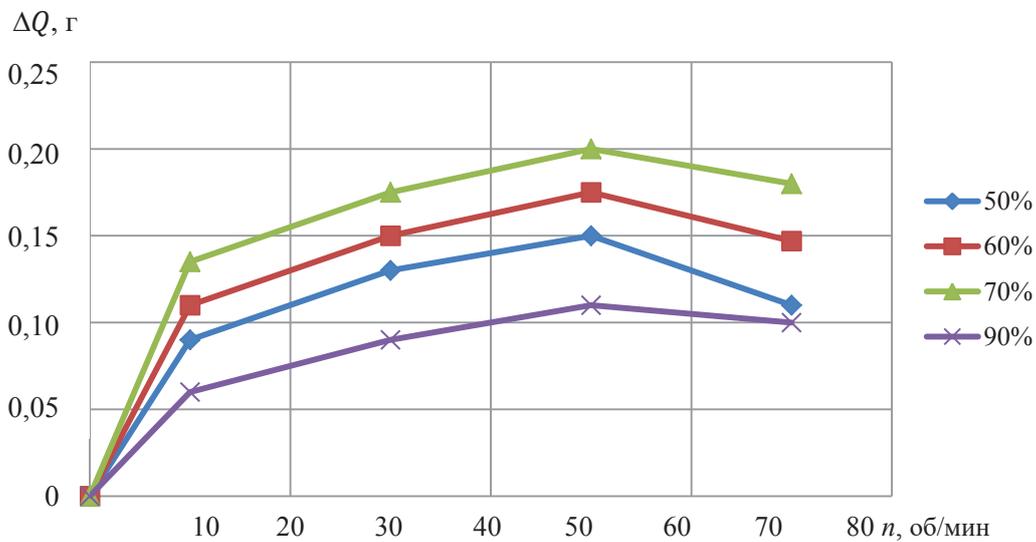


Рис. 8. Изменение съема металла с образцов Д16Т в зависимости от загрузки рабочей зоны винтового ротора обрабатываемой средой и скорости вращения (за 30 мин)

**Обсуждение и заключения.** Результаты исследований позволяют сделать ряд утверждений.

1. Вид кривой, описывающей изменение величины съема металла с поверхности от продолжительности обработки, близок к линейному (рис. 5). Это не зависит от расположения образцов в рабочей зоне винтового ротора, его конструктивного исполнения и угла наклона по отношению к оси вращения.

2. Кинетика движения частиц и, как следствие, интенсивность съема металла в различных сечениях рабочей зоны винтового ротора определяются углом наклона пластин, создающих форму рабочих секций ротора. При их одинаковой форме (рис. 3) обеспечивается практически одинаковая интенсивность обработки. Разница величин съема в трех сечениях составила 3 %.

3. Интенсивность обработки (рис. 5–7) зависит от положения поверхности образцов по отношению к направлению движения гранул скользящего слоя (рис. 4). Сравнивались два случая съема металла. Первый: с образцов 1 и 2, установленных в активной зоне воздействия обрабатываемой среды. Второй: с образцов 3 и 4, установленных в пассивной зоне, характеризующейся слабым энергосиловым взаимодействием с обрабатываемой поверхностью. В первом случае съем металла вдвое выше.

4. Изменение угла наклона оси винтового ротора по отношению к оси его вращения увеличивает интенсивность процесса обработки образцов в среднем сечении (В–В) в 1,2 раза и снижает ее в рабочих зонах крайних секций (рис. 5–7). Это обусловлено изменением кинематики движения обрабатываемой среды в рабочей зоне винтового ротора. При каждом полном обороте обрабатываемая среда стремится переместиться в среднюю часть рабочей зоны ротора (сечение В–В). Так обеспечиваются:

— постоянство давления объема среды на образцы;

— активация ударно-импульсного воздействия гранул обрабатываемой среды на поверхность образцов.

Кроме того, при изменении угла наклона оси винтового ротора снижается осевое давление обрабатываемой среды на торцевые стенки. Это очень важно для установок проходного типа, т. к. исключает высыпание гранул из отверстий, предназначенных для прохождения длиномерных деталей через рабочую зону.

5. Скорость вращения винтового ротора — важный технологический фактор, определяющий интенсивность процесса обработки в роторно-винтовой установке. Из рис. 8 видно, что при различной степени загрузки величина съема материала со всех образцов растет с увеличением скорости вращения винтового ротора до 50 об/мин. При повышении скорости до 70 об/мин показатель снижается. Это вызвано усилением центробежных сил. Их действие приводит к тому, что некоторый объем частиц обрабатываемой среды постоянно находится у стенок ротора. В результате сокращается количество скользящих слоев обрабатываемой среды, и, следовательно, снижается интенсивность воздействия на поверхность образцов.

Установленные в ходе исследований закономерности и технологические возможности процесса обработки в винтовом роторе свидетельствуют о приемлемости и эффективности применения роторно-винтовых технологических систем для решения задач, связанных с отделочной обработкой длиномерных деталей.

В проведенных изысканиях основными рассматриваемыми факторами были: скорость вращения винтового ротора, угол наклона его оси и форма периметра. Они обеспечивают управление отделочной обработкой в устройствах с винтовым ротором, влияют на его интенсивность, а значит, и на производительность процесса.

#### Библиографический список

1. Применение вибрационных технологий на операциях отделочно-зачистной обработки деталей / А. П. Бабичев, П. Д. Мотренко, Л. К. Гиллеспи [и др.]. — Ростов-на-Дону : Изд. центр ДГТУ, 2010. — 285 с.

2. Бабичев, А. П. Основы вибрационной технологии / А. П. Бабичев, И. А. Бабичев. — 2-е изд., перераб. и доп. — Ростов-на-Дону : Изд. центр ДГТУ, 2008. — 693 с.

3. Бутенко, В. И. Финишная обработка поверхностей деталей: способы, устройства, инструменты / В. И. Бутенко. — Ростов-на-Дону : Изд. центр ДГТУ, 2016. — 219 с.

4. Tamarkin, M. A. Optimization of Dynamic Surface Plastic Deformation in Machining / M. A. Tamarkin, E. E. Tishchenko, A. S. Shvedova // Russian Engineering Research. — 2018. — Vol. 38. — P. 726–727. <https://doi.org/10.3103/S1068798X18090277>

5. Тамаркин, М. А. Основы оптимизации процессов обработки деталей свободным абразивом / М. А. Тамаркин, Э. Э. Тищенко. — Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2015. — 140 p.

6. Li Xin. Prediction of seal wear with thermal structural coupled finite element method / Li Xin, Peng Gaoliang, Li Zhe // Finite Elements in Analysis and Design. — 2014. — Vol. 83. — P. 10–21. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2014.01.001>

7. Таратута, В. Д. Роторно-винтовые системы для зерноуборочных комбайнов / В. Д. Таратута, К. А. Белокур, Г. В. Серга // Труды Кубанского государственного аграрного университета. — 2015. — № 57. — С. 197–206.
8. Pesin, M. V. Improving the Reliability of Threaded Pipe Joints / M. V. Pesin // Russian Engineering Research. — 2012. — Vol. 32. — P. 210–212. <https://doi.org/10.3103/S1068798X12020232>
9. Macdonald, K. A. Failure analysis of drillstrings / K. A. Macdonald, J. V. BJune // Engineering Failure Analysis. — 2007. — Vol. 14. — P. 1641–1666. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.11.073>
10. Xiao-Hua Zhu. The parameter sensibility analysis for fishing box tap based on the overall process of elastoplasticity in oil and gas wells / Xiao-Hua Zhu, Yu Wang, Hua Tong // Mathematical and Computer Modeling. — 2013. — Vol. 58. — P. 1540–1547. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2013.06.004>
11. Determining the life cycle of bolts using a local approach and the Dang Van criterion / Y. Fares, M. Chaussumier, A. Daidié, J. Guillot // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. — 2006. — Vol. 29. — P. 588–596. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2006.01029.x>
12. Серга, Г. В. Исследование физических явлений, происходящих в зоне контакта частиц сыпучих материалов при их движении в винтовых барабанах, методами теории подобия, инженерной и компьютерной графики / Г. В. Серга, Д. Г. Серый, А. Ю. Марченко // Вестник Брянского государственного технического университета. — 2019. — № 6 (79). — С. 20–28. [https://doi.org/10.30987/article\\_5d10851f18f085.56011612](https://doi.org/10.30987/article_5d10851f18f085.56011612)
13. Повышение производительности технологических систем отделочно-зачистной и упрочняющей обработки деталей на основе винтовых роторов / Г. В. Серга, В. А. Лебедев, К. А. Белокур, Д. Я. Яковлев // Упрочняющие технологии и покрытия. — 2016. — № 4 (136). — С. 16–19.
14. The study of fine-cleaning treatment for removal of burrs in screw rotor / V. A. Lebedev, G. V. Serga, M. M. Chaava [et al.] / IOP Conference Series: Materials Science and Engineering this link is disabled. — 2021. — Vol. 1029. — Art. 012001. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1029/1/012001>
15. Lebedev, V. A. Method of Calculating the Machines Drive with Screw Working Bodies Mounted from Tetrahedral Hollows / V. A. Lebedev, G. V. Serga, M. M. Chaava // ICIE 2021: Proceedings of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020). — 2021. — P. 557–563. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-54814-8\\_64](https://doi.org/10.1007/978-3-030-54814-8_64)

Поступила в редакцию 29.12.2021

Поступила после рецензирования 24.01.2022

Принята к публикации 27.01.2022

*Об авторах:*

**Лебедев Валерий Александрович**, профессор кафедры «Технология машиностроения», Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, профессор, [Scopus](#), [ORCID](#), [va.lebedev@yandex.ru](mailto:va.lebedev@yandex.ru)

**Аль-Обайди Луан Мохаммед Раджаб**, аспирант кафедры «Технология машиностроения» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), преподаватель кафедры «Механические технологии» Среднего технического университета Технологического института Багдада (10074, Ирак, г. Багдад, ул. Аль-Зафарана), [Scopus](#), [ORCID](#), [luayrajab@yahoo.com](mailto:luayrajab@yahoo.com), [luay\\_mohammed@mtu.edu.iq](mailto:luay_mohammed@mtu.edu.iq)

**Коваль Николай Сергеевич**, доцент кафедры «Приборостроение и биомедицинская инженерия» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, доцент, [Scopus](#), [Researcher](#), [ORCID](#), [koval-nc@mail.ru](mailto:koval-nc@mail.ru)

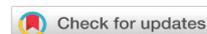
*Заявленный вклад соавторов:*

В. А. Лебедев — научное руководство, формирование основной концепции. Н. С. Коваль — определение целей и задач исследования, проведение расчетов, подготовка текста, формулирование выводов. Л. М. Р. Аль-Обайди — анализ результатов исследований, доработка текста, корректировка выводов.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

# МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

## MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE



Научная статья



УДК 621.9 + 621.2.082.18

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-50-56>

### Триботехнические свойства экспериментальных твёрдых сплавов с модифицированной кобальтовой связкой

Е. В. Фоминов  ✉, К. Г. Шучев , М. М. Алиев 

Донской государственный технический университет (Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

✉ [fominoff83@mail.ru](mailto:fominoff83@mail.ru)

**Введение.** Работа посвящена исследованию триботехнических характеристик экспериментальных твёрдых сплавов с модифицированной связкой при трении без смазки по труднообрабатываемым в процессе резания материалам — нержавеющей стали и титановому сплаву. Целью исследований является оценка процесса фрикционного взаимодействия для каждой пары трения по ряду параметров и определение на основании установленных трибопоказателей оптимальных сочетаний «экспериментальный твёрдый сплав — конструкционный материал».

**Материалы и методы.** Трибологические испытания твёрдых сплавов проводились по схеме трения «цилиндр-диск» для различных скоростей скольжения и температур при постоянной нагрузке без применения смазочного материала. Сравнение процесса фрикционного взаимодействия производилось по силе трения, объёмному износу и шероховатости дорожек трения на контртеле. В качестве материалов контртел применялись нержавеющая сталь 12X18H9T и титановый сплав ВТЗ-1. Определение устойчивости экспериментальных составов к абразивному виду изнашивания осуществлялось путём измерения поверхностной микротвёрдости на сканирующем нанотвердомере путём анализа толщины нанесенных индентором царапин.

**Результаты исследования.** По результатам микроидентификации наибольшей микротвёрдостью характеризуется экспериментальные сплавы 2.22 (связка 5,65%Co+1,8%Mo+0,6%Ti) и 2.23 (связка 5,1%Co+2,7%Mo+0,61%Ti). Для этих материалов средняя ширина царапины при различных усилиях была минимальна. В ходе трибологических испытаний наилучшие характеристики были зафиксированы для нержавеющей стали в сочетании со сплавом 2.22 и для пары трения «титановый сплав ВТЗ-1 — твёрдый сплав 2.23». Процесс трения для этого сочетания материалов характеризуется невысокими коэффициентами трения с низким уровнем флуктуаций, минимальным износом образцов и изменениями начального микрорельефа их поверхностей.

**Обсуждение и заключения.** В результате исследований установлены оптимальные с точки зрения трибологического взаимодействия пары трения: «титановый сплав ВТЗ-1 — твёрдый сплав 2.23» и «нержавеющая сталь 12X18H9T — твёрдый сплав 2.22». Процесс фрикционного взаимодействия для данных сочетаний материалов характеризуется минимальным объёмным износом, что будет способствовать повышению износостойкости инструмента на участках упругого контакта на передней и задней поверхностях.

**Ключевые слова:** твёрдые сплавы, износостойкость, нержавеющая сталь, титановый сплав.

**Для цитирования:** Фоминов, Е. В. Триботехнические свойства экспериментальных твёрдых сплавов с модифицированной кобальтовой связкой / Е. В. Фоминов, К. Г. Шучев, М. М. Алиев // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 50–56. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-50-56>

© Фоминов Е. В., Шучев К. Г., Алиев М. М., 2022



## Tribotechnical properties of experimental hard alloys with modified cobalt binder

Evgeniy V. Fominov  ✉, Constantine G. Shuchev , Muharbiy M. Aliev 

Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)

✉ [fominoff83@mail.ru](mailto:fominoff83@mail.ru)

**Introduction.** This paper discusses tribomechanical characteristics of experimental hard alloys with a modified cobalt binder under friction without lubrication on hard-to-cut materials – stainless steel and titanium alloy. The research objective is to evaluate the process of friction interaction for each friction pair according to a number of parameters, and to determine the optimal combinations of “experimental hard alloy – structural material” on the basis of the established tribological indicators.

**Materials and Methods.** Tribological tests of hard alloys were carried out using a cylinder-to-disc friction scheme for different sliding speeds and temperatures under constant load without the use of lubricants. Comparison of the friction interaction process was carried out by the frictional force, volumetric wear and roughness of the friction tracks on the counterbody. Stainless steel 12H18N9T and titanium alloy BT3-1 were used as counterbody materials. The resistance of experimental compositions to the abrasive type of wear was determined through measuring the surface dynamic microhardness on a scanning nanohardness tester by analyzing the thickness of the scratches caused by the indenter.

**Results.** According to the results of surface microindentation, the experimental alloys 2.22 (binder 5.65% Co + 1.8% Mo + 0.6% Ti) and 2.23 (binder 5.1% Co + 2.7% Mo + 0.61 % Ti) are characterized by the highest microhardness. For these materials, the average scratch width at various forces was minimal. During tribological tests, the best frictional characteristics were recorded for stainless steel in combination with experimental alloy 2.22, and for the friction pair “titanium alloy VT3-1 — hard alloy 2.23”. The friction of this combination of materials was characterized by low friction coefficients with a low level of fluctuations, minimal wear of samples, and changes in the initial microrelief of their surfaces.

**Discussion and Conclusions.** As a result of the research, the optimal friction pairs from the point of view of tribological interaction were established, specifically “titanium alloy VT3-1 — hard alloy 2.23” and “stainless steel 12X18N9T — hard alloy 2.22”. The frictional interaction for these combinations of materials is characterized by minimal volumetric wear, which will contribute to increasing the wear resistance of the tool in the areas of elastic contact on the front and rear surfaces.

**Keywords:** hard alloys, wear resistance, stainless steel, titanium alloy.

**For citation:** E. V. Fominov, C. G. Shuchev, M. M. Aliev. Tribological properties of experimental hard alloys with modified cobalt binder. *Advanced Engineering Research*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 50–56. (In Russ). <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-50-56>

**Введение.** Различные материалы на основе карбида вольфрама, в том числе и твёрдые сплавы (ТС), получили широкое распространение во многих отраслях современного производства благодаря ряду преимуществ в области физико-механических свойств [1–3]. Наибольшая доля (порядка 65 %) применяемых в металлообработке инструментальных режущих материалов (ИРМ) также принадлежит ТС, обеспечивающим высокие скорости резания при обработке различных конструкционных материалов [1, 4]. В настоящее время развивается множество направлений, связанных с улучшением эксплуатационных характеристик ТС различными методами [5–7]. Одним из них является создание новых составов связок для карбидных фаз [8–10]. На кафедре «Металлорежущие станки и инструмент» Донского государственного технического университета разработаны экспериментальные твердые сплавы (ЭТС) на базе однокарбидного сплава ВК8 с различными типами модифицированных связок<sup>1</sup>. Несмотря на то, что кобальт благодаря своим свойствам является наиболее распространённой связкой для ТС, применение этого металла экономически невыгодно ввиду его дефицитности и высокой цены. Экспериментальные сплавы характеризуются большими значениями тепловой энтропии модифицированной кобальтовой связки (таблица 1) и, следовательно, меньшими термоэда по отношению к карбиду вольфрама, что повышает электрохимическую устойчивость этих материалов [10–12]. Среди

<sup>1</sup> Рьжкин А. А., Месхи Б. Ч., Боков А. И. и др. Твёрдый сплав на основе карбида вольфрама (варианты): патент 2531332: Рос. Федерация: МПК С22С29/08 № 2012128284/02: заявл. 04.07.2012, опубл. 20.10.2014. Бюл. №29. 6с.

обрабатываемых с помощью твердосплавного инструмента материалов можно выделить титаново-алюминиевые сплавы и аустенитные нержавеющие стали. За счёт ряда характеристик эти материалы применяются для изготовления деталей в наиболее ответственных областях машиностроения, включая аэрокосмическое, атомное, пищевое и медицинское производства. Обработка резанием титановых сплавов и нержавеющих сталей затруднена в связи с их низкой теплопроводностью, высокими усилиями при резании, а также неудовлетворительными триботехническими характеристиками [13]. В этой связи исследование особенностей фрикционного взаимодействия вновь разрабатываемых ИРМ с упомянутыми материалами является весьма важной актуальной задачей. Учитывая современные экологические и экономические требования к организации производства, обработка этих конструкционных материалов происходит преимущественно в режиме минимальной подачи (MQL — minimum quantity lubrication) или без использования смазывающе-охлаждающих технологических сред (СОТС) [14, 15]. Тогда участки контакта ИРМ и материала обрабатываемой заготовки на передней и задней поверхностях режущего инструмента можно рассматривать как трибосистемы, функционирующие в режиме трения без СОТС или в режиме граничного трения. Это не исключает значительную долю металлического контакта. В этом случае на эксплуатационные параметры ИРМ, как элемента пары трения, будут оказывать значительное влияние его триботехнические характеристики в режиме сухого трения.

Настоящее исследование посвящено изучению триботехнических характеристик экспериментальных твёрдых сплавов при сухом трении по труднообрабатываемым резанием материалам, а также определению оптимального с точки зрения фрикционного взаимодействия сочетания «ЭТС — конструкционный материал». Данная работа является частью комплекса исследований физико-механических, трибологических и режущих свойств экспериментальных ТС с модифицированной кобальтовой связкой.

**Материалы и методы.** В качестве объектов исследования поверхностных механических характеристик выбраны нижеследующие составы ТС (таблица 1). Трибологические испытания проводились на инденторах квадратного сечения ( $a=5$  мм,  $R_a=0,1-0,12$  мкм) из трёх наиболее перспективных составов (2.21, 2.22 и 2.23) на трибометре Т-11(Польша), реализующего схему трения «палец-диск». В ходе проведения опытов фиксировалось изменение силы трения ( $F$ , Н) в зависимости от пути трения ( $L$ , м). Каждый эксперимент повторялся 3–5 раз, результаты опытов обрабатывались при помощи методов дисперсионного анализа [16]. В качестве материала вращающегося диска (контртела) были выбраны титановый сплав ВТ3-1 и нержавеющая сталь 12Х18Н9Т; шероховатость поверхности этих образцов находилась в пределах  $R_a$  0,12–0,15 мкм.

Таблица 1

Химический состав и термодинамические свойства ЭТС

| Марка твёрдого сплава | Состав   | Энтропия, Дж/моль·град |                       |
|-----------------------|--|------------------------|-----------------------|
|                       |  | $(S_{298}^0)_{WC}$     | $(S_{298}^0)_{связ.}$ |
| 1                     | 2  | 3                      | 4                     |
| 2.19                  | 92,63% WC+7,37% [1,52%Co+<br>+5,03%Fe+0,82%Cu] | 35,6                   | 28,60                 |
| 2.20                  | 92,38% WC+7,62% [3,6%Co+<br>+3,2%Fe+0,82%Cu]   |                        | 29,31                 |
| 2.21                  | 92,45% WC+7,55% [5,3%Co+1,43%Fe+0,82%Cu]       |                        | 29,83                 |
| 2.22                  | 91,95% WC+8,05% [5,65%Co+1,8%Mo+0,6%Ti]        |                        | 29,72                 |
| 2.23                  | 91,59% WC+8,41% [5,1%Co+2,7%Mo+0,61%Ti]        |                        | 29,59                 |
| 2.24                  | 90,62% WC+9,38%<br>[3,34%Co+5,44%Mo+0,6%Ti]    |                        | 29,22                 |
| ВК8<br>(Базовый)      | 92% WC + [7,5–8]%Co, Fe≤0,3%                   |                        | 28,50                 |

Исследования проводились при различных скоростях скольжения и температурах при постоянной нагрузке  $P=20$  Н. Масса образцов определялась на весах ЛВ 210-А. Шероховатость дорожек трения на

контртеле после проведения экспериментов измерялась на профилометре Abris-PM7 (Россия). Определение динамической микротвёрдости поверхностей ЭТС производилось на сканирующем нанотвердомере NanoSCAN-01 (Россия) путём анализа толщины нанесённых с различным усилием царапин. Исследования изношенных поверхностей образцов ЭТС осуществлялись на инвертированном микроскопе ZEISS Axio Vert. A1.

**Результаты исследования.** Наименьшая ширина царапин  $h$ , нанесённых при различных усилиях  $F_s$ , принадлежит сплавам 2.22 и 2.23, связка в которых была модифицирована группой Mo-Ti (таблица 2).

Таблица 2

Ширина царапины  $h$  при различных усилиях  $F_s$  по результатам склерометрии ЭТС

| $F_s, \text{ Н}$ | $h, \text{ мкм}$      |      |      |      |      |      |     |
|------------------|-----------------------|------|------|------|------|------|-----|
|                  | Марки твёрдых сплавов |      |      |      |      |      |     |
|                  | 2.19                  | 2.20 | 2.21 | 2.22 | 2.23 | 2.24 | ВК8 |
| 5                | 0,3                   | 0,2  | 0,5  | -    | -    | 1,5  | 1,1 |
| 15               | 1,3                   | 1,3  | 1,5  | 0,7  | 1,2  | 2,5  | 1,8 |
| 25               | 2,4                   | 1,8  | 2,4  | 1,2  | 1,8  | 3,3  | 2,9 |

Таким образом эти материалы характеризуются наибольшей твёрдостью поверхности на микроуровне, что предполагают лучшую устойчивость к абразивному виду изнашивания. Следует отметить, что в этих сплавах при усилиях  $F_s < 15 \text{ Н}$  заметных изменений поверхностного микрорельефа не было обнаружено. Наименьшую микротвёрдость по результатам испытаний продемонстрировал состав 2.24.

Для определения и сравнения износостойкости ТС производилось измерение потери массы индентора для каждой величины пути трения  $L$ , а затем определялся объёмный износ образцов  $\Delta V$  (рис. 1, 2).

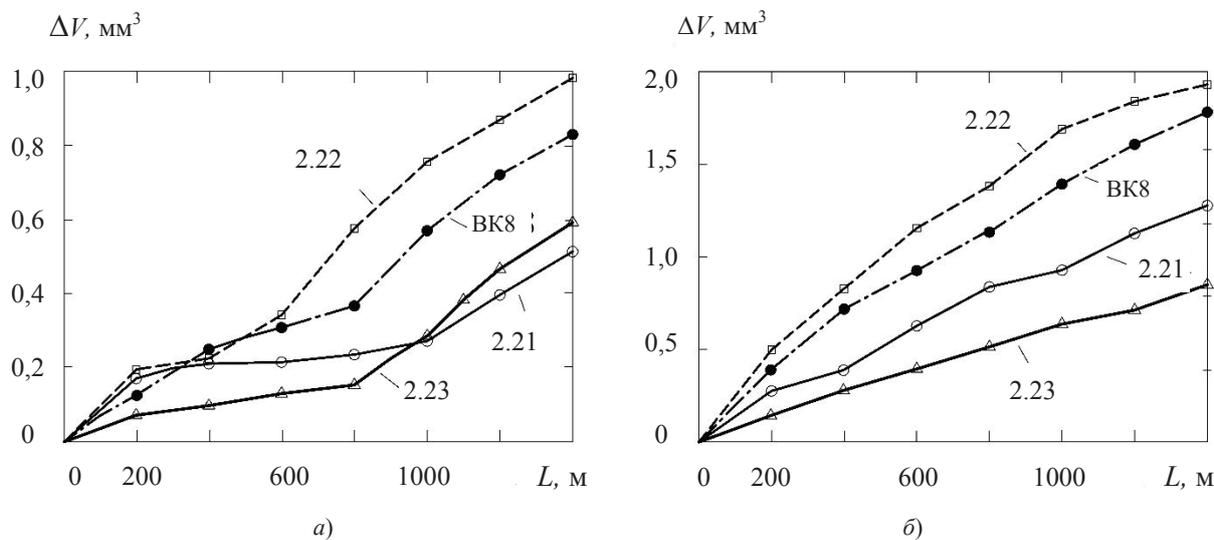


Рис. 1. Объёмный износ инденторов ЭТС при трении по титановому сплаву ВТЗ-1 при температурах: а — 25°C; б — 300°C

При трении по титановому сплаву при различных температурах наибольший объёмный износ  $\Delta V$  наблюдался у сплава 2.22. Наилучшую износостойкость продемонстрировал состав 2.23 (рис. 1). При трении по нержавеющей стали наименьшие значения параметра  $\Delta V$  были зафиксированы для состава 2.22 (рис. 2). Наибольший объёмный износ в этом случае также принадлежит экспериментальным составам ТС. При комнатной температуре самую высокую интенсивность изнашивания демонстрирует сплав 2.21, а при подогреве зоны трения максимальные значения износа фиксируются для состава 2.23.

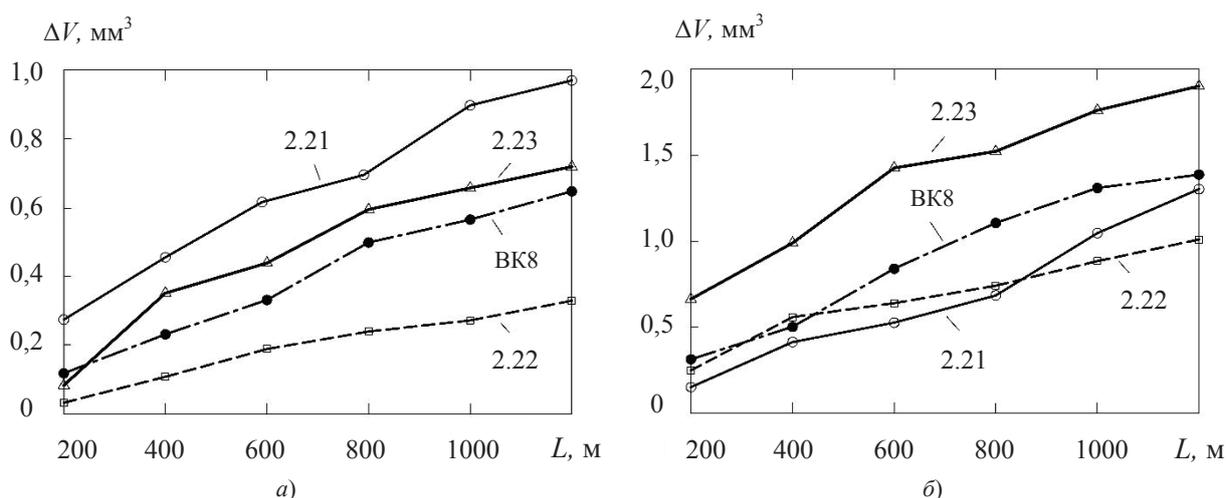


Рис. 2. Объёмный износ инденторов ЭТС при трении по нержавеющей стали 12X18H9T при температурах: а — 25°C; б — 300°C.

Поверхности инденторов из сплавов, продемонстрировавших максимальный объёмный износ, характеризуются либо преобладанием изношенных участков, либо изначальная поверхность материала сохраняется только в виде отдельных редких фрагментов. На рис. 3 приведены снимки поверхностей инденторов из сплавов 2.23 и BK8 после трения по стали 12X18H9T при температуре 300°C для пути трения  $L=600$  м.

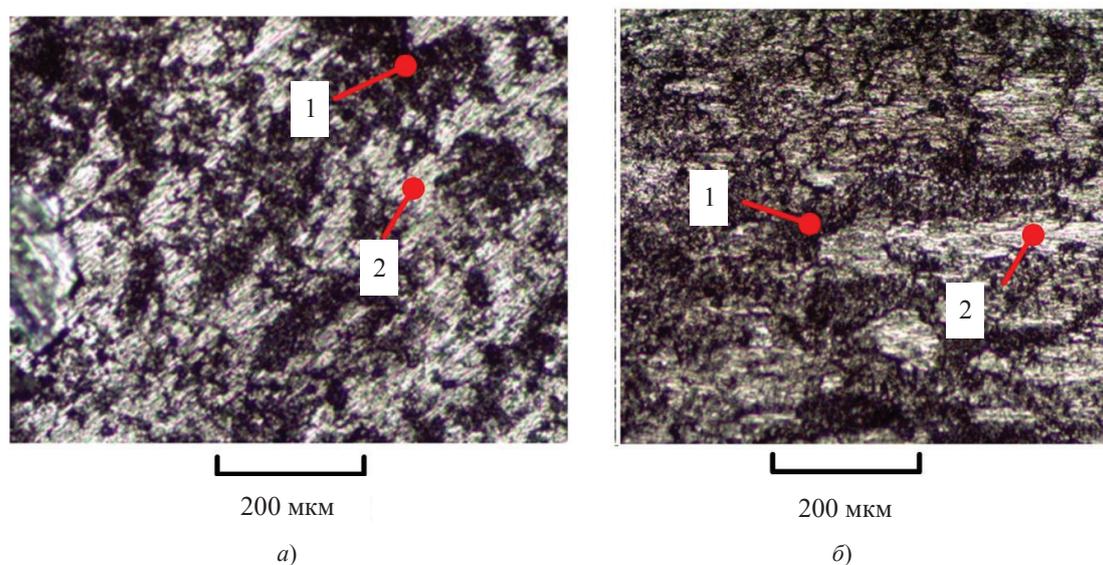


Рис. 3. Сравнение поверхностей инденторов сплавов 2.22 (а) и BK8(б) после трения по нержавеющей стали 12X18H9T ( $T=300^{\circ}\text{C}$ ,  $v=0,3$  м/с): 1 — изношенные участки поверхности; 2 — фрагменты исходной поверхности

Поверхность более износостойкого сплава 2.22 имеет пятнистую структуру с преобладанием начальных неизношенных участков (рис. 3 а). Поверхность базового сплава BK8 характеризуется большим масштабом разрушений, редкие фрагменты исходной поверхности расположены дискретно, их суммарная площадь при этом значительно меньше (рис. 3 б).

Оценка фрикционного взаимодействия пар трения производилась путём сравнения средних значений коэффициента трения  $f_{\text{ср}}$  и его флуктуаций без учёта стадии приработки I (рис. 4 а, б). Сравнение колебаний коэффициента трения осуществлялось по среднеквадратическому отклонению  $\sigma_{\text{ср}}$  этого параметра от  $f_{\text{ср}}$  на стадии установившегося трения II.

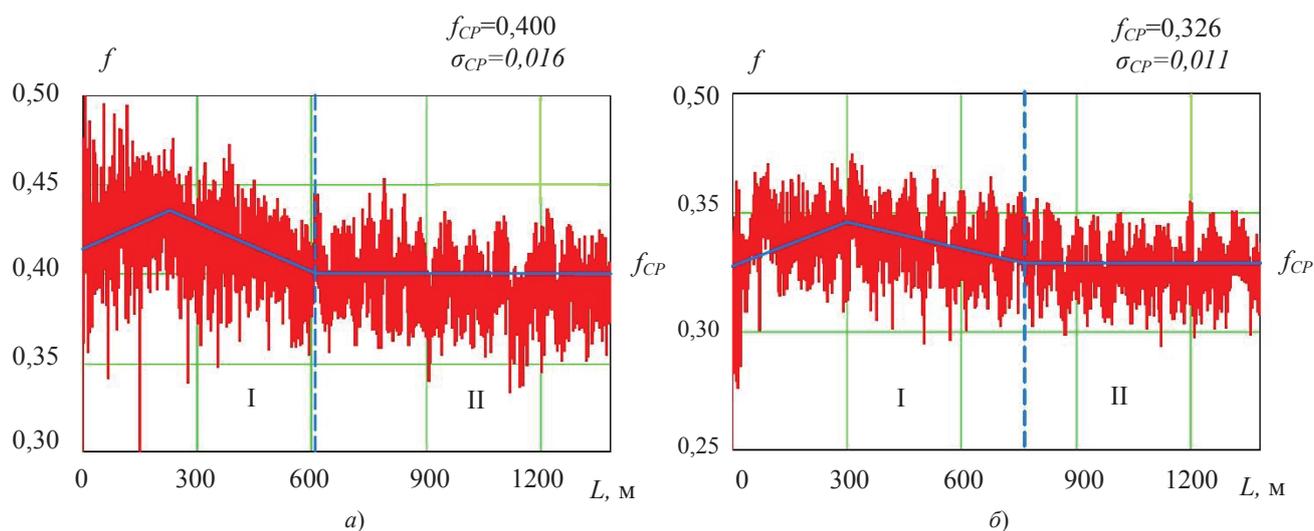


Рис. 4. Зависимость коэффициентов трения  $f$  от пути  $L$  при трении по сплаву ВТ3-1 ( $T=25^{\circ}\text{C}$ ,  $v=0,3$  м/с): а — 2.23; в — ВК8: I — стадия приработки; II — стадия стабильного трения

В случае трения по титановому сплаву при различных температурах средние коэффициенты трения и их среднеквадратичные отклонения у всех ЭТС были выше, чем для базовой марки ВК8. Однако, наименьшие значения этих параметров среди экспериментальных составов принадлежат сплаву 2.23 (рис. 4 а).

При трении по стали 12Х18Н9Т как при комнатной температуре, так и с подогревом наибольшие значения параметров  $f_{CP}$  и  $\sigma_{CP}$  принадлежат базовому сплаву ВК8 (при  $25^{\circ}\text{C}$ :  $f_{CP}=0,72$  и  $\sigma_{CP}=0,048$ ; при  $300^{\circ}\text{C}$ :  $f_{CP}=0,68$  и  $\sigma_{CP}=0,032$ ). Минимальные коэффициенты трения и его флуктуации в этой серии опытов были зафиксированы для состава 2.22. При трении без подогрева для этого материала значения оцениваемых параметров составили  $f_{CP}=0,44$  и  $\sigma_{CP}=0,025$ , а при  $300^{\circ}\text{C}$  увеличились до  $f_{CP}=0,57$  и  $\sigma_{CP}=0,029$ .

Произведено измерение и сравнение средних шероховатостей дорожек трения на контртелах для максимального значения пути трения. При трении по стали 12Х18Н9Т наименьшие значения этого параметра принадлежат сплаву 2.22. При температуре  $25^{\circ}\text{C}$  шероховатость составила  $Ra_{2,22}=4,12$  мкм, при  $300^{\circ}\text{C}$  —  $Ra_{2,22}=5,12$  мкм. Наибольшие значения шероховатости были зафиксированы при трении базового сплава ВК8. При комнатной температуре значение этого параметра составило  $Ra_{BK8}=5,07$  мкм, с подогревом зоны трения —  $Ra_{BK8}=5,95$  мкм. Высокие значения шероховатости свидетельствуют о том, что фрикционное взаимодействие этого материала с нержавеющей сталью сопровождалось более масштабными разрушениями в процессе образования и разрушением адгезионных и когезионных швов на поверхности материала контртела.

В серии опытов с титановым сплавом ВТ3-1 наилучшие показатели по шероховатости контртел были зафиксированы после трения экспериментального состава 2.23 ( $Ra_{2,23}=3,35$  мкм при  $25^{\circ}\text{C}$  и  $Ra_{2,23}=4,54$  мкм при  $300^{\circ}\text{C}$ ). Наибольшие поверхностные разрушения получили образцы после фрикционного взаимодействия со сплавом 2.22. Шероховатость поверхности при трении без подогрева составила  $Ra_{2,22}=6,88$  мкм, с подогревом —  $Ra_{2,22}=8,07$  мкм.

**Обсуждение и заключения.** В результате исследования трибологических характеристик экспериментальных твёрдых сплавов при трении по труднообрабатываемым материалам установлены наилучшие сочетания с точки зрения фрикционного взаимодействия пары материалов. Для нержавеющей стали 12Х18Н9Т лучшие трибопоказатели были зафиксированы при трении в сочетании со сплавом 2.22, для титанового сплава — с составом 2.23. Процесс трения для данных сочетаний материалов при различных температурах характеризуется минимальным объёмным износом, невысокими коэффициентами трения и меньшим масштабом разрушений поверхностей как твёрдосплавных инденторов, так и контртел из конструкционных материалов.

#### Библиографический список

1. Cemented carbide microstructures: A review / J. García, V. C. Ciprés, A. Blomqvist, B. Kaplan // Journal of Refractory Metals and Hard Materials. — 2019. — Vol. 80. — P. 40–68. <https://doi.org/10.1016/j.jrmhm.2018.12.004>
2. Ti(C,N) and WC-Based Cermets: A Review of Synthesis, Properties and Applications in Additive Manufacturing / L. Heydari, P. F. Lietor, F. A. Corpas-Iglesias, O. H. Laguna // Materials. — 2021. — Vol. 14. — Art. 6786. <https://doi.org/10.3390/ma14226786>
3. Micromechanical properties of WC-(W, Ti, Ta, Nb) C-Co composites / D. A. Sandoval, J. J. Roa, O. Ther [et al.] // Journal of Alloys and Compounds. — 2019. — Vol. 777. — P. 593–601. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2018.11.001>

4. Influence of Cemented Carbide Composition on Cutting Temperatures and Corresponding Hot Hardnesses / J. Pötschke, A. Kroedel, A. Vornberger [et al.] // Materials. — 2020. — Vol. 13. — Art. 4571. <https://doi.org/10.3390/ma13204571>
5. Analysis of Different Complex Multilayer PACVD Coatings on Nanostructured WC-Co Cemented Carbide / D. Ćorić, M. Šnajdar Musa, M. Sakoman, Ž. Alar // Coatings. — 2021. — Vol. 11. — Art. 823. <https://doi.org/10.3390/coatings11070823>
6. Siwak, P. Indentation Induced Mechanical Behavior of Spark Plasma Sintered WC-Co Cemented Carbides Alloyed with Cr<sub>3</sub>C<sub>2</sub>, TaC-NbC, TiC, and VC / P. Siwak // Materials. — 2021. — Vol. 14. — Art. 217. <https://doi.org/10.3390/ma14010217>
7. Yanju Qian. Microstructure and Properties of Ultrafine Cemented Carbides Prepared by Microwave Sintering of Nanocomposites / Yanju Qian, Zhiwei Zhao // Crystals. — 2020. — Vol. 10. — Art. 507. <https://doi.org/10.3390/cryst10060507>
8. Investigation on the mechanical properties of WC–Fe–Cu hard alloys / Zhao Zhenye, Lin Jianwei, Tang Huaguo [et al.] // Journal of Alloys and Compounds. — 2015. — Vol. 632. — P. 729–734. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2015.01.300>
9. Microstructure evolution of WC grains in WC–Co–Ni–Al alloys: Effect of binder phase composition / Jianzhan Long, Kai Li, Fei Chen [et al.] // Journal of Alloys and Compounds. — 2017. — Vol. 710. — P. 338–348. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.03.284>
10. Determination of the efficiency of high-entropy cutting tool materials / A. A. Ryzhkin, V. E. Burlakova, D. V. Moiseev [et al.] // Journal of Friction and Wear. — 2016. — Vol. 37. — P. 47–54. <https://doi.org/10.3103/S1068366616010153>
11. Ryzhkin, A. A. Wear and performance of hard alloys / A. A. Ryzhkin, V. E. Burlakova, A. A. Novikova // Russian Engineering Research. — 2018. — Vol. 38. — P. 438–441. <https://doi.org/10.3103/S1068798X18060151>
12. Рыжкин, А. А. О связи между износостойкостью и физическими свойствами инструментальных материалов / А. А. Рыжкин, В. В. Илясов // Вестник машиностроения. — 2000. — № 12. — С. 32–40.
13. Grzesik, W. Advanced Machining Processes of Metallic Materials: Theory, Modelling, and Applications, 2<sup>th</sup> ed. / Grzesik, W. — Elsevier. — 2017. — 578 p.
14. Analysis of Minimum Quantity Lubrication (MQL) for Different Coating Tools during Turning of TC11 Titanium Alloy / Sheng Qin, Zhongquan Li, Guoqiang Guo [et al.] // Materials. — 2016. — Vol. 9. — Art. 804. <https://doi.org/10.3390/ma9100804>
15. Leppert, T. Residual stresses in surface layer after dry and MQL turning of AISI 316L steel / Tadeusz Leppert, Ru Lin Peng // Production Engineering. — 2012. — Vol. 6. — P. 367–374. <https://doi.org/10.1007/s11740-012-0389-3>
16. Montgomery, D. C. Design and analysis of experiments. 8th ed. / D. C. Montgomery. — New York: John Wiley & Sons. — 2013. — 612 p.

Поступила в редакцию 10.01.2022

Поступила после рецензирования 28.01.2022

Принята к публикации 09.02.2022

*Об авторах:*

**Фоминов Евгений Валерьевич**, старший преподаватель кафедры «Инженерная и компьютерная графика» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, [Researcher ID](#), [Scopus ID](#), [ORCID](#), [fominoff83@mail.ru](mailto:fominoff83@mail.ru)

**Щучев Константин Григорьевич**, профессор кафедры «Металлорежущие станки и инструменты» Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, профессор, [Scopus ID](#), [ORCID](#), [cshuchev53@mail.ru](mailto:cshuchev53@mail.ru)

**Алиев Мухарбий Магометович**, доцент кафедры «Металлорежущие станки и инструменты», Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат технических наук, доцент, [Scopus ID](#), [ORCID](#), [m\\_aliev62@mail.ru](mailto:m_aliev62@mail.ru)

*Заявленный вклад соавторов:*

Е. В. Фоминов — формирование целей и задач исследования, проведение экспериментов, анализ результатов исследований, формирование выводов; К. Г. Щучев — научное руководство, анализ результатов исследований, доработка текста, корректировка выводов; М. М. Алиев — подготовка образцов, постэкспериментальное исследование образцов, доработка текста.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

# ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE, AND MANAGEMENT



Научная статья



УДК 681.3

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-57-66>

## Проблема обеспечения производительности доверенных систем управления с глубинным обучением

А. А. Зеленский  ✉, Т. Х. Абдулин , М. М. Жданова , В. В. Воронин , А. А. Грибков 

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН» (Москва, Российская Федерация)

✉ [Zelenskyaa@gmail.com](mailto:Zelenskyaa@gmail.com)

**Введение.** Рассмотрены значение машинного обучения в условиях цифровой трансформации промышленности, методы реализации глубинного обучения для обеспечения производительности доверительных систем управления. Определена необходимость использования для глубинного машинного обучения сверточных искусственных нейронных сетей. Кратко рассмотрены различные технологии и архитектуры реализации искусственных нейронных сетей, проведен сравнительный анализ их производительности. Целью работы является исследование необходимости разработки новых подходов к архитектуре вычислительных машин для решения задач глубинного машинного обучения при реализации доверительной системы управления.

**Материалы и методы.** В условиях цифровой трансформации использование искусственного интеллекта выходит на новый уровень. В основе технической реализации искусственных нейронных систем с глубинным машинным обучением лежит использование одной из трех базовых технологий: высокопроизводительных вычислений (HPC) с параллельной обработкой данных, нейроморфных вычислений (NC) и квантовых вычислений (QC).

**Результаты исследования.** Проведен анализ моделей реализации глубинного машинного обучения, базовых технологий и архитектуры вычислительных машин, а также требований по обеспечению доверия к системам управления, использующих глубинное машинное обучение. Выявлена проблема дефицита вычислительных мощностей для решения таких задач. Ни одна из существующих технологий не позволяет решать полный комплекс задач обучения и импеданса. Современный уровень технологий не обеспечивает информационной безопасности и надежности работы нейронных сетей. Практическая реализация доверенных систем управления с глубинным машинным обучением на базе имеющихся технологий для существенной части задач не обеспечивает достаточной производительности.

**Обсуждение и заключения.** Проведенное исследование позволило выявить проблему дефицита вычислительных мощностей для решения задач глубинного машинного обучения. На основе анализа требований к доверенным системам управления определены объективные сложности их реализации на базе существующих технологий и установлена необходимость разработки новых подходов к архитектуре вычислительных машин.

**Ключевые слова:** глубинное машинное обучение, процессор, доверенная система, информационная безопасность, вычислительная машина, искусственный интеллект.

**Для цитирования:** Проблема обеспечения производительности доверенных систем управления с глубинным обучением / А. А. Зеленский, Т. Х. Абдулин, М. М. Жданова [и др.] // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 57–66. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-57-66>

**Финансирование:** Работа выполнена по гранту Российского научного фонда No 21-79-10392, <https://rscf.ru/project/21-79-10392/>

© Зеленский А. А., Абдулин Т. Х., Жданова М. М., Воронин В. В., Грибков А. А., 2022



## Challenge of the performance management of trust control systems with deep learning

Aleksandr A. Zelensky  ✉, Tagir K. Abdullin , Marina M. Zhdanova , Vyacheslav V. Voronin ,

Andrey A. Gribkov 

Moscow State Technological University “STANKIN” (Moscow, Russian Federation)

✉ [Zelenskyaa@gmail.com](mailto:Zelenskyaa@gmail.com)

**Introduction.** The significance of machine learning under the conditions of digital transformation of industry, and methods of implementing deep learning to provide the performance of trust management systems are considered. The necessity of using convolutional artificial neural networks for deep machine learning is determined. Various technologies and architectures for the implementation of artificial neural networks are briefly considered; a comparative analysis of their performance is carried out. The work objective is to study the need to develop new approaches to the architecture of computing machines for solving problems of deep machine learning in the trust management system implementation.

**Materials and Methods.** In the context of digital transformation, the use of artificial intelligence reaches a new level. The technical implementation of artificial neural systems with deep machine learning is based on the use of one of three basic technologies: high performance computing (HPC) with parallel data processing, neuromorphic computing (NC), and quantum computing (QC).

**Results.** Implementation models for deep machine learning, basic technologies and architecture of computing machines, as well as requirements for trust assurance in control systems using deep machine learning are analyzed. The problem of shortage of computation power for solving such problems is identified. None of the currently existing technologies can solve the full range of learning and impedance problems. The current level of technology does not provide information security and reliability of neural networks. The practical implementation of trust management systems with deep machine learning based on existing technologies for a significant part of the tasks does not provide a sufficient level of performance.

**Discussion and Conclusions.** The study made it possible to identify the challenge of the computation power shortage for solving problems of deep machine learning. Through the analysis of the requirements for trust management systems, the external challenges of their implementation on the basis of existing technologies, and the need to develop new approaches to the computer architecture are determined.

**Keywords:** deep machine learning, processor, trust system, information security, computer, artificial intelligence.

**For citation:** A. A. Zelensky, T. K. Abdullin, M. M. Zhdanova, V. V. Voronin, A. A. Gribkov. Challenge of the performance management of trust control systems with deep learning. Advanced Engineering Research, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 57–66. (In Russ). <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-57-66>

**Funding information:** the research is done on the Russian Science Foundation grant no. 21-79-10392, <https://rscf.ru/project/21-79-10392/>

**Введение.** В последние 9 лет в мире, и в России в т. ч., все более масштабно совершается 4-я промышленная революция, одной из ключевых составляющих которой является цифровая трансформация, затрагивающая все аспекты экономической жизни — от крупного промышленного производства до сферы обслуживания, науки, образования и домашних хозяйств. В этих условиях применение машины в задачах, с которыми человек не справляется или справляется хуже машины, существенно расширяется. Если раньше речь шла о механизации ручного труда и автоматизации производства, то теперь человек может быть заменен машиной при решении задач обработки данных, анализа, прогнозирования и управления различными системами: оборудованием, технологическими процессами, промышленными предприятиями, торговыми сетями и др.

Практической основой замены человека машиной в отдельных областях интеллектуальной деятельности является использование искусственного интеллекта. Создание «сильного» искусственного интеллекта — задача будущего, связанная с необходимостью создания и развития новых технологий, а также решением значимых этических проблем. В настоящее время доступны для использования системы машинного обучения различной сложности, представляющие собой ступень к созданию «сильного» искусственного интеллекта.

Мировой рынок систем машинного обучения активно расширяется. В 2020 г. его объем составил 11,33 млрд \$, в 2021 г. он вырос до 15,50 млрд \$, а к 2028 г. достигнет уровня 152,24 млрд \$, показывая среднегодовой рост на 38,6 %<sup>1</sup>.

Сфера применения систем машинного обучения очень велика и включает в себя маркетинг и торговлю, банковскую деятельность, промышленное производство, медицину и др. Системы машинного обучения наиболее востребованы в следующих областях промышленности:

- в робототехнике для интеллектуализации промышленных и сервисных роботов, в т. ч. коллаборативных;
- в автоматизированных системах управления технологическими процессами и предприятиями;
- в системах управления производственными процессами;
- в системах управления поставками и взаимоотношениями с клиентами;
- в исполнительных системах производства;
- в системах производственной аналитики технологического оборудования;
- в системах бизнес-аналитики и др.

Сложные технологические системы, например реализуемые в конструкциях металлорежущих станков с числовым программным управлением в режиме реального времени, в настоящее время не могут быть оснащены системами управления, пригодными для машинного обучения. Для этого требуются вычислительные мощности, способные выполнять существенные по объему вычисления в течении десятков микросекунд. Такая задача с помощью современных технических средств не может быть решена. Поэтому в большинстве случаев процесс машинного обучения системы управления осуществляется на отделенных от нее вычислительных машинах без ограничений времени, а затем результаты обучения передаются в систему управления в виде рекомендаций, указаний по режимам работы, смене инструмента, интервалам поверки и т. д.

Методы машинного обучения условно соответствуют видам умозаключений, лежащих в их основе: индукции, дедукции и традукции. Метод контролируемого обучения по прецедентам, когда в машину загружаются большие объемы данных, предварительно маркированных оператором-человеком, соответствует индукции. Метод обучения без учителя, когда машина должна сама найти закономерности в данных, выявить шаблоны, упорядочить и структурировать данные, соответствует индукции и традукции. Дедукции и традукции соответствует экспертный метод, основанный на использовании для обработки данных заданных закономерностей и шаблонов. Традукция реализуется в основном через использование трансферного обучения, основанного на применении к данной задаче знаний, полученных при решении другой задачи.

Для машинного обучения используются различные технологии и математические модели. Наибольший потенциал развития имеет модель искусственных нейронных сетей (ИНС), построенная по аналогии с биологическими нейронными сетями, т. е. сетями нервных клеток живого организма. ИНС представляет собой систему соединённых между собой и взаимодействующих искусственных нейронов, реализуемых в виде процессоров, процессорных элементов в виде ускорителей или сопроцессоров под управлением центрального процессора. Нейроны ИНС располагаются по уровням (слоям). Первый уровень соответствует получению, обработке входных данных и передаче их на следующий уровень. Промежуточные уровни — скрытые, их задача обрабатывать поступающие данные и передавать на последний (выходной) уровень. В нейронной сети может быть несколько скрытых уровней, перемежающихся с уровнями, на которых выполняются логические, математические и другие преобразования. От уровня к уровню данные обрабатываются, на каждом последующем уровне выявляются взаимосвязи предыдущего. Такая многоуровневая ИНС имеет большие возможности и может быть использована для реализации глубинного машинного обучения [1–3].

Глубинное машинное обучение — метод проектирования ИНС с помощью многослойных фильтров для извлечения и моделирования признаков из набора входных данных<sup>2</sup>. Такое обучение может быть контролируемым и неконтролируемым. Также возможно использование глубинного машинного обучения для экспертных систем.

В основе технической реализации искусственных нейронных систем с глубинным машинным обучением лежит использование одной из трех базовых технологий: высокопроизводительных вычислений с параллельной обработкой данных, нейроморфных и квантовых вычислений<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Machine Learning Market, 2021-2028 // Hardware & Software IT Services Market Research Report. — 2021. — P.160. — URL: <https://www.fortunebusinessinsights.com/infographics/machine-learning-market-102226> (дата обращения: 06.11.2021).

<sup>2</sup> Глек, П. Глубокое обучение (Deep Learning): краткий туториал // neurohive.io : [сайт]. URL: <https://neurohive.io/ru/osnovy-datascience/glubokoe-obuchenie-deep-learning-kratkij-tutorial/> (дата обращения: 06.11.2021).

<sup>3</sup> Как сократить издержки при использовании ИИ / Hitachi Vantara Corporation : [сайт]. URL: [https://hitachi.cnews.ru/articles/2021-06-14\\_kak\\_sokratit\\_izderzhki\\_pri\\_iskpolzovanii\\_ii](https://hitachi.cnews.ru/articles/2021-06-14_kak_sokratit_izderzhki_pri_iskpolzovanii_ii) (дата обращения: 07.11.2021).

## Материалы и методы

**Высокопроизводительные вычисления.** Высокопроизводительные вычисления с параллельной обработкой данных реализуются посредством гибридных вычислительных систем, т. е. систем с гетерогенной аппаратной вычислительной структурой, включающей в себя центральный процессор (CPU) и дополнительный вычислительный модуль в виде ускорителя или сопроцессора. В зависимости от процессоров, используемых для параллельной обработки данных, гибридные вычислительные машины имеют одну из четырех архитектур:

1. Архитектура на базе графических процессоров (GPU). Наиболее распространенные решения представляют собой графические ускорители, расширяющие вычислительные возможности центрального процессора компьютерной системы. Последние достижения в данной области — графические ускорители NVIDIA Tesla V100, обеспечивающие для задач глубинного машинного обучения производительность 120 TFLOPS, т. е.  $1,2 \times 10^{14}$  операций с плавающей запятой в секунду<sup>4</sup>. Это в 500–1000 раз выше производительности обычного персонального компьютера (ПК). Необходимо также учитывать, что указанная производительность обеспечивается при решении задач, требующих значительных вычислительных мощностей и существенных затрат времени, но не при работе в режиме реального времени. Архитектура на базе графических процессоров в настоящее время наиболее доступна. В частности, для реализации системы с ограниченной вычислительной мощностью достаточно иметь на ПК видеокарту с графическим процессором NVidia, реализующую программно-аппаратную архитектуру параллельных вычислений CUDA. Наряду с CUDA к числу технологий GPGPU, использующих графический процессор видеокарты для компьютерной графики в целях производства математических вычислений, относится технология AMD FireStream (для графических процессоров ускорителей ATI). Мировой рынок графических процессоров в настоящее время составляет около 26 млрд \$, темп роста рынка — до 34 % в год<sup>5</sup>.

2. Архитектура на базе программируемых пользователем вентильных матриц (FPGA) — полупроводниковых устройств, которые могут перепрограммироваться и менять топологию соединений в процессе использования. Номинальная производительность данных устройств сравнительно невысока — около 20 TFLOPS, однако эффективность использования вычислительных мощностей наибольшая среди всех рассмотренных архитектур. Она в 6–7 раз выше, чем у графических ускорителей. Высокая эффективность FPGA обусловлена гибкостью и скоростью подстройки под решаемые вычислительные задачи. Мировой рынок FPGA по данным компании Grand View Research, в 2020 г. составил 9,85 млрд \$, ожидаемые темпы роста рынка на период до 2027 г. — 9,7 % в год<sup>6</sup>.

3. Архитектура на базе интегральных схем специального назначения (ASIC). Благодаря узкой специализации решаемых вычислительных задач они могут быть существенно проще, дешевле и компактнее. Производительность ASIC может достигать 1000 TFLOPS, однако эффективность использования вычислительных мощностей, например количество распознанных изображений, примерно в 2 раза ниже, чем в графических ускорителях. Темпы роста рынка ASIC существенно ниже, чем рынка графических процессоров. В 2020 г. по данным компании Global Industry Analysts мировой рынок ASIC составил 17,3 млрд \$, ожидаемый среднегодовой рост рынка до 2027 г. — 7,7 %<sup>7</sup>.

4. Архитектура на базе однокристалльных ускорителей (SoC). «Система на кристалле» SoC — полнофункциональное электронное устройство, имеющее материнскую плату, процессор и другие необходимые для работы компоненты, размещённое на одной интегральной схеме. SoC распространены в мобильных компьютерах (смартфонах), одноплатных компьютерах и других встроенных системах. При этом SoC имеют существенный потенциал использования в составе гибридных вычислительных машин. Кроме того, возможны решения в виде однокристалльной сборки SoC с элементами FPGA (архитектура Versal для адаптивных вычислений компании Xilinx<sup>8</sup>). Рынок SoC в настоящее время очень велик и за 2020 г. составляет 79,7 млрд \$. На период до 2027 г. прогнозируется рост рынка на 4,4 % в год, к 2027 г. объем рынка достигнет 107,4 млрд \$<sup>9</sup>.

На рис. 1, 2 приведены данные по фактическому и прогнозируемому росту мирового рынка чипов для глубинного машинного обучения, подготовленные консалтинговой компанией Omdia<sup>10</sup>.

<sup>4</sup> Как сократить издержки при использовании ИИ Указ. соч.

<sup>5</sup> Global Graphics Processing Unit (GPU) Market Insights and Forecast to 2027 // QYResearch. — 2021. — P. 116. — URL: <https://reports.valuates.com/market-reports/QYRE-Auto-25V3358/global-graphics-processing-unit-gpu> (дата обращения: 10.11.2021).

<sup>6</sup> Field Programmable Gate Array Market, 2020 — 2027 // Grand View Research. — 2020. — P. 130. — URL: <https://www.marketresearch.com/Grand-View-Research-v4060/Field-Programmable-Gate-Array-Size-13223073/> (дата обращения: 11.11.2021).

<sup>7</sup> ASIC — Global Market Trajectory & Analytics April 2021 // Global Industry Analysts, Inc. — 2021. — P. 185. — URL: <https://www.researchandmarkets.com/reports/5140939/asic-global-market-trajectory-and-analytics> (дата обращения: 11.11.2021).

<sup>8</sup> Xilinx Unveils Its Most Ambitious Accelerator Platform // Michael Feldman. — 2018. — URL: <https://www.top500.org/news/xilinx-unveils-its-most-ambitious-accelerator-platform/> (дата обращения: 10.11.2021).

<sup>9</sup> System-On-A-Chip (SoC) — Global Market Trajectory & Analytics. Report April 2021 // Global Industry Analysts, Inc. — 2021. — URL: <https://www.researchandmarkets.com/reports/2832316/system-on-a-chip-soc-global-market-trajectory> (дата обращения: 11.11.2021).

<sup>10</sup> Joshi, A. Deep Learning Chipsets Report — 2020 // Omdia Market. — 2020. — URL: <https://omdia.tech.informa.com/products/deep-learning-chipsets-report---2020>

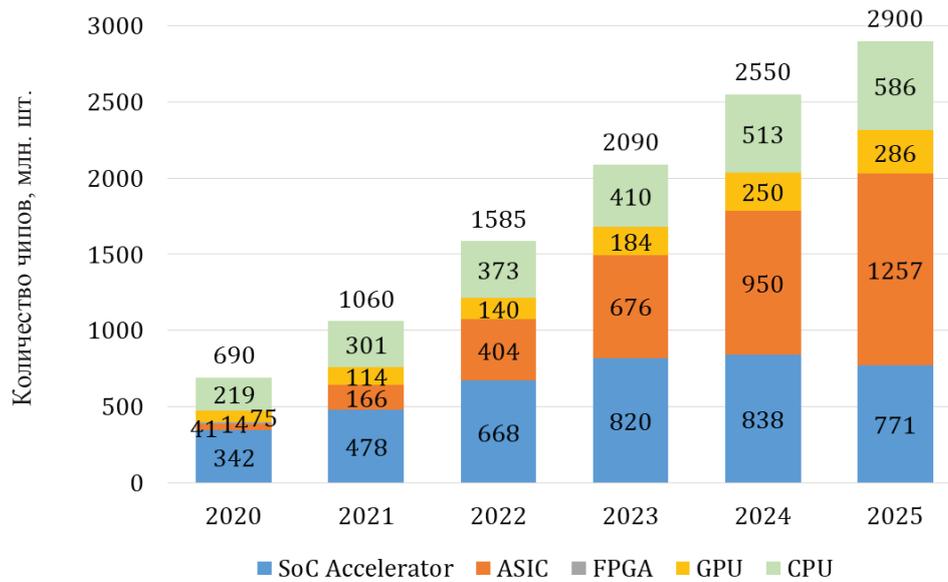


Рис. 1. Динамика роста количества чипов для глубинного обучения по годам

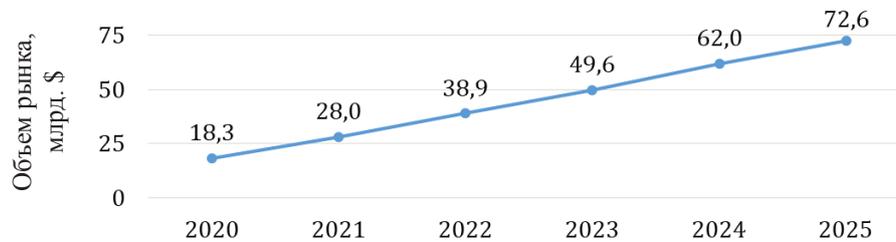


Рис. 2. Динамика изменения рынка чипов для глубинного обучения по годам<sup>11</sup>

Анализ показывает, что на фоне общего роста рынка наибольшие перспективы имеют ASIC, значимые позиции сохраняют также GPU и SoC. Ускорители GPU на достаточно длительную перспективу не имеют адекватной замены в решении сложных задач, в т. ч. в процессе обучения, а SoC незаменимы для мобильных реализаций систем глубинного машинного обучения, а также для параллельных вычислений с целью разгрузки центрального процессора. Отказ от FPGA в системах глубинного машинного обучения представляется необязательным, хотя доля таких процессоров, вероятно, будет сравнительно небольшой.

Одним из наиболее перспективных направлений развития гибридных вычислительных машин является использование тензорных и других специализированных сопроцессоров, например процессоров машинного зрения. Такие сопроцессоры могут строиться на базе наиболее распространенных и производительных ASIC, а также FPGA или GPU. Отличие сопроцессоров от ускорителей заключается в степени интеграции с центральным процессором. Центральный процессор посредством специальной области памяти транслирует управляющие инструкции на ускоритель. Сопроцессор отслеживает поток инструкций машинного кода, поступающий из оперативной памяти в центральный процессор, и перехватывает инструкции, соответствующие его функциональному назначению, например задачи тензорных преобразований, распознавания образов и т. д. Для решения масштабных задач, требующих длительных распределенных вычислений, целесообразно применение ускорителя, для частого и многократного выполнения несложных вычислительных задач — применение сопроцессора, при котором центральный процессор не загружается и не замедляет обработку данных.

Эксплуатационные свойства вычислительных машин существенно зависят от используемой архитектуры. Для решения задач глубинного машинного обучения, куда затрачиваются до 80 % вычислительных мощностей, наилучшим образом подходят машины на базе графических ускорителей. Они имеют высокую производительность при решении сложных задач, требующих существенных затрат времени, обладают высокой гибкостью и максимальной точностью вычислений, но низкой относительной производительностью. Например, для процессоров NVidia она составляет 1,3–1,8 GOPS/W. Вычислительные

<sup>11</sup> Joshi, A. Deep Learning Chipsets Report — 2020 // Omdia Market. — 2020. — URL: <https://omdia.tech.informa.com/products/deep-learning-chipsets-report---2020> (accessed: 12.11.2021).

машины на базе ASIC обладают максимальной абсолютной и относительной производительностью. Например, для процессоров neuIBM относительная производительность составляет 254 GOPS/W [4]. Однако такие машины имеют низкую гибкость и ограниченную точность, поэтому их целесообразно использовать при решении типовых, например матричных или тензорных преобразований, повторяющихся или многопоточных задач в режиме реального времени.

Вычислительные машины на базе FPGA обладают высокими параметрами гибкости, точности, абсолютной и относительной производительности. Например, для процессоров Tegra TX1 относительная производительность составляет 70 GOPS/W. Однако такие машины имеют сравнительно высокую стоимость, поэтому их целесообразно использовать для научных целей, когда требуется лишь несколько вычислительных машин заданной конфигурации, а также для разработки архитектуры массово выпускаемых процессоров ASIC и SoC.

Несмотря на совершенствование архитектуры вычислительных машин потенциал роста мощностей для высокопроизводительных вычислений в скором времени будет исчерпан. Число транзисторов на кристалле за последние 5 лет увеличилось примерно в 12 раз [5], а объем вычислений в процессе машинного обучения — в 150 тыс. раз<sup>12</sup>.

**Нейроморфные вычисления.** Возможным способом устранения нехватки вычислительных мощностей для искусственных нейронных систем с глубинным машинным обучением является использование нейроморфных вычислений и соответствующих чипов. Нейроморфный чип — это процессор, работа которого основана на принципах человеческого мозга. Такой чип моделирует работу нейронов и их отростков — аксонов и дендритов, отвечающих за передачу и восприятие данных. Связи между нейронами образуются за счет синапсов — специальных контактов, по которым транслируются электрические сигналы.

К числу наиболее известных разработок в данной области относятся нейроморфные процессоры TrueNorth компании IBM и процессоры Loihi компании Intel. В них используется асинхронная кластерная архитектура и модель сверточной нейронной сети — однонаправленная многослойная сеть с чередованием сверточных и субдискретизирующих слоёв. Процессор TrueNorth выполнен на базе технологий 28 нм, Loihi — на базе 14 нм [6].

Многопроцессорная система TrueNorth NS16e-4, содержащая 100 млн нейронов и предназначенная для работы с сетями для глубинного машинного обучения, была представлена компанией IBM в 2018 г. [7]. Каждый чип содержит 1 млн цифровых нейронов и 256 млн синапсов, заключенных в 4096 синапсных ядрах; энергопотребление каждого чипа — 70 мВт.

Процессор Loihi, представленный в 2017 г., содержит 131 тыс. искусственных нейронов и 131 млн синапсов. В 2019–2020 гг. Intel представила два продукта на основе Loihi — PohoikiBeach и PohoikiSprings. Вычислительная система PohoikiBeach, включающая 64 процессора Loihi, суммарно располагает 8,32 млн нейронов и 8,32 млрд синапсов. Вычислительная система PohoikiSprings включает 768 процессоров Loihi, имеет 100 млн нейронов и 100 млрд синапсов<sup>13</sup>.

В России работы по созданию нейроморфных процессоров ведутся уже несколько лет. В 2020 г. компания «Мотив Нейроморфные Технологии» создала нейрочип «Алтай» [8]. Технологическая норма процессора — 28 нм, энергопотребление — около 0,5 Вт, площадь кристалла — 64 мм<sup>2</sup> (для сравнения: TrueNorth — 430 мм<sup>2</sup>, Loihi — 60 мм<sup>2</sup>). В нем 131 тыс. нейронов, между ними — 67 млн связей.

Для оценки качества нейроморфных процессоров используют:

1. Абсолютный показатель производительности. Это количество миллиардов выполняемых синоптических операций в секунду (GSOPS).
2. Показатель энергоэффективности. Это количество пикоджоулей энергии, затраченной на выполнение одной синоптической операции (pJ/SOP).

Процессор TrueNorth имеет производительность 58 GSOPS и энергоэффективность 26 pJ/SOP<sup>14</sup>. Аналогичную энергоэффективность (23,7 pJ/SOP [9]) имеет процессор Loihi.

Единственным конкурентом нейроморфных процессоров в реализации нейронных сетей с глубинным машинным обучением на среднесрочную перспективу (8–12 лет) являются гибридные вычислительные машины с сопроцессорами ASIC. Такие процессоры имеют меньшую, но сопоставимую производительность выполнения синоптических операций и более высокую энергоэффективность. В частности, процессор ASIC,

<sup>12</sup> Thompson, N.C., Greenewald, K., Lee, K., Manso, G.F. The Computational Limits of Deep Learning// arXiv preprint arXiv:2007.05558. – 2020. (дата обращения: 12.11.2021)

<sup>13</sup> Intel Scales Neuromorphic Research System to 100 Million Neurons// Intel. — 2020. — URL: <https://newsroom.intel.com/news/intel-scales-neuromorphic-research-system-100-million-neurons/> (дата обращения: 12.11.2021)

<sup>14</sup> Нейроморфный процессор «Алтай» // motivnt.ru : [сайт]. URL: <https://motivnt.ru/neurochip-altai/> (дата обращения: 10.11.2021).

описанный в работе [10], обеспечивает производительность выполнения синаптических операций 8,7 GSOPS и энергоэффективность 15,2 pJ/SOP.

Мировой рынок нейроморфных чипов сформировался сравнительно недавно и поэтому невелик. В 2020 г. его объем составил всего 22,5 млн \$. При этом темпы роста рынка очень высоки. К 2026 г. рынок вырастет до 333,6 млн \$, что соответствует среднегодовому росту на 47,4 %<sup>15</sup>.

Иногда под нейроморфными чипами понимают все виды процессоров, внешне воспроизводящих работу нейронов независимо от внутренней структуры технического устройства, которое может не соответствовать характеру взаимодействия нейронов. Такие процессоры, используемые для построения искусственных нейронных сетей, правильно называть нейронными. К нейронным процессорам, наряду с нейроморфными чипами, также относятся процессоры (чипы) с тензорными и другими специализированными сопроцессорами машинного зрения, распознавания речи и др. Мировой рынок нейронных процессоров в настоящее время составляет 2,3 млрд \$, а к 2027 г. вырастет до 10,4 млрд \$, т. е. средний рост составит 24,2 % в год<sup>16</sup>.

**Квантовые вычисления.** В долгосрочной перспективе средством устранения дефицита вычислительных мощностей может стать развитие квантовых вычислений. Квантовые вычисления — решение задач с помощью манипуляции квантовыми объектами: атомами, молекулами, фотонами, электронами и специально созданными макроструктурами. Манипуляции квантовыми объектами дают возможность использования:

— квантовой суперпозиции, которая проявляется в способности квантовых систем одновременно находиться во всех возможных состояниях;

— квантовой запутанности, которая проявляется в сильной взаимосвязи между параметрами специальным образом приготовленных квантовых систем.

Устройства для квантовых вычислений принято разделять на два больших класса [11]: универсальные квантовые компьютеры и квантовые симуляторы. Первые подобно центральным процессорам могут решать любую алгоритмическую задачу, квантовые симуляторы — это аналоговые компьютеры для решения узкоспециализированных задач.

Технологии создания универсальных квантовых компьютеров в настоящее время находятся на стадии формирования. Создаваемые вычислительные машины демонстрируют «квантовое превосходство» в решении отдельных задач, но пока не могут быть использованы для формирования искусственных нейронных сетей с глубинным машинным обучением. Наибольшую активность в создании квантового компьютера демонстрируют компании:

1. Google. В 2018 г. построен 72-кубитный квантовый процессор Bristlecone, в 2019 г. — более точный 53-кубитный квантовый процессор Sycamore.
2. Intel. В 2018 г. построена 49-кубитная сверхпроводящая квантовая микросхема TangleLake.
3. IBM. В 2017 г. создан и протестирован 50-кубитный квантовый процессор, в 2019 г. — первый в мире коммерческий 20-кубитный квантовый компьютер IBM Q SystemOne и др.

Единственным адиабатическим квантовым компьютером, представленным на рынке, является D-WaveSystems, выпускаемый в вариантах от 16 до 2000 кубитов, организованных в кластеры по 8 кубитов в каждом.

Область квантовых симуляторов также активно развивается. Один из наиболее сложных симуляторов такого типа представлен совместной разработкой 2017 г. Мэрилендского университета и Национального института стандартов и технологий (США). Этот 53-кубитный симулятор использует в качестве кубитов холодные ионы иттербия. Аналогичный по возможностям 51-кубитный квантовый симулятор на базе атомов рубидия был разработан группой ученых Гарвардского университета и Массачусетского технологического института.

В России также реализуется ряд проектов, развивающих технологии квантовых вычислений. В частности, уже несколько лет ведётся разработка сверхпроводящего процессора учёными консорциума, куда входят МИСиС, ИФТТ РАН, МГТУ им. Н. Э. Баумана, ВНИИА им. Духова и другие организации. На сегодняшний день консорциумом отлажена технология изготовления сверхпроводниковых двухкубитных схем,

<sup>15</sup> Neuromorphic Chip Market — Growth, Trends, COVID-19 Impact, and Forecasts (2021–2026) // Mordor Intelligence. — 2020. — URL: <https://www.mordorintelligence.com/industry-reports/neuromorphic-chip-market> (дата обращения: 11.11.2021).

<sup>16</sup> Neuromorphic Chips — Global Market Trajectory & Analytics // Global Industry Analysts, Inc. 2021. 118 p. URL: <https://www.researchandmarkets.com/reports/4805280/neuromorphic-chips-global-market-trajectory-and> (дата обращения: 10.11.2021).

экспериментально охарактеризованы и продемонстрированы двухкубитные логические вентили, осуществляющие квантовое запутывание, необходимое для работы квантовых процессоров. Достоверность логических операций находится в пределах 85–95 %.

В 2020 г. в квантовые вычисления в мире было вложено 675 млн \$, что более чем в 3 раза превышает объем инвестиций 2019 г. (211 млн \$). В 2021 г. объем инвестиций в квантовые вычисления превышает 800 млн \$ [12].

**Доверительные системы управления.** Одним из базовых требований к системам управления, в том числе к производственным, является обеспечение к ним необходимого уровня доверия. Согласно ГОСТ Р 54583-2011 «Методы и средства обеспечения безопасности. Основы доверия к безопасности информационных технологий. Часть 3 — Анализ методов доверия» целью обеспечения доверия является создание уверенности в надёжном функционировании продукта в заданных условиях. Для обеспечения указанного доверия информационная система должна обладать следующими эксплуатационными свойствами [13]:

— функциональной надёжностью, т. е. способностью выполнять свою функцию с заданной достоверностью, которая в свою очередь нормируется числом отказов, погрешностью и повторяемостью результатов вычислений;

— информационной безопасностью, т. е. способностью обеспечивать заданный уровень конфиденциальности, доступности и целостности информации: хранимой, передаваемой, принимаемой и обрабатываемой в процессе работы системы.

Предметом настоящей работы являются системы управления, которые относятся к информационным. Поэтому для них также справедливы указанные выше требования к эксплуатационным свойствам. Однако у систем управления имеется своя специфика в определении доверия. Доверенная система управления должна обладать:

— способностью управлять, например роботом, станком, предприятием и т. д. по заданному числу параметров с заданной надёжностью, которая регламентируется числом отказов, погрешностью и повторяемостью, и с заданной производительностью, которая в свою очередь регламентируется временем обработки данных и выполнения управляющих команд;

— возможностью контроля элементов, структуры и процессов системы на аппаратном и программном уровне с целью обеспечения информационной безопасности.

Если система управления имеет функцию глубинного машинного обучения, то выполнение первого из указанных требований накладывает жесткие ограничения на используемые средства технической реализации. Это должна быть оптимальная для формирования сверточной нейронной сети вычислительная машина с высокими параметрами производительности, точности и надёжности вычислений.

Если не рассматривать вариант использования квантовых процессоров, полнофункциональных реализаций которых пока нет, то первому требованию в полной мере не соответствуют ни гибридные вычислительные машины на базе всех рассмотренных архитектур, ни вычислительные машины на базе нейроморфных процессоров. Вычислительные машины на базе ASIC и нейроморфных процессоров не обеспечивают высокой точности и надёжности, а гибридные вычислительные машины с ускорителями GPU или SoC неоптимальны для работы в режиме реального времени, в том числе импеданса.

Определенный компромисс обеспечивается при использовании гибридных вычислительных машин на базе FPGA, однако такие машины имеют высокую стоимость при серийном производстве, существенно меньшую производительность, чем машины с ASIC, и существенно меньшие возможности сложных вычислений, чем машины с GPU. Другим вариантом достижения компромисса является одновременное использование центрального процессора с графическим ускорителем для решения сложных задач в процессе машинного обучения и тензорных или иных узкоспециализированных сопроцессоров на базе ASIC для обработки данных в режиме реального времени.

Второе требование, хотя и является техническим по содержанию, на практике выступает в качестве экономического. Реализация системы управления технологическим оборудованием с глубинным машинным обучением возможна только посредством сверточной нейронной сети, контроль работы которой извне не представляется возможным. Информационная безопасность может быть обеспечена только при условии, что основная часть вычислительной машины будет создаваться отечественными производителями, которые прошли сертификацию в области информационной безопасности.

В настоящее время в России основная часть систем управления построена на основе зарубежных микроэлектронных компонентов. Доля таких компонентов превышает 85 % [14]. Обеспечение информационной безопасности в случае использования в вычислительных машинах импортных компонентов не имеет однозначного решения и зависит от структуры создаваемой искусственной нейронной сети и порядка ее

использования. В частности, при использовании гибридных вычислительных машин информационная безопасность может быть существенно повышена за счет локализации передачи данных между центральным процессором и ускорителем или сопроцессором.

**Результаты исследования.** Проведенный анализ моделей глубинного машинного обучения, базовых технологий и архитектуры вычислительных машин, а также требований по обеспечению доверия к системам управления, использующих глубинное машинное обучение, позволяет сделать следующие выводы:

1. Имеется объективная проблема дефицита вычислительных мощностей для решения задач глубинного машинного обучения. Ни одна из существующих в настоящее время технологий не позволяет решать полный комплекс задач обучения и импеданса.

2. Поскольку глубинное машинное обучение реализуется на базе модели сверточных нейронных сетей, их внешний контроль с целью обеспечения информационной безопасности и надежности работы не представляется возможным. Единственным вариантом является контроль разработчика, который также имеет ограниченные возможности. Это определяет необходимость производства необходимых для ИНС процессоров в России.

3. Практическая реализация доверенных систем управления с глубинным машинным обучением на базе имеющихся технологий для существенной части задач в режиме реального времени не может быть обеспечена, для другой части задач такая реализация связана с существенным падением производительности.

4. Повышение производительности доверенных систем управления может быть основано на совершенствовании архитектуры гибридных вычислительных машин, в том числе одновременном использовании процессоров разной архитектуры, оптимальных для решения соответствующих задач анализа и управления.

**Обсуждение и заключения.** В настоящей работе проведен анализ и рассмотрены вопросы значения и реализации машинного обучения в условиях цифровой трансформации промышленности. Затронутая в работе научная проблема заключается в недостаточном развитии технического уровня современных вычислительных машин для обеспечения высокой производительности алгоритмов на основе глубинного машинного обучения. Обращает на себя внимание проблема обеспечения информационной безопасности, что является одной из предпосылок развития отечественных процессоров для ИНС. На основе анализа требований к доверенным системам управления определены объективные сложности их реализации на базе существующих технологий и необходимость разработки новых подходов к архитектуре вычислительных машин.

#### Библиографический список

1. Using neuro-accelerators on FPGAs in collaborative robotics tasks / A. Zelensky, E. Semenishchev, A. Alepko [et al.] // SPIE Optical Instrument Science, Technology, and Applications II. — 2021. — Vol. 11876. — Art. 118760O. — P. 5. <https://doi.org/10.1117/12.2600582>
2. Zelenskii, A. A. Control of Collaborative Robot Systems and Flexible Production Cells on the Basis of Deep Learning / A. A. Zelenskii, M. M. Pismenskova, V. V. Voronin // Russian Engineering Research. — 2019. — Vol. 39. — P. 1065–1068. <https://doi.org/10.3103/S1068798X19120256>
3. Automated visual inspection of fabric image using deep learning approach for defect detection / V. V. Voronin, R. A. Sizyakin, M. Zhdanova [et al.] // Automated Visual Inspection and Machine Vision IV. — 2021. — Vol. 11787. — P. 117870. <https://doi.org/10.1117/12.2592872>
4. NeuFlow: Dataflow Vision Processing System-on-a-Chip / Phi-Hung Pham, D. Jelaca, C. Farabet [et al.] // In: Proc. IEEE 55th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS). — 2012. — P. 1044–1047. <https://doi.org/10.1109/MWSCAS.2012.6292202>
5. Шуремов, Е. Л. Стоит ли увлекаться Большими Данными? / Е. Л. Шуремов // Учет. Анализ. Аудит. — 2020. — Т. 7, № 2. — С. 17–29. <https://doi.org/10.26794/2408-9303-2020-7-2-17-29>
6. Towards artificial general intelligence with hybrid Tianjic chip architecture / Jing Pei, Lei Deng, Sen Song [et al.] // Nature. — 2019. — Vol. 572. — P. 106–111. <https://doi.org/10.1038/s41586-019-1424-8>
7. Модха, Д. TrueNorth: от нуля к 64 миллионам нейронов / Д. Модха // Открытые системы. СУБД. — 2019. — № 3. — С. 8.
8. TrueNorth: design and tool flow of a 65 mw 1 million neuron programmable neurosynaptic chip / F. Akopyan, J. Sawada, A. Cassidy [et al.] // IEEE transactions on computer-aided design of integrated circuits and systems. — 2015. — Vol. 34. — P. 1537–1557. <https://doi.org/10.1109/TCAD.2015.2474396>
9. Loihi: A neuromorphic manycore processor with on-chip learning / Mike Davies, Narayan Srinivasa, Tsung-Han Lin [et al.] // IEEE Micro. — 2018. — Vol. 38. — P. 82–99. <https://doi.org/10.1109/MM.2018.112130359>

10. Efficient synapse memory structure for reconfigurable digital neuromorphic hardware / J. Kim, J. Koo, T. Kim, J. J. Kim // *Frontiers in neuroscience*. — 2018. — Vol. 12. — P. 829. <https://doi.org/10.3389/fnins.2018.00829>
11. Федоров, А. Квантовые вычисления: от науки к приложениям / А. Федоров // *Открытые системы. СУБД*. — 2019. — № 3. — С. 14.
12. What Happens When ‘If’ Turns to ‘When’ in Quantum Computing? / J. F. Bobier, M. Langione, E. Tao [et al.] // *BCG Digital Transformation*. — 2021. — P. 20.
13. Сабанов, А. Г. Доверенные системы как средство противодействия киберугрозам / А. Г. Сабанов // *Защита информации. Инсайд*. — 2015. — № 3 (63). — С. 17–21.
14. Каляев, И. А. Доверенные системы управления / И. А. Каляев, Э. В. Мельник // *Мехатроника, автоматизация, управление*. — 2021. — Т. 22, № 5. — С. 227–236. <https://doi.org/10.17587/mau.22.227-236>

Поступила в редакцию 27.12.2021

Поступила после рецензирования 22.01.2022

Принята к публикации 26.01.2022

*Об авторах:*

**Зеленский Александр Александрович**, директор Института цифровых интеллектуальных систем Московского государственного технологического университета «СТАНКИН» (127055, РФ, г. Москва, пер. Вадковский, 3 а), кандидат технических наук, доцент, [Scopus](#), [Researcher](#), [ORCID](#), [Zelenskyaa@gmail.com](mailto:Zelenskyaa@gmail.com)

**Абдуллин Тагир Хабибович**, преподаватель кафедры «Промышленная электроника и интеллектуальные цифровые системы» Московского государственного технологического университета «СТАНКИН» (127055, РФ, г. Москва, пер. Вадковский, 3 а), ведущий инженер, [Scopus](#), [ORCID](#), [everestultimate@yandex.ru](mailto:everestultimate@yandex.ru)

**Жданова Марина Михайловна**, младший научный сотрудник ФГБОУ ВО «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН» (127055, РФ, г. Москва, пер. Вадковский переулок, 3 а), [Scopus](#), [Researcher](#), [ORCID](#), [mpismenskova@mail.ru](mailto:mpismenskova@mail.ru)

**Воронин Вячеслав Владимирович**, заместитель директора Центра когнитивных технологий и машинного зрения Московского государственного технологического университета «СТАНКИН» (127055, РФ, г. Москва, пер. Вадковский, 3 а), кандидат технических наук, доцент, [Scopus](#), [Researcher](#), [ORCID](#), [voronin\\_sl@mail.ru](mailto:voronin_sl@mail.ru)

**Грибков Андрей Армович**, директор Аналитического центра Московского государственного технологического университета «СТАНКИН» (127055, РФ, г. Москва, пер. Вадковский, 3а), доктор технических наук, профессор, [Scopus](#), [Researcher](#), [ORCID](#), [andarmo@yandex.ru](mailto:andarmo@yandex.ru)

*Заявленный вклад соавторов:*

А. А. Зеленский — формирование основной концепции, цели и задачи исследования, подготовка текста, формирование выводов; Т. Х. Абдуллин, М. М. Жданова — проведение исследования, анализ существующих подходов; В. В. Воронин, А. А. Грибков — анализ результатов исследований, доработка текста, корректировка выводов.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

# ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE, AND MANAGEMENT



Original article



UDC 004.11.5

<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-67-75>

## Comparison of machine learning models for coronavirus prediction

Brou Kouame Amos  , Ivan Smirnov , Mabouh Moise Hermann 

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN) (Moscow, Russian Federation)

 [broukouameamos9@gmail.com](mailto:broukouameamos9@gmail.com)

**Introduction.** Coronavirus, also known as COVID-19, was first detected in Wuhan, China, in December 2019. It is a family of viruses ranging from the common cold to severe acute respiratory syndrome (SARS). The symptoms of such a virus are similar to those of a cold or seasonal allergies. Like other respiratory viruses, it is mainly transmitted through airborne droplets when coughing or sneezing. Therefore, the recognition of COVID-19 requires careful laboratory analysis, and the reduction of recognition resources is a major challenge. On 11 March, 2020, the World Health Organization (WHO) declared COVID-19, caused by SARS-CoV-2, a pandemic, as there had been an exponential increase in cases worldwide, and demand for intensive beds and related structures had far exceeded existing capacity. The first examples of this are the regions of Italy. Brazil registered the first case of SARS-CoV-2 on 02/26/2020. Transmission of the virus in this country shifted very quickly from imported cases to local and, finally, community missions, with the Brazilian federal government announcing national community transmission on 03/20/2020. As of March 23, in the state of São Paulo with a population of about 12 million people, where the Israelita Albert Einstein Hospital is located, 477 cases of the disease and 30 related deaths were registered, and on March 27, there were already 1223 cases of COVID-19 with 68 concomitant deaths. To slow the spread of the virus in the state of São Paulo, quarantines and social distancing measures were introduced. One of the motivations for this challenge is the fact that, in the context of an extensive healthcare system with the possible limitation of SARS-CoV-2 testing, it is not practical to test every case, and test results can only be used in testing the target subpopulation. The study objective is to build a model based on machine learning that can predict the detection of SARS-CoV-2 from medical data. For this, various classification models of machine learning are compared, and the best one to predict coronaviruses is determined. The comparison is based on individuals in class 1, i.e., those with a positive test. Therefore, it is required to determine the machine learning model with the best response and F1 score for class 1.

**Materials and Methods.** An open-source data set from the Israelita Albert Einstein Hospital in São Paulo, Brazil, was taken as a basis. The following machine learning models were used for the study: RandomForests (RF), K-Nearest Neighbor (KNN), Support Vector Machine (SVM), Logistic Regression (LR), Decision Tree (DT) and AdaBoost (AB), as well as the 10-time cross-validation technique. Some machine learning performance measures, such as accuracy, recall, and F1 score were evaluated.

**Results.** Out of a total of 5,644 people tested during the COVID-19 pandemic, 5,086 people tested negative and 558 people tested positive. At the same time, support for machine vectors showed the best results in detecting coronavirus with a recall of 75 % and an F1 score of 60 % compared to models: Random drill, KNN, LR, AB, and DT.

**Discussion and Conclusions.** It was found that when using AB algorithms, greater accuracy is achieved, but the stability of the LSVM algorithm is higher. Therefore, it can be recommended as a useful tool for detecting COVID-19.

**Keywords:** COVID-19 detection, classification, machine learning models.

**For citation:** Brou Kouame Amos, I. Smirnov, Mabouh Moise Hermann. Comparison of machine learning models for coronavirus prediction. Advanced Engineering Research, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 67–75. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-67-75>

Kouame Amos, Smirnov I., Mabouh Moise Hermann, 2022



## Сравнение моделей машинного обучения для прогнозирования коронавируса

К. А. Бру  , И. В. Смирнов , М. М. Эрманн 

Российский университет дружбы народов (Москва, Российская Федерация)

[broukouameamos9@gmail.com](mailto:broukouameamos9@gmail.com)

**Введение.** Коронавирус, также известный как COVID-19, впервые обнаружен в Ухане (Китай) в декабре 2019 г. Он представляет собой семейство вирусов, начиная от простуды и заканчивая тяжелым острым респираторным синдромом (ТОРС). Симптомы такого вируса схожи с симптомами простуды или сезонных заболеваний. Как и другие респираторные вирусы, он в основном передается воздушно-капельным путем во время кашля или чихания. Поэтому распознавание COVID-19 требует тщательного лабораторного анализа, а сокращение ресурсов распознавания является серьезной научной задачей. Всемирная организация здравоохранения (ВОЗ) 11.03.2020 объявила COVID-19, вызванный SARS-CoV-2, пандемией, поскольку во всем мире произошел экспоненциальный рост числа случаев заболеваний, а спрос на интенсивные койки и соответствующие структуры намного превысил существующие возможности. Первыми примерами этому являются регионы Италии. Бразилия зарегистрировала первый случай SARS-CoV-2 26.02.2020. Передача вируса в этой стране очень быстро перешла от завезенных случаев к местным и, наконец, общинным миссиям, а федеральное правительство Бразилии объявило о национальной общинной передаче 20.03.2020. В штате Сан-Паулу с населением около 12 млн человек, где находится больница Альберта Эйнштейна, по состоянию на 23.03.2020 зарегистрировано 477 случаев заболевания и 30 связанных с ними смертей, а 27.03.2020 имели место уже 1223 случая COVID-19 с 68 сопутствующими смертями. Для замедления распространения вируса в штате Сан-Паулу были введены карантин и меры социального дистанцирования. Одним из мотивов этой проблемы является тот факт, что в контексте обширной системы здравоохранения с возможным ограничением тестирования SARS-CoV-2 нецелесообразно тестировать каждый случай, а результаты тестов могут быть использованы при проверке только целевой субпопуляции. Целью работы является построение на основе машинного обучения модели, способной прогнозировать обнаружение SARS-CoV-2 по медицинским данным. Для этого проводится сравнение различных классификационных моделей машинного обучения и определяется лучшая из них с целью прогнозирования коронавирусов. Сравнение основано на лицах в классе 1, т. е. с положительным тестом. Поэтому необходимо определить модель машинного обучения с лучшим отзывом и F1-баллом для класса 1.

**Материалы и методы.** За основу принят набор данных с открытым исходным кодом из израильской больницы Альберта Эйнштейна в Сан-Паулу. Для исследования использованы модели машинного обучения: RandomForests (RF), К-ближайший сосед (KNN), Машина опорных векторов (SVM), Логистическая регрессия (LR), Дерево решений (DT) и AdaBoost (AB), а также 10-временная техника перекрестной проверки. Проведена оценка некоторых показателей производительности машинного обучения, таких как точность, отзыв и оценка F1.

**Результаты исследования.** Из 5644 человек, протестированных во время пандемии COVID-19, 5086 человек дали отрицательный результат и 558 человек — положительный. При этом поддержка машинных векторов показала лучшие результаты в обнаружении коронавируса с отзывом — 75 % и оценкой F1 — 60 % по сравнению с моделями: Random drill, KNN, LR, AB и DT.

**Обсуждение и заключение.** Установлено, что при использовании алгоритмов AB достигается большая точность, однако стабильность алгоритма LSVM является более высокой. Поэтому его можно рекомендовать как полезный инструмент для выявления COVID-19.

**Ключевые слова:** выявление COVID-19, классификация, модели машинного обучения.

**Для цитирования:** К. А. Бру. Сравнение моделей машинного обучения для прогнозирования коронавируса / К. А. Бру, И. В. Смирнов, М. М. Эрманн // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 67–75. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-67-75>

### 1. Introduction

The coronavirus is a very severe acute respiratory syndrome caused by the SARS-COV-2 virus. This virus, which can infect humans or animals, was discovered in the Chinese region of Wuhan, more precisely in the province of Hubei, during the pneumonia epidemic of January 2020 [1, 2]. It is therefore the seventh human coronavirus. To everyone's surprise, this virus spread worldwide, causing 318,599 deaths and 4,806,299 infected persons [3].

SARS-CoV-2, SARS-CoV and MERS-COV (Middle East Respiratory Syndrome Coronavirus) cause severe pneumonia with a mortality rate of 2.9 %, 9.6 % and 36 % respectively [4–6].

The other four viruses, namely OC43, NL63, HKU1, and 229E, are responsible for illnesses related to mild symptoms [7].

It should be noted that since the Covid-19 epidemic, there has been much speculation about the origin of this virus [8]. Some said that it was the result of work done in a laboratory. However, after studies conducted on genetic data, this hypothesis was dismissed [9]. Analysis and comparison with the genomes of previously known coronaviruses clearly show that SARS-COV-2 is different from other coronaviruses [8, 11]. The virus responsible for the coronavirus (SARS-COV-2) is similar to the SARS virus of bats [2]. Thus, the Covid-19 virus is believed to have originated from a bat coronavirus that became infectious to humans while acquiring genes specific to pangolin coronaviruses. It should be noted that the actual causes of Covid-19 are still unclear.

The symptoms of Covid-19 are similar to those of seasonal flu. The disease is more severe in the elderly and in people who are vulnerable to certain chronic diseases. Patients with Covid-19 can have symptoms ranging from mild to severe. The most common symptoms are fever (83 %), cough (82 %) and breathlessness (31 %) [12]. In patients with pneumonia, the X-ray of the lungs shows numerous mottles and ground glass opacity [12, 13].

Gastrointestinal symptoms associated with patients with Covid-19 include vomiting, diarrhoea, and abdominal pain [12, 14].

We also see a decrease in lymphocytes and eosinophils, lower haemoglobin levels, and an increase in white blood cells and neutrophils [15–18].

The manifestation of Covid-19 in children is different from that in adults. In children, the symptoms are mild. However, in some children, we have seen severe and fatal cases [19–27].

Like all other viruses, Covid-19 is transmitted mainly by the respiratory route. Among these routes of transmission, we have droplet transmission, which is the most widespread [28, 29]. Other transmission routes exist, namely the faecal route, via saliva. Indeed, SARS-CoV-2 RNA was found in the stool of a patient with Covid-19 [31]. SARS-CoV-2 RNA can be detected on inanimate surfaces (door handles). People who have been in contact with these surfaces could be contaminated [29].

This model will make it possible to identify positive and negative cases from the dataset studied and the elements responsible for COVID-19. The proposed prediction model ensures that it tracks the results regarding this epidemic situation so that the huge economic losses, the spread of the community, the amount of detachment social gens can be detected and a precise decision can also be made accordingly. This method will allow government authorities to put in place preventive measures based on our future work to predict the onset of this disease in the future.

## 2. Data Resources and Methods

The dataset used was uploaded to Kaggle. It is open source and available on this link [kaggle.com/einsteindata4u/covid19](https://kaggle.com/einsteindata4u/covid19). This dataset contains anonymized data in accordance with best international practices and patient recommendations at the Israelita Albert Einstein Hospital in São Paulo, Brazil. This section describes the proposed approach and a detailed overview of the tasks. These tasks can help to understand and extract knowledge from COVID 19 data, which can help countries contain the spread of the virus, raise awareness, launch initiatives, determine if mitigation has a positive effect or not, identify other factors affecting the virus, etc. This will allow countries to prepare for what may happen in the near future. This could help save lives and alleviate the agony. Epidemiological information includes various characteristics of the case studied, including case identification, age, sex, target value, lymphocytes, leukocytes, monocytes, hco3, etc.

### 2.1. Data Pre-processing

In data analysis, the most important step is pre-processing. However, it is not clear what methods of pre-treatment the author used. This part must be completed.

### 2.2. Data Transformation

The data is transformed to be processed and stored in .xls for further processing. All data were normalized to have a mean of zero and a unit standard deviation. With a dataset containing 111 characteristics, data mining eliminated missing values (78 characteristics) and retained important characteristics (33). This exploratory analysis of the data also allowed us to identify two categories of characteristics, namely virus-related characteristics and blood-related characteristics. The target value is divided into two categories which are negative cases coded by 0 and positive cases coded by 1.

The dataset from the Israelita Albert Einstein Hospital in São Paulo is divided into training and test data. 70 % of the data is used for predictive model training, and the remaining 30 % is used for testing. The objective of model training is to adapt the model using data from the training set. After the model is formed, the prediction models sound tested to evaluate performance in the test datasets.

### 2.3. The Proposed Models

This section describes the different machine learning models used in this paper. These models are: Random Drills (RF), K-plus Close Neighbors (KNN), Linear Support Vector Machine (SVM), Logistic Regression (LR), Decision Tree (DT), and AdaBoost (AB).

#### Random Forest (RF)

Random forests (RF) or random decision forests were first proposed in 1995. This is a general classification training method that tends to work better than traditional decision tree classification methods (Gangaie et al., 2019). Decision trees are the fundamental RF classifiers that vote for each of the forecasts, and the survival prediction is based on the majority voting method in each tree (Breiman, 2001). The accuracy of each tree and the independence of the trees from each other provide the reliability of the classification. We used 100 trees to predict two target classes, survival or death of patients with hepatitis.

#### Nearest Neighbor (KNN)

The K-Nest Neighbor (KNN) classifier is one of the most commonly used classification algorithms. This algorithm can be used in several applications. It saves all valid attributes and classifies new attributes according to their similarity dimension. KNN is a statistical recognition model method for detecting the different classes of a model. A tree data structure is used to determine the distance between the point of interest and the points in the training dataset. The attribute is classified by its neighbors. In the classification method, the value of k is always a positive integer closest to the neighbor. The nearest visions are selected from a set of classes or property values of the object.

#### Support Vector Machine (SVM)

SVM-controlled learning method is used for classification and regression [29]. This algorithm is a relatively new approach and has performed well in recent years. The SVM classifier is based on linear classifiers and in the data separated by a row, the SVM isolates the objects in the specified classes. It can also identify and classify instances that are not supported by the data. The only extension of this algorithm is to perform a regression analysis to obtain a linear function, and another extension teaches to classify the elements to obtain a classification of individual elements.

#### Logistic Regression Model (LR)

Logistic regression is the corresponding regression analysis that should be performed when the dependent variable is dichotomous (binary). Like all regression analyses, logistic regression is predictive analysis. It is used to describe the data and explain the relationship between a dependent binary variable and one or more nominal, ordinal, interval or ordinal independent variables, report [30, 31]. This approach assumes that the binary result follows a binomial distribution.

#### Decision Tree (DT) Model

The Decision Tree is a controlled learning method that is used to solve classification and regression problems, but it is more used to solve classification. This is a powerful classification method for disease prediction. This is a tree model where the internal nodes represent the characteristics of a data set, the branches represent the decision rules, and each leaf node represents a result. The decision tree consists of two nodes, a decision node and a leaf node. Decision nodes have multiple branches and are used to make a decision, while leaf nodes are the result of those decisions.

#### Model AdaBoost (AB)

AdaBoost, short for “Adaptive Boosting”, is the first boost algorithm proposed by Freund and Schapire in 1996. Its goal is to turn weak predictors into strong predictors to solve classification problems. For classification, the final equation can be put under the heading below:

$$F(x) = \text{sign}(\sum_{m=1}^M \theta_m f_m(x)) \quad (1)$$

Where  $f_m$  denotes the weak classifier m and  $\theta_m$  denotes the corresponding weight. AdaBoost can be used for face recognition, as it is a standard algorithm for detecting faces in images. AdaBoost is fast, requires no setup, and is simple and easy to program. Plus, it has the flexibility to be able to be combined with any machine learning algorithm.

### 2.4. Evaluation of Performance Measures

For the comparison of the different classification algorithms used in this paper, some metrics were evaluated. These are accuracy, recall, and F1-score. These metrics are calculated based on true positives (TP), true negatives (TN), false positives (FP), and false negatives (FN). The standardized confusion matrix illustrates the relationship between classification results and predicted classes. The level of the classification performance is calculated by the number of samples correctly and incorrectly classified in each class.

The accuracy is calculated based on the total number of correct predictions, defined as follows:

$$\text{Accuracy} = \frac{TP+TN}{TP+FN+TN+FP} \quad (2)$$

Recall, or sensitivity, is the proportion of true positive predictions that have been correctly identified, defined as follows:

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP+FN} \tag{3}$$

The F1 score is the harmonic mean of accuracy and recall, and it is calculated by:

$$\text{Score F1} = \frac{TP}{TP+\frac{1}{2}(FP+FN)} \tag{4}$$

### 3. Result

The objective of this paper is to compare the different models of machine learning for the detection of coronavirus. Our task was to find out which machine learning model has the best recall and f1-score for Class 1. The learning machine models used are: Radom drill, k-nearest neighbor, logistic regression, support vector machine, AdaBoost, and decision tree. Out of a total of 5,644 people tested for COVID-19, 5,086 people tested negative and 558 people tested positive. The results of our study are presented in Figure 1 and Figure 3. These results show that the vector-machine gave better results with a recall of 75 % and an F1 score of 60 %. The different learning curves were also traced in order to understand the phenomenon of over-fitting and under-fitting Figure 2. Indeed, the learning curve is very well known to data scientists, the learning curve shows the efficiency and quality of learning of our machine learning model. Learning curves are widely used as a diagnostic tool in machine learning for algorithms that incrementally learn a training data set. This means that we increase our dataset by a certain step, and then we see the performance of our model. The model can be evaluated on the training dataset and on the exception validation dataset after each update during training, and it traces the measured performance. This can be represented as a curve.

| RandomForest        |           |        |          |         | AdaBoost             |           |        |          |         |
|---------------------|-----------|--------|----------|---------|----------------------|-----------|--------|----------|---------|
| [[91 4]<br>[11 5]]  |           |        |          |         | [[91 4]<br>[ 9 7]]   |           |        |          |         |
|                     | precision | recall | f1-score | support |                      | precision | recall | f1-score | support |
| 0                   | 0.89      | 0.96   | 0.92     | 95      | 0                    | 0.91      | 0.96   | 0.93     | 95      |
| 1                   | 0.56      | 0.31   | 0.40     | 16      | 1                    | 0.64      | 0.44   | 0.52     | 16      |
| accuracy            |           |        | 0.86     | 111     | accuracy             |           |        | 0.88     | 111     |
| macro avg           | 0.72      | 0.64   | 0.66     | 111     | macro avg            | 0.77      | 0.70   | 0.73     | 111     |
| weighted avg        | 0.84      | 0.86   | 0.85     | 111     | weighted avg         | 0.87      | 0.88   | 0.87     | 111     |
| KNN                 |           |        |          |         | DecisionTree         |           |        |          |         |
| [[88 7]<br>[ 8 8]]  |           |        |          |         | [[86 9]<br>[11 5]]   |           |        |          |         |
|                     | precision | recall | f1-score | support |                      | precision | recall | f1-score | support |
| 0                   | 0.92      | 0.93   | 0.92     | 95      | 0                    | 0.89      | 0.91   | 0.90     | 95      |
| 1                   | 0.53      | 0.50   | 0.52     | 16      | 1                    | 0.36      | 0.31   | 0.33     | 16      |
| accuracy            |           |        | 0.86     | 111     | accuracy             |           |        | 0.82     | 111     |
| macro avg           | 0.72      | 0.71   | 0.72     | 111     | macro avg            | 0.62      | 0.61   | 0.61     | 111     |
| weighted avg        | 0.86      | 0.86   | 0.86     | 111     | weighted avg         | 0.81      | 0.82   | 0.81     | 111     |
| Logistic_Regression |           |        |          |         | SVM                  |           |        |          |         |
| [[92 3]<br>[10 6]]  |           |        |          |         | [[83 12]<br>[ 4 12]] |           |        |          |         |
|                     | precision | recall | f1-score | support |                      | precision | recall | f1-score | support |
| 0                   | 0.90      | 0.97   | 0.93     | 95      | 0                    | 0.95      | 0.87   | 0.91     | 95      |
| 1                   | 0.67      | 0.38   | 0.48     | 16      | 1                    | 0.50      | 0.75   | 0.60     | 16      |
| accuracy            |           |        | 0.88     | 111     | accuracy             |           |        | 0.86     | 111     |
| macro avg           | 0.78      | 0.67   | 0.71     | 111     | macro avg            | 0.73      | 0.81   | 0.76     | 111     |
| weighted avg        | 0.87      | 0.88   | 0.87     | 111     | weighted avg         | 0.89      | 0.86   | 0.87     | 111     |

Fig. 1. Classification report of different machine learning models



Fig. 2. Learning curve of different machine learning models

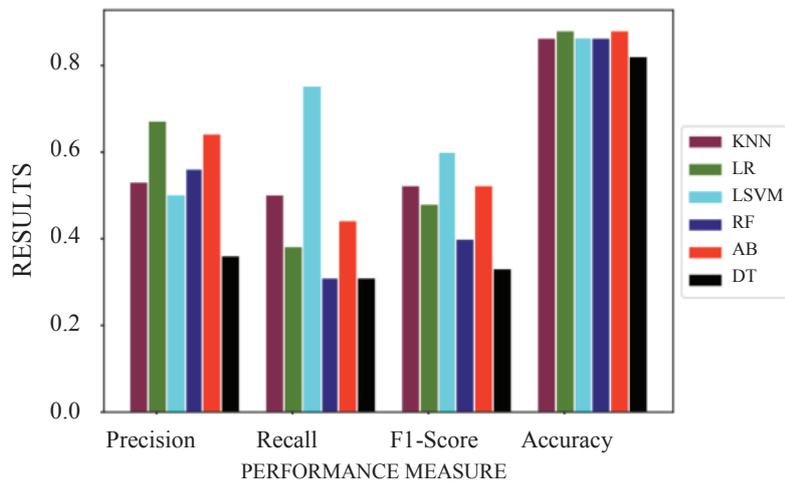


Fig. 3. Results of predictions from various machine learning techniques

Figure 3 shows the performance of the different machine learning algorithms according to the performance measures used in this paper. We see that for recall and F1-score, LSVM outperforms the other machine learning models used, namely LR, KNN, RF, AB, and DT. For accuracy, LR is much better than the others. As for accuracy, we find that LR and AB performed better than the other models. In this paper, we chose recall and F1 score to measure the performance of the model. Recall allowed us to correctly identify the Covid-19 positive test subjects among all the real positive cases. As for the F1 score, we used it because we had an imbalance between different classes, i.e., positive and negative cases.

#### 4. Discussion and Conclusion

The data used in this paper was collected at the Israelita Albert Einstein Hospital in São Paulo, Brazil. After an exploratory analysis, two categories of characteristics were identified. These are the characteristics related to the virus and the characteristics related to the blood. Out of a total of 5,644 people tested with COVID-19, 5,086 people tested negative and 558 people tested positive. The results of this study clearly illustrated that in relation to our goal, machine vector support showed better results in coronavirus detection with a recall of 75 % and an F1 score of 60 %. This co-calculation was done with the other machine learning models, namely the Radom drill, the k-nearest neighbor, the logistic regression, the AdaBoost, and the decision tree. As such, this model can be useful for the diagnosis of COVID-19. However, it is possible to optimize the parameters of this model in order to improve its performance.

After the analysis of the learning curve in Figure 2, we find that apart from the supporting sensor, other machine learning models can be studied for the detection of COVID-19. These include AdaBoost and k-nearest neighbor. Indeed, we find that if we perform a little more advanced optimization of the parameters of these models, they could be candidates for the diagnosis of COVID-19 because the difference between the learning score curve and the validation score curve would have reduced the model's ability to generalize.

#### References

1. Zhou P, Yang XL, Wang XG, et al. A pneumonia outbreak associated with a new coronavirus of probable bat origin. *Nature*. 2020;579:270–273. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2012-7>
2. Wu F, Zhao S, Yu B, et al. A new coronavirus associated with human respiratory disease in China. *Nature*. 265–269. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2008-3>
3. World Health Organization Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Situation Report-97. Available from: <https://www.who.int/docs/default-source/coronaviruse/situation-reports/20200426-sitrep-97-covid-19.pdf>
4. Wang C, Horby PW, Hayden FG, et al. A novel coronavirus outbreak of global health concern. *Lancet*. 2020;395:470–473. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30185-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30185-9)
5. Hui DSC, Zumla A. Severe acute respiratory syndrome: historical, epidemiologic, and clinical features. *Infect Dis Clin North Am*. 2019;33:869–889. <https://doi.org/10.1016/j.idc.2019.07.001>
6. Azhar EI, Hui DSC, Memish ZA, et al. The Middle East respiratory syndrome (MERS). *Infect Dis Clin North Am*. 2019;33:891–905. <https://doi.org/10.1016/j.idc.2019.08.001>
7. Corman VM, Muth D, Niemeyer D, et al. Hosts and sources of endemic human coronaviruses. *Adv Virus Res*. 2018;100:163–188. <https://doi.org/10.1016/bs.aivir.2018.01.001>
8. Andersen KG, Rambaut A, Lipkin WI, et al. The proximal origin of SARS-CoV-2. *Nat Med*. 2020;26:450–452. <https://doi.org/10.1038/s41591-020-0820-9>
9. Almazán F, Sola I, Zuñiga S, et al. Coronavirus reverse genetic systems: infectious clones and replicons. *Virus Res*. 2014;189:262–270. <https://doi.org/10.1016/j.virusres.2014.05.026>
10. Nao N, Yamagishi J, Miyamoto H, et al. Genetic predisposition to acquire a polybasic cleavage site for highly pathogenic avian influenza virus hemagglutinin. *mBio*. 2017;8:e02298. <http://dx.doi.org/10.1128/mBio.02298-16>
11. Huang C, Wang Y, Li X, et al. Clinical features of patients infected with 2019 novel coronavirus in Wuhan, China. *Lancet*. 2020;395:497–506. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30183-5](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30183-5)
12. Wang D, Hu B, Hu C, et al. Clinical characteristics of 138 hospitalized patients with 2019 novel coronavirus-infected pneumonia in Wuhan, China. *JAMA*. 2020;323:1061. <https://doi.org/10.1001/jama.2020.1585>
13. Zhu N, Zhang D, Wang W, et al. A novel coronavirus from patients with pneumonia in China, 2019. *N Engl J Med*. 2020;382:727–733. <https://doi.org/10.1056/NEJMoa2001017>
14. Chen N, Zhou M, Dong X, et al. Epidemiological and clinical characteristics of 99 cases of 2019 novel coronavirus pneumonia in Wuhan, China: a descriptive study. *Lancet*. 2020;395:507–513. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30211-7](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30211-7)
15. Lippi G, Plebani M. The critical role of laboratory medicine during coronavirus disease 2019 (COVID-19) and other viral outbreaks. *Clin Chem Lab Med*. 2020;58:1063–1069. <https://doi.org/10.1515/cclm-2020-024>
16. Bhargava A, Fukushima EA, Levine M, et al. Predictors for severe COVID-19 infection. *Clin Infect Dis*. 2020;71:1962-1968 <https://doi.org/10.1093/cid/ciaa674>

17. Wang CZ, Hu SL, Wang L, et al. Early risk factors of the exacerbation of coronavirus disease 2019 pneumonia. *J Med Virol.* 2020;91:2593-2599 <https://doi.org/10.1002/jmv.26071>
18. Hamming I, Timens W, Bulthuis ML, et al. Tissue distribution of ACE2 protein, the functional receptor for SARS coronavirus. A first step in understanding SARS pathogenesis. *J Pathol.* 2004;203:631–637. <https://doi.org/10.1002/path.1570>
19. Renu K, Prasanna PL, Valsala Gopalakrishnan A. Coronaviruses pathogenesis, comorbidities and multi-organ damage — a review. *Life Sci.* 2020;255:117839. <https://doi.org/10.1016/j.lfs.2020.117839>
20. Long B, Brady WJ, Koyfman A, et al. Cardiovascular complications in COVID-19. *Am J Emerg Med.* 2020;38 :1504-1507 <https://doi.org/10.1016/j.ajem.2020.04.048>
21. Ruan Q, Yang K, Wang W, et al. Clinical predictors of mortality due to COVID-19 based on an analysis of data of 150 patients from Wuhan, China. *Intensive Care Med.* 2020;46:846–848. <https://doi.org/10.1007/s00134-020-05991-x>
22. Lippi G, Favaloro EJ. D-dimer is associated with severity of coronavirus disease 2019: a pooled analysis. *Thromb Haemost.* 2020;120:876–878. <http://dx.doi.org/10.1055/s-0040-1709650>
23. Lang J, Yang N, Deng J, et al. Inhibition of SARS pseudovirus cell entry by lactoferrin binding to heparan sulfate proteoglycans. *Plos One.* 2011;6:e23710. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0023710>
24. Vicenzi E, Canducci F, Pinna D, et al. Coronaviridae and SARS-associated coronavirus strain HSR1. *Emerging Infect Dis.* 2004;10:413–418. <https://doi.org/10.3201/eid1003.030683>
25. Belen-Apak FB, Sarialioglu F. The old but new: can unfractionated heparin and low molecular weight heparins inhibit proteolytic activation and cellular internalization of SARSCoV2 by inhibition of host cell proteases? *Med Hypotheses.* 2020;142:109743. <https://doi.org/10.1016/j.mehy.2020.109743>
26. Henry BM, Benoit SW, Santos de Oliveira MH, et al. Laboratory abnormalities in children with mild and severe coronavirus disease 2019 (COVID-19): a pooled analysis and review. *Clin Biochem.* 2020;81:1–8. <https://doi.org/10.1016/j.clinbiochem.2020.05.012>
27. Sanna G, Serrau G, Bassareo PP, et al. Children’s heart and COVID-19: Up-to-date evidence in the form of a systematic review. *Eur J Pediatr.* 2020;179:1079-1087 <https://doi.org/10.1007/s00431-020-03699-0>
28. Leung NHL, Chu DKW, Shiu EYC, et al. Respiratory virus shedding in exhaled breath and efficacy of face masks. *Nature Med.* 2020;26:676–680. <https://doi.org/10.1038/s41591-020-0843-2>
29. Abdi MJ, Giveki D. Automatic detection of erythemato-masquamous diseases using PSO-SVM based on association rules. Technical applications of artificial intelligence. 2013;26:603-608. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2012.01.017>
30. McDonald JH. Handbook of Biological Statistics, 3rd ed. Sparky House Publishing: Sparky House Publishing; 2014.
31. Mangiafico SS. An R companion for the handbook of biological statistics, 1.3.3 ed. New Brunswick, NJ: Rutgers Cooperative Extension; 2015.

Received 02.02.2022

Revised 28.02.2022

Accepted 05.03.2022

*About the Authors:*

**Brou Kouame Amos**, postgraduate of the Information Technology Department, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN) (6, Miklikho-Maklaya St., Moscow, 117198, RF), [ORCID](#), [broukouameamos9@gmail.com](mailto:broukouameamos9@gmail.com)

**Smirnov, Ivan V.**, associate professor of the Information Technology Department, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN) (6, Miklikho-Maklaya St., Moscow, 117198, RF), Cand.Sci. (Phys.-Math.), associate professor, [Scopus](#), [ORCID](#), [smirnov-iv@rudn.ru](mailto:smirnov-iv@rudn.ru)

**Mabouh Moise Hermann**, postgraduate of the Information Technology Department, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN) (6, Miklikho-Maklaya St., Moscow, 117198, RF), [ORCID](#), [mrmabouhmoise@gmail.com](mailto:mrmabouhmoise@gmail.com)

*Claimed contributorship*

Brou Kouame Amos: basic concept formulation; research objectives and tasks; data pre-processing; analysis of research results. Mabouh Moise Hermann: text preparation; formulation of conclusions; data collection; the text revision. I. V. Smirnov: work control; the text revision; correction of the conclusions.

*All authors have read and approved the final manuscript.*

*Об авторах:*

**Бру Куамэ Амос**, аспирант кафедры «Информационные технологии» Российского университета дружбы народов (117198, РФ, г. Москва, Миклухо-макляя 6), [ORCID](#), [broukouameamos9@gmail.com](mailto:broukouameamos9@gmail.com)

**Иван Валентинович Смирнов**, доцент кафедры «Информационные технологии», Российского университета дружбы народов» (117198, РФ, г. Москва, Миклухо-макляя 6), кандидат физико-математических наук, доцент, [Scopus](#), [ORCID](#), [smirnov-iv@rudn.ru](mailto:smirnov-iv@rudn.ru)

**Мабу Моисе Эрманн**, аспирант кафедрой «Информационных Технологий», РУДН «Российский университет дружбы народов» (117198, РФ, г. Москва, Миклухо-макляя 6), [ORCID](#), [mrmabouhmoise@gmail.com](mailto:mrmabouhmoise@gmail.com)

*Заявленный вклад соавторов:*

К. А. Бру — формирование основной концепции, цели и задачи исследования, предварительная обработка данных и анализ результатов исследований. М. М. Эрманн — подготовка текста, формирование выводов, сбор данных и доработка текста. И. В. Смирнов — контроль за работой, доработка текста и корректировка выводов.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи*